Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Städtischen Realgymnasiums
zu Charlottenburg. Ostern 1899.

Die Entwickelung des mathematischen Unterrichts an unseren höheren Schulen.

(Teil II.)

Von

Franz Pahl.

Charlottenburg.
Druck von Adolf Gertz.
1899.

1899. Programm Nr. 104.

gch 7 (1899)

1046

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

III. Periode.

Der Kampf der Mathematik um die Gleichberechtigung mit den alten Sprachen.

(18. Jahrhundert.)

Wie das siebzehnte Jahrhundert den Beinamen „das mathematische“ trägt, so pflegt das achtzehnte, um die Bestrebungen, welche diesen Zeitraum der Kulturarbeit ausfüllen, kurz zu kennzeichnen, „das philosophische“ oder, mit vielleicht noch grösserem Rechte, „das pädagogische“ genannt zu werden. In ihm beginnt auch Deutschland wieder an dem Geistesleben der Völker regen Anteil zu nehmen. Hier hatte der dreissigjährige Krieg die materiellen Grundlagen des Lebens so sehr erschüttert, dass man auch in dem höchsten ideologischen Überbau der realen Lebensbedingungen besorgt nach unten blickte und sich die Festigung seines Fundamentes angelegen sein liess. Daher die eigentümliche Verbindung irdischer und himmlischer Glückseligkeit in dem Streben der spezifisch deutschen Geistesrichtung des Pietismus, die um die Wende des siebzehnten Jahrhunderts entstand und ein Menschenalter hindurch die herrschende blieb. Diese Betonung der irdischen Wohlfahrt, die den Pietisten nur ein Ausfluss werkthätiger christlicher Nächstenliebe war, sonst aber ganz gegen die Sorge um das ewige Wohl als ihr letztes und einziges Ziel zurückstehen sollte, half in gewissem Sinne ihren erbittertsten Gegnern, den Philosophen der Aufklärung, den Boden bereiten, die lediglich in der Hebung des zeitlichen Wohles der Menschheit ihre Aufgabe sahen und nach Verdrängung des Pietismus dem Zeitalter Friedrichs des Grossen sein philosophisches Gepräge verliehen. Ihrer Herrschaft bereitete dann die Vertiefung der philosophischen Anschauungen durch Kant ein jähes Ende, seine Philosophie fegte um die Wende des vorigen Jahrhunderts die seichte Aufklärung wie Spreu hinweg und leitete damit die gegenwärtige Epoche des philosophischen Denkens ein.

Der Einfluss aller dieser drei Richtungen spiegelt sich naturgemäss in der Entwickelung des höheren Schulwesens wieder. Auf die bestehenden, vom alten Humanismus geschaffenen Schuleinrichtungen des vergangenen Jahrhunderts wirkten namentlich der Pietismus und die Aufklärung umgestaltend ein, während die Philosophie Kants erst in diesem Jahrhundert, wo die höheren Schulen unter der Herrschaft des neuen Humanismus stehen, fühlbar wird. So diametral entgegengesetzt jene beiden erstgenannten Geistesrichtungen waren, so beseelte ihre Vertreter doch das gleiche leidenschaftliche Trachten, das Menschengeschlecht einsichtsvoller, vollkommener, glücklicher zu machen. Die Erziehung der Jugend, die Gründung von Schulen, die Gestaltung des Unterrichts waren beiden gleich wichtige Aufgaben, und so entstanden in diesem Zeitraum die zahlreichen Schulordnungen, in denen die Herrscher aller deutschen Länder und Ländchen, dem Drängen der Wortführer der Erziehungsideen folgend, ihre Sorge um das Volkswohl zu bethätigen suchten[1]). Hinsichtlich der Gestaltung der höheren Schulen wirkten beide, Pietismus und Aufklärung, gleich energisch für eine Umgestaltung des Unterrichts im Sinne einer Einschränkung des Betriebes der alten Sprachen und einer Erweiterung der Realien, speziell einer gründlicheren Betreibung der Mathematik. So wurde dieser Zeitraum für die Stellung der Mathematik innerhalb der Lehrgegenstände der höheren Schulen entscheidend.

Die mathematische Wissenschaft selbst weist einen ihres vorherigen glänzenden Aufschwungs würdigen Fortgang auf. Zwar gehören ihre bedeutendsten Errungenschaften dem Gebiete der höheren Mathematik an, doch brachten ihre Fortschritte auch der Elementar-

mathematik noch manches Neue. Weitaus das meiste, was in unserem jetzigen Lehrpensum der höheren Schulen aus dem achtzehnten Jahrhundert stammt, ist mit dem Namen Leonhard Euler (1707—1783) [2]) verknüpft. In allen Teilen der Elementarmathematik, in der Arithmetik und Algebra wie in der Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie treffen wir auf die Spuren der Thätigkeit dieses Mannes. Seine Bedeutung für die schulmässige Behandlung der niederen Mathematik beruht nicht nur auf der Entdeckung neuer Sätze, nicht nur auf seiner Darstellungsweise gewisser Abschnitte des mathematischen Lehrpensums, sondern nicht zum wenigsten auch auf der durch ihn zum Abschluss gebrachten Durchbildung des formalen Bezeichnungswesens. In dieser Beziehung verdanken wir Euler die jetzt gebräuchliche Bezeichnung einer Potenz, die Form $\binom{n}{k}$ für den kten Binomialkoëffizienten von n, die Bezeichnung B_1, B_2, B_3 . . . für die Bernoullischen Zahlen, die Euler ihrem Entdecker Jacob Bernoulli (1654—1705) [3]) zu Ehren so nannte. In der Geometrie und Trigonometrie wurde Eulers Bezeichnung der Seiten und Winkel eines Dreiecks mit a, b, c, α, β, γ für die Folgezeit massgebend. Unsere heutige Behandlungsweise der Lehre von den Logarithmen fusst noch auf der von Euler gegebenen Darstellung dieser Disziplin; von ihm wurde auch der Begriff des Moduls eines Logarithmensystems eingeführt. Ferner bereicherte er die Arithmetik um den binomischen Lehrsatz für Binomialkoëffizienten, um den Begriff der primitiven Wurzeln der Einheit und um die Ausdehnung des Potenzbegriffes auf imaginäre Exponenten. Wie er sich überhaupt um die Entwickelung der Exponentialreihe verdient machte, so gab er speziell zuerst die Reihe für e^{ix} und zeigte ihre Gleichbedeutung mit $\cos x + i \sin x$. Auch dehnte er die trigonometrischen Reihen auf imaginäre Winkel aus, machte auf die Bedeutung und den Nutzen der komplexen Grössen aufmerksam und erweiterte die Lehre von den Kettenbrüchen. Der Moivresche Lehrsatz rührt in der Form, wie wir ihn kennen: $(\cos x + i \sin x)^{\alpha} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x$, nicht von Moivre (1667—1754)[4]), sondern von Euler her. In die Algebra führte er den Begriff der Resolvente einer Gleichung sowie die reziproken Gleichungen ein, deren Lösungsmethode er zeigte. Auch trägt eine besondere Lösungsmethode der Gleichung vierten Grades seinen Namen. In der Geometrie kennen wir ja heute noch die Verbindungslinie des Höhenpunktes eines Dreiecks mit dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises als die Eulersche Gerade, welche durch den Schwerpunkt des Dreiecks im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird. Auch stammen die Bezeichnungen Ähnlichkeitszentrum und Ähnlichkeitspunkt von ihm. Die Stereometrie bewahrt seinen Namen in dem bekannten Satz über die Zahl der Ecken, Kanten und Flächen eines Polyeders, auch rührt der direkte Beweis des Lexellschen Satzes über die Spitzen sphärischer Dreiecke mit gemeinschaftlicher Basis und gleicher Winkelsumme von ihm her. In der sphärischen Trigonometrie stellte Euler die bekannten Formeln für die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks auf, und in der Polyedrometrie endlich lehrte er den Inhalt eines Tetraëders aus drei an einer Ecke zusammenstossenden Kanten und den von ihnen eingeschlossenen Winkeln berechnen.

Von anderen für die jetzige Elementarmathematik der höheren Schulen wichtig gewordenen Errungenschaften dieses Zeitraums, die sich nicht auf Euler zurückführen lassen, seien noch folgende erwähnt: der schon genannte Jakob Bernoulli schuf in seiner ars coniectandi ein vollständiges System der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitslehre, durch welche sämtliche dahin gehörigen Begriffe und Bezeichnungen ihre jetzt noch gültige Form erhielten. Derselbe beschäftigte sich auch mit den arithmetischen Progressionen höherer Ordnung — eine Bezeichnung, die sich erst später bei Lagny (1660—1734) [5]) findet — und lehrte die Summe von Reihen der Form $1^m + 2^m + 3^m + \ldots . n^m$ finden. Sein Bruder, Johann Bernoulli (1667—1748) [3]), der Lehrer Eulers, gab die Zerlegung gebrochener Funktionen in Partialbrüche nach der Methode der unbestimmten Koëffizienten, gebrauchte auch den Ausdruck „Funktion“ in seiner heutigen Bedeutung, während später Clairaut (1713—1765) [6]) das Zeichen f (x) dafür einführte. Von Wichtigkeit ist ferner der Beweis der Irrationalität von e und π durch Lambert (1725—1777)[7]). Der Ausdruck „Fakultät“ und die Bezeichnung n! für das Produkt 1 . 2 . 3 . . . n wurde von Kramp (1760—1826) [8]) eingeführt.

Diese kurze Zusammenstellung des Zuwachses, den die Fortschritte der Mathematik im 18. Jahrhundert dem mathematischen Pensum unserer höheren Schulen brachte, verrät, dass wir uns sehr der oberen Grenze desselben nähern. Natürlich dürfen wir nicht er-

warten, dass diese Teile auch schon in den Bereich des damaligen Lehrstoffs der höheren Schulen hineingezogen wurden; sie waren am Ende des Jahrhunderts kaum Gemeingut aller deutschen Universitäten geworden. Auch sind die grossen Fortschritte der mathematischen Wissenschaft in diesem Zeitraum nicht von den damaligen Universitätsprofessoren ausgegangen. Unter all den berühmten, genialen Mathematikern jener Zeit finden wir kaum einen, der als Professor an einer deutschen Universität gewirkt hätte. Die Ursache dieser uns jetzt etwas auffälligen Erscheinung ist wohl zum grössten Teil in dem geringen Ansehn zu suchen, in welchem damals eine mathematische Professur stand, sowie in der geringen Einträglichkeit eines solchen Amtes. Zu Beginn des Jahrhunderts war es mit dem mathematischen Studium auf den Universitäten noch recht kläglich bestellt[9]); bei der spärlichen Pflege der Mathematik auf den Lateinschulen und bei dem durch keine bestimmte Regel gebundenen Übergang von den Schulen auf die Universitäten war die mathematische Vorbildung der Studierenden so mangelhaft, dass die Lehrthätigkeit eines Universitätsprofessors noch im Verlaufe des ganzen Jahrhunderts zum grossen Teil auf ein ziemlich elementares Gebiet beschränkt blieb. Sie konnte daher schwerlich einem Geist Befriedigung gewähren, der tief genug in die höhere Mathematik eingedrungen war, um hier selbst schöpferisch thätig zu sein. Gleichwohl dürfen wir nicht mit Geringschätzung auf die Universitätsprofessoren jener Zeit zurückblicken[10]). Sie waren für ihre Wissenschaft aufrichtig begeistert und haben für deren Anerkennung und Ausbreitung in solcher Weise gesorgt, dass ohne ihre Thätigkeit die Mathematik schwerlich die Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen erlangt hätte, die sie bei Beginn des gegenwärtigen Jahrhunderts schon thatsächlich hatte. Ganz auf dem Boden der herrschenden Geistesrichtung stehend, suchten sie zunächst den ungeheuren Nutzen der Mathematik für alle Aufgaben des Lebens nachzuweisen. Eine Unzahl von Schriften entstand, in denen die Unentbehrlichkeit der mathematischen Wissenschaft für alle praktischen, verwaltenden und gelehrten Berufsarten dargestellt wurde[11]), und wenn auch namentlich von theologischer und humanistischer Seite einige Gegenschriften erschienen[12]), so konnte doch trotz der oft sehr seichten Auffassung, die in jenen Schriften zum Lobe der Mathematik zum Ausdruck kam, der Erfolg nicht ausbleiben, da das Utilitätsprinzip von dem Pietismus und erst recht von der Aufklärung nachdrücklich betont wurde. Alles, was in den Vorreden jener Schriften für den Nutzen mathematischer Kenntnisse vorgebracht wurde, findet sich in dem System der Elemente der Mathematik von Murhardt folgendermassen zusammengestellt[13]):

„Die Mathematik ist also der Inbegriff vieler Wissenschaften, von denen schon jede einzelne von sehr grossem Umfange ist, und enthält daher einen Schatz von Erkenntnissen, deren Wichtigkeit und Nutzbarkeit wohl keiner weitläufigen Schilderung bedarf. Ihr Einfluss auf die Befriedigung unserer wichtigsten Bedürfnisse und auf die Annehmlichkeiten und Bequemlichkeiten des menschlichen Lebens macht sie jeder kultivierten Nation achtungswürdig, und die Verbreitung ihrer Kenntnisse ist daher schon aus diesem Grunde reelle Beförderung des Menschenglücks. — Einem jeden Gelehrten ist aber ihre Kenntnis, ohne einmal auf die besonderen Vorteile zu sehen, die sie dem Theologen, Juristen, Arzneiverständigen, dem Geschichts- und Altertumsforscher verschafft, schlechterdings unentbehrlich. Der Nutzen, den sie leistet, lässt sich hauptsächlich auf folgende Punkte bringen. 1. Sie liefert ihm einen Schatz von Wahrheiten, von denen er mit der vollkommensten Gewissheit einsehen kann, dass sie lauter Wahrheiten sind, und zwar solche, die er ohne alle Begriffe der Erfahrung bloss aus sich selbst geschöpft hat. 2. Ohne Mathematik ist keine gründliche Kenntnis der Natur möglich. Und die Physik kann sich nur dort einer vollkommenen Gewissheit rühmen, wo sie Mathematik anwendet, die Vorgänge in Formeln kleidet. Sie ist das geschickteste Mittel, sowohl unsern Geist zu erheben, als ihn vor thörichtem Eigendünkel zu bewahren, indem keine Wissenschaft fähiger ist, uns die menschliche Vernunft einesteils in ihrer wahren Grösse und Würde darzustellen, andernteils aber uns ihre Schranken selbst da sichtbar zu machen, wo man die grösste Leichtigkeit und Klarheit erwarten sollte. 4. Sie belohnt die Mühe, mit welcher man ihre Bekanntschaft sucht, schon reichlich durch das reine, unschätzbare Vergnügen, das sie ihren Liebhabern gewährt. Dieses Zeugnis hat ihr von jeher ein jeder ihrer Kenner gegeben. Ihr wichtigster Nutzen ist aber die Schärfung des Verstandes und die Übung desselben in gründlichen Urteilen, ja selbst

im Erfinden. Neue Wahrheiten zu erfinden ist zwar nicht jedermanns Sache; aber desto angenehmer muss es doch dem, der sich mit der Analysis bekannt gemacht hat, sein, wenn er sich wenigstens imstande fühlt, verlangte Sätze, ohne zu wissen, ob sie bereits entdeckt sind, selbst zu erfinden. Schärfung des Verstandes aber und Übung im gründlichen Urteilen ist unentbehrliches Bedürfnis für jeden Studierenden. Allein diesen, einem jeden Studierenden so nötigen Vorteil kann ihm keine Wissenschaft in dem Grade verschaffen als die Mathematik. Denn da Urteilskraft überall Anschauung, folglich Klarheit und Evidenz zur Seite hat, so geht sie in der Anwendung der Regeln der Logik überall sicher, folglich ist sie imstande, jeden Fehlschluss und jede Lücke, so versteckt sie immer sein mögen, sehr leicht zu entdecken. Auf diese Art gewöhnt sie sich unvermerkt immer mehr, wahre Einsicht von scheinbarer Täuschung mit Sicherheit zu unterscheiden, und so ist das Studium der Mathematik eine beständige, und zwar die zuverlässigste praktische Logik, mithin die beste Schule für die Urteilskraft. Dieser Vorteil wird noch desto mehr durch die strenge Methode befördert, die sich ausser der Mathematik nirgends so genau und vollkommen anbringen lässt. Will man sich also denselben vollkommen verschaffen, so muss man das Studium der Mathematik auch durchaus nach dieser strengen Methode unternehmen. Euklides wusste selbst Königen keinen Weg zur Geometrie zu ebnen, und in der That wird auch durch jedes solches versuchtes Ebnen des Weges, so angenehm es auch scheint, das Studium der Mathematik weit mehr erschwert als erleichtert. Es ist also nötig, dass man sich gleich anfangs von der mathematischen Methode eine richtige Vorstellung mache." Diese Auseinandersetzung lässt mit voller Deutlichkeit erkennen, dass die Vorkämpfer der Mathematik im vergangenen Jahrhundert als den wichtigsten Nutzen ihrer Wissenschaft den betrachteten, welchen wir jetzt als die formale, logische Schulung des Verstandes, die formalbildende Kraft des mathematischen Unterrichts zu bezeichnen pflegen.

Um zu zeigen, wie sich der Betrieb der Mathematik an den Universitäten unter der Herrschaft solcher Anschauungen gestaltete, genügt es, die Verhältnisse in Halle und Göttingen zu untersuchen. Wie diese beiden jüngsten Universitäten — Halle wurde 1694, Göttingen 1734 gegründet — im Jahrhundert der Aufklärung infolge ihrer ausgedehnteren Lehrfreiheit die Führung der übrigen übernahmen, so wurden auch die Professoren Christian Wolff (1679—1754) [14]) in Halle und Abraham Gotthelf Kästner (1719—1800) [15]) in Göttingen für die Einrichtung der mathematischen Vorlesungen auf sämtlichen deutschen Universitäten massgebend. Dieselbe Bedeutung, die Wolff für die erste Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts hatte, gewann Kästner für die zweite, und die Thätigkeit dieser beiden Männer ist für die Entwickelung des mathematischen Unterrichts an den Gelehrtenschulen von so grundlegender Wichtigkeit geworden, dass wir an dieser Stelle ausführlicher auf ihre Wirksamkeit eingehen müssen.

Wolff sah, dem Beispiele der beiden Sturm[16]) folgend, seine Aufgabe als Professor der Mathematik nicht darin, ausschliesslich die höhere Mathematik zu pflegen, auf diesem Gebiete neue Entdeckungen zu machen und so die Wissenschaft selbst auf eine höhere Stufe zu heben; er wollte vielmehr die mathematischen Wissenschaften einem möglichst weiten Kreise zugänglich machen, um so eine breitere Basis für ihre Pflege zu gewinnen und um vor allen Dingen die durch den Unterricht in der Mathematik erzielte Schärfung des Verstandes für alle anderen Wissenschaften fruchtbar zu machen. Tief durchdrungen von der Überzeugung, dass die mathematischen Wissenschaften jedem unentbehrlich seien, der den Anspruch erheben wolle, eine gelehrte Bildung zu besitzen, dass allein die Art, wie die Mathematik ihre ewigen Wahrheiten findet, auch in den andern Wissenschaften zu sicheren Ergebnissen führen könne, richtete er einen Kreis von Vorlesungen für die Studierenden aller Fakultäten ein, um diese in die Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften einzuführen, während er einen zweiten Kreis für die Fachmathematiker bestimmte, um diesen die entlegeneren, schwierigeren Teile ihrer Wissenschaft zu erschliessen. Um seiner Vortragsweise auch über den Kreis seiner Zuhörer hinaus Geltung zu verschaffen, schrieb er die 1710 in erster Auflage erschienenen „Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften", die mehr als ein halbes Jahrhundert auf den deutschen Hochschulen dem Vortrage für alle Studierenden zu Grunde gelegt worden sind. Seine 1713 erschienenen Elementa matheseos universae dienten zum Vortrage für die Mathematiker

vom Fach. So zog Wolff zuerst die Grenze zwischen dem elementaren Teil der Mathematik, der Gemeingut aller wissenschaftlich Gebildeten sein sollte, und dem Wissen der Fachmathematiker.

Bei dem damaligen Entwicklungszustande der höheren Schulen war es natürlich, dass der Unterricht in beiden Teilen zunächst der Universität zufiel. Allein im Verlaufe des achtzehnten Jahrhunderts vollzog sich allmählich eine Verschiebung, durch welche jener elementare Teil der Mathematik fast ganz in die Aufgaben der Gelehrtenschulen als der Vorbereitungsanstalten für die Universität hineingezogen wurde. Auch hierfür wurde Wolff bahnbrechend. Bei der „grossen Begierde, die er in sich spürte, Verstand und Tugend unter den Menschen zu einem höheren Grade zu bringen, als bisher unter ihnen angetroffen würde, liess er sich leicht dahin bewegen, einen Auszug aus seinen Anfangsgründen zu bequemerem Gebrauche für Anfänger, sonderlich auf Schulen zu verfertigen“[17]). Dieser Auszug, der 1717 erschien, erreichte „an Grösse nicht die Helffte der Anfangsgründe, sollte ihnen aber in Ansehung des Hauptnutzens nichts nachstehen“. Daher gab er besondere Vorschriften über den richtigen Gebrauch des Buches, verlangte vor allen Dingen eine sorgfältige Einübung der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie und gab schätzbare Winke, in welchem Alter man mit diesen Disziplinen auf den Lateinschulen anfangen könne sowie welche Methode man anwenden solle. Obgleich schon vor dem Wolffschen Auszuge einige zum Gebrauche auf Lateinschulen bestimmte Lehrbücher der Mathematik erschienen sind[18]), so hat doch keines eine solche Bedeutung und eine solche Verbreitung erreicht; auch steht kein anderes in der Auffassung von der Aufgabe des mathematischen Unterrichts innerhalb des Bildungszieles der höheren Schule mit ihm auf gleicher Höhe. Wolff müssen wir daher als den eigentlichen Vater unserer mathematischen Schulbücher ansehen. Wenn der Inhalt seines Auszuges, wie wir später sehen werden, so grosse Abweichungen von dem der heutigen Lehrbücher zeigt, so liegt dies daran, dass sich zu Wolffs Zeiten in dem Vortrage der Mathematik auf den Universitäten noch nicht die Trennung der reinen Mathematik von der angewandten vollzogen hatte, sondern beide zusammen als mathematische Wissenschaften gelehrt wurden. Erst das Ende der Aufklärungsepoche brachte eine Anderung in den Anschauungen von den eigentlichen Aufgaben der Universität und wies ihrem Bereich die Pflege der reinen Mathematik zu.

Das Beispiel Wolffs wurde für den Vortrag der Mathematik an sämtlichen deutschen Universitäten massgebend. Seine Schriften wurden von fast allen Professoren ihren mathematischen Vorlesungen zu Grunde gelegt; auch tragen die zahlreichen Kompendien, die im Laufe des Jahrhunderts entstanden, fast alle unverkennbar Wolffsches Gepräge, ja sie sind oft nur oberflächliche Zusammenstellungen aus seinen mathematischen Büchern. Der eigentliche Erbe Wolffs wurde auf diesem Gebiet der schon erwähnte Kästner. Von tiefer Verehrung für ihn als den grossen Fackelträger der Aufklärung erfüllt, suchte er auf dem von ihm betretenen Pfade weiterzugehen, seine Lehrbücher durch Erweiterung des Inhalts, durch Ergänzung dessen, was ihm inzwischen nötig geworden zu sein schien, sowie durch Vertiefung der beweisführenden Methode zu verbessern. Kästners Lehrbücher verdrängten schliesslich in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts die Wolffschen und bezeichnen auch ihnen gegenüber einen wesentlichen Fortschritt. Schon in der Einteilung seines Lehrbuchs spürt man die beginnende Sonderung der reinen Mathematik von der angewandten. Der erste Teil seines 1758 erschienenen Buches behandelt lediglich die Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und der Perspektiv. In ihm haben wir es also eigentlich mit der mathesis pura zu thun, wenn er auch selbst diese Bezeichnung nicht gebraucht. Der zweite Teil bringt dann die „Anfangsgründe der angewandten Mathematik“, doch verzichtet er hierin schon auf eine ausführliche Behandlung der „Artillerie, Fortifikation und Baukunst“, weil diese sich „in den ordentlichen Lehrstunden, welche zum Vortrage der Mathematik bestimmt sind, gar nicht zulänglich lehren lassen“, und weil „verschiedene geschickte Leute besondern Unterricht darin erteilen“[19]).

Im übrigen steht Kästner ganz auf dem Boden derselben Anschauungen über Mathematik wie Wolff. Gleich ihm legt er das Hauptgewicht auf den Nutzen für die logische Schulung des Verstandes; er verschmäht es, in seinen Auseinandersetzungen über die mathematische Lehrart ausführlich ihren praktischen Nutzen für alle Berufsarten dar-

zuthun, sondern betont immer wieder, dass die mathematische oder euklidische Methode die einzige sei, die zu sicheren Ergebnissen führe und daher die eigentliche philosophische Methode genannt werden müsse. Wie Wolff will auch er, dass die Mathematik in gewissem Sinne Gemeingut aller Gebildeten sei, und er behält daher die Gliederung der Vorlesungen in einen elementar-mathematischen Cyklus für alle Studierenden und in einen zweiten Cyklus für alle diejenigen bei, die sich speziell der Mathematik widmen wollen. Ein besonderes, für Schulen bestimmtes Lehrbuch hat Kästner nicht abgefasst, doch wurde der erste Teil seiner Anfangsgründe noch während mehrerer Dezennien des jetzigen Jahrhunderts auf Gymnasien dem mathematischen Unterricht zu Grunde gelegt[20]).

So wurden durch die Wirksamkeit dieser beiden Männer die Grundlagen geschaffen, auf denen sich unser heutiger Unterricht in der Mathematik nach Inhalt und Methode aufbauen konnte. Jedoch hätte der von ihnen gegebene Anstoss allein niemals ausgereicht, um den Betrieb der Mathematik auf den höheren Schulen im Verlaufe dieser Epoche zu solcher Höhe zu erheben, dass er am Schlusse derselben schon fast moderne Züge trägt, wenn nicht auf pädagogischem Gebiete Kräfte thätig gewesen wären, die seiner Förderung zu statten kamen. Die ersten Fortschritte brachte die von dem Pietismus ausgehende umgestaltende Einwirkung auf das damalige gelehrte Schulwesen. Der grosse Träger der pietistischen Ideen, August Hermann Francke (1663—1727) hatte in seinem Pädagogium zu Glaucha eine höhere Schule geschaffen, die ganz nach neuen, eigenen Grundsätzen eingerichtet war und sich des besonderen Beifalls der beiden ersten preussischen Könige erfreute. So kam es, dass die während ihrer Regierungszeit neugegründeten Gymnasien Preussens gänzlich nach Franckeschen Prinzipien eingerichtet wurden, ja manche der alten sich nach diesen umwandelten[21]). Der grosse Einfluss, den Francke hierdurch auf die Entwickelung des höheren Schulwesens gewann, wurde noch dadurch vermehrt, dass von Halle eine grosse Zahl von Lehrern ausging, die als Studenten unter Francke durch Unterrichten an einer seiner vielen Schulen pädagogisch vorgebildet waren und seine Unterrichtsprinzipien und Lehrmethoden nach allen Gegenden Deutschlands verbreiteten, wo sie später Stätten ihrer Wirksamkeit fanden. Seine Ansichten über die Aufgaben und Ziele des mathematischen Unterrichts hat er selbst nirgends ausführlich ausgesprochen.

Auf seine Veranlassung verfasste aber der mit ihm befreundete Mathematiker Tschirnhauss eine Denkschrift[22]), die 1700 im Druck erschien unter dem Titel: „Gründliche Anleitung zu nützlichen Wissenschaften, absonderlich zu der Mathesi und Physica, wie sie anjetzo von den Gelehrtesten abgehandelt worden". Die darin enthaltenen Ansichten decken sich vollständig mit den schon als in jener Zeit herrschend angeführten Auffassungen von dem praktischen Nutzen und der Schärfung des Verstandes, welche man durch die Ausbildung in der Mathematik gewinnt. Dass Francke dies letztere Moment besonders würdigte, zeigt der von der Mathesis handelnde Abschnitt in der „Verbesserten Methode des Paedagogiums"[23]), die Freyer, der damals von Francke eingesetzte Inspektor, 1721 erscheinen liess. „Überhaupt ist bei dem Studio mathematico noch dieses zu erinnern, dass der Docens dabei beständig mit auf die Schärfung des Verstandes sehen müsse, wenn die Scholaren davon den rechten Nutzen haben sollen. . . . . „Wer studieret, muss weiter gehen und sich bei der Mathesi gewöhnen, allen Sachen recht nachzudenken und nichts unbewiesen oder ohne Grund anzunehmen. . . . . „sie kommen in jeder Sache auf den rechten Grund und sehen nicht allein, dass es so sei, sondern dass und warum es anders nicht sein könne; sie lernen eins aus dem andern vernünftig schliessen und eine Wahrheit aus der andern herleiten, welches besser ist, als wenn man die Jugend mit vielen unnützen Dingen aus der Logic plaget und dadurch ihrem Verstande nur aufzuhelfen vermeinet".

Als Lehrbuch hatte Francke auf Tschirnhaussens Veranlassuug anfangs die Elementa geometriae des Tacquet eingeführt, als aber Wolffs „Auszug aus den Anfangsgründen" erschienen war, setzte er diesen an ihre Stelle. Für das Rechnen wurde das Rechenbuch von Struntz (erschienen 1717) gebraucht. Besondere Aufmerksamkeit wandte Francke der Ausbildung einer besseren Unterrichtsmethode zu, und so begegnen wir in seinen Schulordnungen zum ersten Male methodischen Vorschriften für den Unterricht im Rechnen, in der Arithmetik und Geometrie. Seine „Ordnung und Lehrart der Waisenhausschulen"[24]) ist so reich an Vorschriften für den elementaren Rechenunterricht, dass man aus ihnen den

ganzen Verlauf einer Rechenstunde deutlich erkennen kann: in der „Ordnung und Lehrart des Pädagogiums“ giebt er Anweisungen über die Behandlungsweise der Rechenaufgaben im allgemeinen, über die Einführung der Schüler in das Wesen der Brüche, und in der „verbesserten Methode des Pädagogiums“ betont er, dass der „Docens“ den Schülern stets „den rechten Grund der Regeln zeigen müsse, damit sie diese im gemeinen Leben so nötige Wissenschaft mit Verstand begreifen, nicht aber, wie vielfältig zu geschehen pflegt, nur ohne Verstand memorieren“. Ebenda verlangt er von dem Unterricht in der Geometrie, Trigonometrie und Algebra, der Lehrer solle „durch lauter Fragen und Antworten das aus den Schülern selbst herauslocken, was sie gründlich fassen sollen“, und giebt auch eine Probe, wie der Begriff einer Line auf diese Weise zu entwickeln sei, um die Erklärung und Entstehung dieses einfachen geometrischen Gebildes ihnen deutlich zu machen. Auch die „mathesis applicata“ will er „traktieret“ wissen und zählt unter den Anwendungen besonders die Feldmesskunst, die Gnomonik, Mechanik und Civilbaukunst auf; die „principia optica“ sollten ihnen beim Glasschleifen bekannt gemacht werden.

Die Stellung, welche Francke der Mathematik neben den sprachlichen Lehrfächern in seinem Pädagogium anwies, lässt sich vielleicht nach der Zeit beurteilen, die er ihrem Betriebe widmete. Wenn es in seiner „Ordnung und Lehrart des Pädagogiums“ an einer Stelle heisst, dass wöchentlich auf die hebräische, griechische und französische Sprache sowie auf die Mathematik 12 Stunden, auf die lateinische Sprache 18 Stunden, auf die Geographie, Historie, deutsche Oratorie und Theologia Thetica 10 Stunden verwendet werden, so würde dies ein falsches Bild geben. Francke hatte seinem Pädagogium eine derartige Klasseneinteilung gegeben, dass jeder Schüler nach seinen „profectibus“ in den einzelnen Disziplinen mehreren Fachklassen zugleich angehörte, nicht in einer bestimmten Klasse in allen Lehrgegenständen nebeneinander unterrichtet wurde. Die grössere Zahl der Lehrfächer, die er in den Unterricht hineinzog, hatte ihn zu diesem System der Klasseneinteilung veranlasst, und auf vielen anderen Schulen folgte man später seinem Beispiel. Die „verbesserte Methode des Pädagogiums“ zeigt nun, dass Arithmetik und Mathesis zu den disciplinis litterariis gehörten, von denen jede täglich eine Stunde dociert wurden, doch so, dass der Kursus jeder Disziplin in einem halben Jahre beendigt wurde. Ausserdem gab es aber noch fünf Präparationsklassen für Arithmetik mit je einer Stunde wöchentlich, nur die unterste hatte 2 Stunden, und 3 geometrische Präparationsklassen mit ebenfalls je einer Stunde wöchentlich. Erst nach dem Besuch dieser Klassen, in denen die „5 Spezies“ mit unbenannten und benannten, ganzen und gebrochenen Zahlen, die Regel de tri, das Zeichnen und Messen von Linien, Flächen und Körpern getrieben wurde, trat der Schüler in die Arithmetik-Klasse und nach ihrer Absolvierung in die Mathesis-Klasse ein mit je sechs Stunden wöchentlich. War er mit diesen beiden Klassen fertig, so besuchte er bis zum Verlassen der Anstalt die Repetitionsklassen für Arithmetik und Geometrie mit je einer Stunde wöchentlich, in denen das durchgenommene Pensum wiederholt und das „Nötigste aus der Gnomonik, Civil-Baukunst, Mechanik und andern dergleichen Wissenschaften“ ihnen beigebracht werden sollte. Wenn wir auch nun das Verweilen in diesen Repetitionsklassen auf 3 Jahre ausdehnen, so kommen doch auf den gesamten mathematischen Unterricht wöchentlich nur 27 Stunden, während das Latein in 7 aufeinanderfolgenden Klassen wöchentlich 98 Stunden zählt, Griechisch und Französisch in drei Klassen wöchentlich 36 Stunden aufweisen. So bedeutend also die Förderung war, die Francke dem Unterricht in der Mathematik verschaffte, so müssen wir uns doch vor einer allzu günstigen Beurteilung seines Verdienstes hüten. Jedenfalls hat er aber in den Betrieb der alten Sprachen zu Gunsten der Mathematik eine grosse Bresche gelegt, und wenn es ihm dabei auch zunächst auf den praktischen Nutzen dieser Wissenschaft ankam, so vergass er doch nicht, durch Betonung einer fasslichen, beweisführenden Methode ihre den Verstand bildende Kraft als besonders wichtig für die Ausbildung der Schüler hervorzuheben.

In innigem Zusammenhang mit Francke stehen auch diejenigen pädagogischen Bestrebungen, welche die Anfänge unseres heutigen Realschulwesens bilden. Wenn auch Semler, der in Halle 1708 die erste Realschule eröffnete, ein Schüler Weigels war und von diesem die erste Anregung zur Beförderung der Realien erhielt, so stand er doch als Archidiakonus in Halle mit Francke in engem Verkehr und wurde jedenfalls bei der Verwirklichung seiner pädagogischen Ideen von diesem beeinflusst[25]). Joh. Jul. Hecker[26]) da-

gegen, der Gründer der ersten Berliner Realschule, war ein begeisterter Schüler Franckes, an dessen Pädagogium er 1727—1735 als Lehrer gewirkt hatte. Semlers Schöpfung hatte keinen Bestand; seine Schule ging schon im zweiten Jahre ein, und als er sie 1738 wieder eröffnete, konnte er sie ebenfalls nicht dauernd halten und musste sie nach kurzer Zeit gänzlich aufgeben. Heckers Schule dagegen gelangte zu grosser Blüte; aus ihrer lateinischen Abteilung, dem späteren Pädagogium, ging 1797 das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium, aus ihrer realen Abteilung schliesslich das Königliche Realgymnasium in Berlin hervor.

Welche Bedeutung die Mathematik für diese neue Schulgattung[27]) haben sollte, ging schon aus dem Namen hervor, welchen die Gründer ihren Schulen beilegten. Semler nannte die seine die mathematische, mechanische und ökonomische Schule, Hecker eröffnete am 9. Mai 1747 die seinige unter dem Namen ökonomisch-mathematische Realschule. Letzterer stand in seinen Ansichten über den Schulbetrieb der Mathematik ganz auf Franckeschem Boden. Wie er seine Schule ebenfalls in Fachklassen einteilte, so trägt auch sein 1749 veröffentlichter Lektionsplan Franckesches Gepräge, jedoch räumt er der Mathematik einen noch grösseren Umfang den Sprachen gegenüber ein. Wir finden bei ihm in 3 aufsteigenden Rechenklassen und ebensovielen aufsteigenden mathematischen Klassen je 4 Stunden wöchentlich; zählen wir dazu die Lektionen in den ausserordentlichen Rechenklassen, so werden den mathematischen Disziplinen wöchentlich 30 Stunden gewidmet, denen im Lateinischen 60, im Griechischen 6, im Französischen 25 Stunden gegenüberstehen[28]).

Wie es damals, um die Mitte des Jahrhunderts, mit der Pflege der Mathematik bestellt war, und welche Anschauungen die auf Franckes Prinzipien fussenden Schulmänner über die Art ihres Betriebes auf Schulen hegten, darüber giebt uns eine Schrift Auskunft, die J. F. Hähn, ebenfalls ein Schüler Franckes, als Inspektor der Schule zu Kloster Bergen erscheinen liess[29]). Ein grosser Verehrer der Mathematik, sah er die gleichzeitigen Zustände auf Universitäten und Schulen noch als so bedenklich an, dass er sich für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft wenig Gutes davon versprach und seinen Besorgnissen in einer Programmschrift vom Jahre 1749: „Gedanken, wie dem künftigen Verfall der Mathematik vorzubeugen", Ausdruck verlieh. Ihm ist die Mathematik die nützlichste, umfangreichste und gründlichste Wissenschaft, deren Pflege besonders wegen ihrer vielseitigen Anwendungen für das Gedeihen der Menschheit unentbehrlich ist. Wenn er also auch ganz entschieden in ihrer Schätzung das Nützlichkeitsprinzip vertritt, so weiss er doch ebensosehr ihre Bedeutung für die Ausbildung logischer Denkthätigkeit zu würdigen, weil durch sie „die Flüchtigkeit und Ausschweiffung der Gedanken verbessert, der Verstand geschärffet, zum ordentlichen und glücklichen Denken angewöhnet" werde. Die Art, wie sie augenblicklich auf den Universitäten betrieben werde, ist ihm viel zu oberflächlich und flösst ihm Bedenken ein, ob sie dabei nicht allmählich in Verfall geraten werde. Unter hundert Studenten seien nicht zehn, welche ihr Studium so eifrig betrieben, dass sie künftig Lehrer der Mathematik werden könnten. Die Schüler hätten es immer sehr eilig, zur Universität zu gehen, besuchten daher die oberste Schulklasse nicht lange genug, um mit einem genügenden Grund in der Mathesis die Vorlesungen zu besuchen. Daher seien sie in diesen blosse Hörer — auditores, praetereaque nihil — ohne tieferes Interesse für Mathematik, und sie blieben schliesslich ganz weg. Dazu käme noch, dass das Brotstudium vorwiege, die Mathematik aber immer noch als eine brotlose Kunst gelte und die Studenten daher wenig Zeit auf sie verwenden. Dies sei aber auch die Ursache, dass die Professoren ihren mathematischen Kursus, der eigentlich zwei Jahre dauern müsse, in einem halben Jahre beendigten; daher werde ihr Vortrag oberflächlich, uninteressant. Die Professoren müssten selbst gestehen, was für Hoffnungen sie sich von dem Wachstum der Mathematik unter den obwaltenden Verhältnissen machen könnten.

Als wichtigstes Mittel, das Studium der Mathematik zu heben, bezeichnet er einen gediegenen Unterricht in dieser Wissenschaft auf den Vorbereitungsanstalten zur Universität. Wohl giebt er zu, dass man erfreulicher Weise überall bemüht sei, die Mathematik auf den Schulen besser zu pflegen, dass man von jedem Lehrer und Privatlehrer verlange, er solle in der Mathesi bewandert sein, aber man begnüge sich dann doch meist mit dem ABC der Mathematik. Wie ungenügend ihm der damalige Schulbetrieb dieser Wissenschaft erscheint, charakterisiert er durch die rhetorische Frage: „Wieviel Schulen haben wir denn in Deutschland, auf denen die Mathematik so, wie sie soll getrieben werden, wirklich getrieben

wird?" Die Ursachen der im allgemeinen so geringfügigen Leistungen der Schulen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften sucht er in folgenden Umständen: 1. Weder der gewaltige Umfang noch der unendliche Nutzen der Mathematik wird den Schülern hinreichend klar gemacht; 2. die Lernenden sind nicht in gehörige Klassen eingeteilt, wodurch ein stufenweises Fortschreiten unmöglich wird; 3. es fehlt an einem geeigneten Schulbuch; 4. die meisten Schulen haben keine Mittel zur Besoldung guter Lehrer und zur Beschaffung von nötigem Anschauungsmaterial; 5. es mangelt an geeigneten Lehrkräften; 6. die Lehrmethode ist daher äusserst mangelhaft.

Er entwickelt dann seine Vorschläge, wie der mathematische Unterricht am zweckmässigsten einzurichten sei, und wie demgemäss das Lehrbuch beschaffen sein müsse. Er verteilt das gesamte mathematische Pensum auf drei Klassen. Die Aufgabe der untersten Klasse ist eine vorbereitende: in ihr soll der Jugend der Hauptbegriff von dem Umfange der mathematischen Wissenschaften beigebracht werden; dabei soll sie sich in der Sprache der Mathematik üben und nach und nach in das angenehme und praktische dieser Wissenschaft hineinkommen. Auf diese Weise hofft er in ihr die Lust zu erregen, mehr über diese wichtige Wissenschaft zu erfahren, tiefer in ihre Geheimnisse einzudringen. Der erste Teil des Lehrbuchs soll demgemäss eine übersichtliche Tabelle dessen enthalten, was „das Summarische, Notwendigste, Nützlichste, Begreiflichste" der Mathematik ausmacht. Dadurch erfährt der Schüler, dass die mathesis pura eine reine Grössenlehre ist, und dass diese Grössen in der Arithmetik Zahlen, in der Geometrie Linien, Winkel, Flächen und Körper, in der Trigonometrie Dreiecke, in der Algebra Buchstaben sind. In der mathesis applicata lernt er nicht weniger als fünfzehn Teile kennen: Architektur, Fortifikation, Artillerie, mathematische Geographie, Astronomie, mathematische Chronologie, Gnomonik, Optik, Katoptrik, Dioptrik, Perspektiv, Mechanik, Hydrostatik, Aërometrie, Hydraulik. Nachdem er so einen ungefähren Überblick erhalten hat, womit alle Teile der reinen und angewandten Mathematik sich beschäftigen, giebt ihm eine ausführliche Tabelle jedes einzelnen Teils von den wichtigsten Errungenschaften auf jedem dieser Gebiete Kunde, um ihn auf das vorzubereiten, worauf er in den beiden folgenden Klassen sein Nachdenken richten wird.

Die Aufgabe der zweiten Klasse ist es dann, lediglich die mathesis pura nach der genauen mathematischen Lehrart möglichst gründlich zu betreiben, um so die Fehler und Schwächen des menschlichen Verstandes zu entdecken und zu bessern. Dabei soll man vor allen Dingen „den rigorem im Demonstrieren nicht vergessen", den Schülern von den Begriffen der „congruentia, aequalitas, similitudo" das rechte Verständnis beibringen, sie durch Erfinden von Beweisen und Lösungen von Aufgaben zum selbständigen Nachdenken anhalten, damit sie nicht Autoritäten nachbeten. Theorie und Praxis müssen verbunden werden, um dadurch auf die mathesis applicata vorzubereiten. Beachtenswert ist, dass Hähn ein geschichtliches Moment in diesen Kursus hineinbringt, indem er verlangt, man solle den Schülern bei gewissen Problemen zeigen, wie in früheren Zeiten dieser und jener die Lösung derselben angefasst habe und wie man schliesslich zur eigentlichen Lösung gekommen sei.

Die mathesis applicata bildet das Pensum der obersten Klasse. Sie ist ihm das Endziel, um derentwillen die Arbeit der beiden unteren Klassen geleistet wird, der Baum, von dem die Schüler die köstlichen Früchte seiner durch die reine Mathematik gewonnenen besseren Einsicht pflücken soll. Hervorzuheben ist wieder, dass Hähn auch hier für jeden Teil eine geschichtliche Übersicht über die Entwickelung der betreffenden Disziplin verlangt. Seinen pietistischen Standpunkt kennzeichnet die Forderung, dass man in diesem Kursus dem Schüler den Unterschied der in der Mathematik durch bloss menschlichen Scharfsinn gewonnenen Wahrheiten von den ewigen, göttlichen Wahrheiten der Religion klar machen solle. Diesen gegenüber seien die mathematischen Wahrheiten unzulänglich, wie die Unmöglichkeit, die Zahl π oder eine irrationale Grösse genau durch Ziffern auszudrücken, beweise. Der Schüler müsse sich dessen bewusst werden, damit er vor jeder „Schwülstigkeit" des Urteils, d. h. vor jeder Überschätzung der Mathematik bewahrt bleibe.

Durch diese Untersuchung der Hähnschen Programmschrift gewinnen wir einen tiefen Einblick in die während jener Epoche herrschenden pädagogischen Anschauungen über

Mathematik. Hähn wirkte auch von 1753—1759 als Inspektor an der Heckerschen Realschule. Hier suchte er vor allen Dingen das Anschauungsprinzip zur Geltung zu bringen, als dessen ersten Vertreter wir ihn anzusehen haben. Seinen Schulschriften hat auch Basedow, der vor Beginn seiner pädagogischen Laufbahn nach Berlin kam, um die Realschule kennen zu lernen, seine Ideen und Verbesserungsvorschläge entlehnt[30]). Mit leidenschaftlichem Eifer nahmen er und die Philanthropinisten die Ideen Heckers und Hähns auf, suchten ihre Methoden weiter auszubilden, und wenn von den Philanthropinisten gerühmt wird, dass sie für die mathematische Unterrichtsmethode die Grundsätze aufstellten, man solle an die Anschauung anknüpfen und stets stufenmässig fortschreiten, so führten sie damit nur die Gedanken des Pietisten Hähn aus. So schroff sonst die Gegensätze zwischen den pädagogischen Prinzipien dieser beiden Richtungen waren, so kamen doch die Bestrebungen der Philanthropinisten der besseren Pflege der Mathematik ebenso zu gute, wie diejenigen der Pietisten. Ihre Thätigkeit half die Strömung noch mehr anschwellen, deren Wucht nachgebend die Gymnasien in der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts eine allmähliche Umgestaltung ihres Unterrichtsplanes vorzunehmen begannen, um der Mathematik einen grösseren Raum zu gewähren.

Diese Wandlung wurde wesentlich durch den Umstand beeinflusst, dass der alte humanistische Lehrbetrieb schon bei Beginn des Jahrhunderts sein Ansehen fast verloren und damit seine Widerstandskraft gegen Neuerungen eingebüsst hatte. Die während dieses Zeitraums sich vollziehende Umwälzung in den Anschauungen über die Aufgabe des altsprachlichen Unterrichts in den höheren Schulen kam ebenfalls der Pflege der Mathematik zu statten. Hatte der alt-humanistische Sprachenbetrieb als Ziel das völlige Beherrschen der alten Sprachen im mündlichen wie schriftlichen Gebrauch erstrebt, so sollte dem neuen Humanismus die Pflege der Sprachen nur dazu dienen, den Verstand, die Einsicht, das Urteil und den Geschmack der Jugend zu bilden. Da auch der Wert der Mathematik für die Bildung des Verstandes längst anerkannt und oft genug hervorgehoben war, so bestand zwischen ihr und den alten Sprachen kein Gegensatz mehr, der neue Humanismus musste im Gegenteil die Mathematik als unentbehrlich für die Aufgabe der Ausbildung des Geistes ebensosehr heranziehen, wie der alte Humanismus sie vernachlässigt hatte.

Daher ist denn auch dem ersten Begründer des Neuhumanismus, Johann Matthias Gesner (1691—1761) die Mathesis das zweite Auge des menschlichen Geistes[31]), und er erkennt ihr eine Bedeutung zu, die ganz unabhängig von ihrem praktischen Nutzen nicht hoch genug zu veranschlagen sei. Seine Ansichten über die mathematischen Wissenschaften hat er ausführlich schon in seiner Jugendschrift: „Institutiones rei scholasticae" (Jena 1715) niedergelegt. Schon hier bezeichnet er die reine Mathematik als ausreichend für die Schulen und nimmt von den zahlreichen Disziplinen der angewandten Mathematik Abstand[32]). Auch die unter seinem Einfluss entstandene Braunschweig-Lüneburgische Schulordnung vom Jahre 1737[33]) enthält wichtige Bemerkungen über den Unterricht im Rechnen, in der Arithmetik und der „Messkunst" d. h. Geometrie, welche verraten, wie weit er in seiner Auffassung über den blossen Nützlichkeitsstandpunkt Franckes hinaus war. Der Ausbildung von Lehrern wandte er ebenfalls besondere Aufmerksamkeit zu, richtete zu dem Zweck das seminarium philologicum in Göttingen ein, und hier steht unter den Vorlesungen, die zu hören jedes Mitglied des Seminars verpflichtet war, der Cursus mathematicus obenan, „in welchem zum wenigsten die Rechen- und Mess-Kunst, die Lehre von dem Welt-Gebäude oder allgemeine Astronomie, item die ersten Gründe der Bewegungs- und Hebe-Kunst oder Mechanik traktieret werden".

Was Gesner für Braunschweig und Hannover war, wurde sein Freund, Johann August Ernesti (1707—1781) für Sachsen. Seine 1734 erschienenen „Initia doctrinae solidioris", eine Art „Encyklopädie der Schulwissenschaften", die als Schulbuch weit verbreitet war, beginnen mit einem Abriss der Arithmetik und Geometrie, der zwar nach unsern jetzigen Begriffen ziemlich dürftig erscheint, jedoch für jene Zeit um so höher zu veranschlagen ist, als er von einem Manne herrührt, dessen eigentliches Feld die Philologie war. Wie Gesner, hat auch Ernesti in einer Schulordnung für die Durchführung seiner Ansichten über das höhere Unterrichtswesen gewirkt. Von ihm ist die „erneuerte Schulordnung[34]) für die kursächsischen drei Fürsten- und Landschulen Meissen, Grimma und Pforta" (1773) entworfen,

welche auch bestimmte Vorschriften über den Betrieb der Mathematik nach Umfang, Inhalt und Methode enthält. Besonders wichtig ist ihm die Geometrie, und seine Bemerkungen über die Art, wie er sie vorgetragen wissen will, zeigen, dass er völlig auf dem Boden der Gesnerschen Anschauungen steht und die Mathematik nicht um ihrer nützlichen Anwendungen, sondern um ihrer formalbildenden Kraft willen in den Unterricht der höheren Schulen hineinzieht. So beginnen Gesner und Ernesti den mathematischen Unterricht von dem Nützlichkeitsprinzip loszulösen, weisen ihm dadurch eine würdigere Stellung innerhalb der Lehrfächer der Schule zu, und mit Recht sagt daher Simon, dass diesen beiden Männern ein Ehrenplatz in der Geschichte des mathematischen Unterrichts gebührt[35]).

Durch das Zusammenwirken der bisher geschilderten Kräfte gewann die Mathematik gegen Ende des achtzehnten Jahrhunderts für die Gymnasialpädagogik eine solche Bedeutung, dass sie neben den alten Sprachen die dritte Säule wurde, auf welcher die gymnasiale Bildung ruhte. In den Gedanken, die Gedike[36]) (1754—1803) und Andreas Jakob Hecker[37]) (1746—1819) über das Wesen einer gelehrten Schule entwickeln, wird der Unterricht in den Sprachen mit dem Unterricht in den Wissenschaften, speziell in der Mathematik, so eng verbunden, dass die letztere von nun an als ein wesentlicher Faktor der gelehrten Bildung mit dem Lehrplan der Gymnasien verbunden bleibt. Wenn ihr auch nicht von allen Schulmännern die gleiche Schätzung entgegengebracht wurde, wenn auch ihre Pflege noch nicht überall zu der Höhe gediehen war, welche den Anschauungen jener beiden Männer entsprach, so blieben diese Ansichten doch die herrschenden, sodass die Mathematik, als im Anfange dieses Jahrhunderts Preussen die staatliche Regelung des höheren Schulwesens begann, als ein vollberechtigtes, unentbehrliches, obligatorisches Lehrfach neben den alten Sprachen dastand, das von dem einmal errungenen Boden nicht mehr zu verdrängen war.

So vollzog sich im Verlaufe des achtzehnten Jahrhunderts hinsichtlich der Ansichten von den Aufgaben der höheren Schulen ein der Mathematik äusserst günstiger Wandlungsprozess, der mit dem Umwege über den reinen Utilitarismus schliesslich zu der tieferen und freieren Auffassung führte, aus welcher die moderne Gestaltung des mathematischen Unterrichts hervorgegangen ist. Das höhere Schulwesen befindet sich also während jener Epoche in einem Übergangszustand, und dieser macht es bei der grossen, noch durch keine staatlichen Bestimmungen geregelten Freiheit und Selbständigkeit der höheren Schulen fast zur Unmöglichkeit, ein umfassendes, klares Bild von dem damals thatsächlich bestehenden Schulbetriebe der Mathematik nach Umfang, Inhalt und Methode zu geben. Der Widerstand, den die alte überlieferte Schulverfassung der ausgedehnteren Pflege der Mathematik entgegensetzte, äusserte sich am nachhaltigsten bei den Fürsten- und Landesschulen. Der erste Mathematikus von St. Afra, Steinbrück, und sein Nachfolger Klimm, der Lieblingslehrer Lessings[38]), sowie der erste Mathematikus von Pforta[39]), Hübsch, der Verfasser der Arithmetica Portensis, hatten einen schweren Stand, um für den Unterricht in ihrem Fach den zum Gedeihen nötigen Raum zu erhalten. Noch die Ernestische Schulordnung vom Jahre 1773 schreibt für die drei sächsischen Fürstenschulen den Betrieb der Arithmetik und Geometrie in den drei obersten Klassen mit zusammen nur zwölf Stunden wöchentlich vor, und dabei ist es bis ins gegenwärtige Jahrhundert hinein geblieben.

Nicht viel besser waren die Verhältnisse am Joachimsthal, obwohl hier schon im siebzehnten Jahrhundert die Pflege der Mathematik in den Händen eines besonderen Professors lag. Das ganze achtzehnte Jahrhundert weist hierin nur geringen Fortschritt auf. Die Einrichtung des mathematischen Unterrichts, wie sie Naude, der bis 1735 an dieser preussischen Elite-Anstalt wirkte, getroffen hatte, wurde von seinem Nachfolger F. Wolff fast unverändert beibehalten, und noch am Ausgange des Jahrhunderts, z. B. 1794—1798, unter dem Rektorate des der Mathematik durchaus nicht feindlichen Rektors Meierotto (1742—1800), weisen die Programme dieselben 2 Arithmetik- und 2 Mathematik-Klassen auf, mit je drei Stunden wöchentlich. Die starren, einer Veränderung nicht so leicht zugänglichen Bestimmungen, welche den Unterricht der grossen Landesanstalten regelten, und ihre strenge Abgeschlossenheit waren die Ursache, weshalb in ihnen die Pflege der mathematischen Disziplinen zeitlich keine grössere Berücksichtigung fand; doch sorgten die an ihnen wirkenden, sehr tüchtigen Lehrkräfte dafür, dass die mathematischen Leistungen dieser privilegierten Anstalten nicht viel hinter denjenigen zurückblieben, welche Gymnasien mit dreifacher Stundenzahl erreichten.

Hinsichtlich des Umfanges, welchen die Lehrpläne anderer Schulen der Mathematik einräumten, seien hier einige Angaben zusammengestellt[40]). Das Programm der Saldria in Brandenburg vom Jahre 1752 zeigt wöchentlich 10 Stunden Mathematik. Die gleiche wöchentliche Stundenzahl lassen die Lehrpläne des Martineums in Halberstadt noch bis ins jetzige Jahrhundert hinein vermuten. Die Lateinschule in Stendal zeigt 1783 wöchentlich 12 Stunden Mathematik. Der Lektionsplan des Klosters Bergen vom Jahre 1800 weisst 18 wöchentliche Mathematikstunden, das Pädagogium in Züllichau, dessen Schüler einst Gedike gewesen war, 1788 in der Woche 21 Stunden Mathematik auf, ausserdem Übungen im Feldmessen. Das Maria Magdalena-Realgymnasium in Breslau hat 1876 für die Mathematik 26 Stunden festgesetzt. Der Lektionsplan des Heckerschen Pädagogiums ist schon besprochen. Die weitere Entwickelung seiner Schule ist schwer zu einem Vergleich heranzuziehen, da viele Schüler des Pädagogiums die praktischen Rechenstunden der Realschule mitnahmen, und umgekehrt Schüler der Realschule an den mathematischen Lektionen der obersten Klassen des Pädagogiums teilnahmen. Dies blieb auch noch so, als 1797 das Pädagogium zum Friedrich-Wilhelms-Gymnasium wurde. Die Lektionspläne von 1803 und 1804 zeigen an diesem 22 Stunden wöchentlich, doch mussten die Gymnasialschüler vorher schon die arithmetische Klasse der Realschule besucht haben. Erst 1811 wurden Gymnasium und Realschule vollständig getrennt, und der Lektionsplan von 1812 giebt dem Friedrich-Wilhelms-Gymnasium 28, der Realschule 36 Mathematikstunden wöchentlich. Unter den letzteren sind aber dem praktischen Rechnen und der Arithmetik 30 Stunden gewidmet, während die eigentliche Mathematik sich mit 6 Stunden begnügen muss. Das Programm des Kölnischen Gymnasiums in Berlin vom Jahre 1802 spricht von 5 Arithmetik- und 5 Mathematik-Klassen, was mehr als 40 wöchentlichen Lehrstunden entsprechen würde, doch sind hierin diejenigen Arithmetik-Klassen mitgerechnet, welche der Schüler auf der Vorstufe durchzumachen hat, sodass sich die Stundenzahl im Gymnasium auf etwa 30 reduziert. So schwankt der Umfang des mathematischen Unterrichts bei Beginn der staatlichen Regelung des höheren Schulwesens zwischen 12 und 30 Stunden wöchentlich, doch macht sich ein deutliches Streben bemerkbar, ihn noch immer weiter auszudehnen, was bis zur endgültigen Festsetzung der wöchentlichen Stundenzahl zu auffälligen Erscheinungen Veranlassung giebt.

Der mathematische Lehrstoff der Schulen während des achtzehnten Jahrhunderts ist in zahlreichen Lehrbüchern niedergelegt, deren Titel sich in Murhardts Litteratur der mathematischen Wissenschaften zusammengestellt finden, soweit sie bis zum Jahre 1797 erschienen sind. Von der „Mathesis iuvenilis“ des älteren Sturm bis zu dem im Anfange des neunzehnten Jahrhunderts erscheinenden Lehrbuch der reinen Mathematik von Ohm zieht sich eine lange Reihe von mathematischen Schulbüchern, welche deutlich die Wandlung in der Auffassung von der Aufgabe des mathematischen Unterrichts auf den höheren Schulen erkennen lassen. Schon in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts ist die Mehrzahl in deutscher Sprache erschienen: Hausens Elementa matheseos 1734, Polacks Mathesis forensis 1740, Hübsch' Arithmetica Portensis 1748 sind ungefähr die letzten, deren Titel noch an die Herrschaft des Lateinischen erinnern[41]). Früher als in allen anderen Unterrichtsfächern wird in der Mathematik schon bald nach Beginn des Jahrhunderts überall das Deutsche die Unterrichtssprache; am längsten halten die sächsischen Fürstenschulen, bei denen noch 1773 Ernestis lateinische Initia neben Wolffs Auszug als Schulbuch für Mathematik empfohlen werden, am Gebrauche des Lateinischen fest.

Um einen Überblick über den Lehrstoff zu geben, der im Verlaufe dieses Zeitraums auf den Schulen verarbeitet wurde, sei als Ausgangspunkt die 1710 erschienene „Anleitung zu den fürnehmsten mathematischen Wissenschaften“ des Grossenhainer Rektors Benjamin Hederich[42]) genommen. Sie enthält eine Arithmetik, Geometrie, Kriegsbaukunst, Architectura civilis, Astronomie und Gnomonica. Die beiden ersten Abschnitte sind für uns die wichtigsten. In seiner Arithmetik finden wir bei den vier Spezies immer noch die Division über sich; das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel wird rein mechanisch gelehrt, sogar die Hülfe eines Memorierverses wird nicht verschmäht. Eine Logistica decimalis bildet den Schluss, doch finden wir noch kein Komma zur Abtrennung der Einer von den Zehnteln, sondern die Bezeichnung des Stellenwertes steht über den Ziffern. In den bei-

gegebenen mathematischen Nebenübungen findet sich auch eine Arithmetica Neperiana oder Logarithmica, in welcher von den Logarithmen gehandelt wird. Die Geometrie ist in eine Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie eingeteilt; sie giebt die Eigenschaften der Figuren und die Regeln über die Ausmessung von Flächen und Körpern ganz ohne Beweise, wofür sich der Verfasser allerdings in einer Anmerkung zu entschuldigen sucht. Das Ziel dieses Schulbuchs bildet also ein rein mechanisches Können, nicht eine verstandesmässige Erkenntnis der Gründe, auf denen die Richtigkeit des zur Lösung der jeweiligen Aufgabe führenden Verfahrens beruht. In dieser Beziehung bildet Wolffs „Auszug aus den Anfangsgründen der mathematischen Wissenschaften" einen gewaltigen Fortschritt. Dies weitverbreitete, von den Zeitgenossen fast einstimmig als bestes anerkannte Lehrbuch der Mathematik behandelt der Reihe nach folgende Disziplinen: Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie, Mechanik, Hydrostatik, Aerometrie, Hydraulik, Optik, Katoptrik, Dioptrik, Perspectiv, Astronomie, Geographie, Chronologie, Gnomonik, Artillerie, Fortification, Baukunst und Algebra. Der reinen Mathematik sind also die ersten drei Abschnitte und der letzte gewidmet, die fast ein Drittel des Buches umfassen. Die Arithmetik bringt eigentlich nur reine Rechenkunst, in der die vier Spezies mit benannten und unbenannten ganzen und gebrochenen Zahlen sowie Aufgaben aus der Regeldetri enthalten sind. In der Division wird lediglich die Division über sich gelehrt; vor Beginn der Bruchrechnung wird die Erklärung der arithmetischen und geometrischen Proportionen sowie einer arithmetischen Progression eingeschaltet. Unser Begriff eines Hauptnenners fehlt noch, ebenso die Dezimalbruchrechnung. Die Regeldetri wird auf die Lehre von den Proportionen gegründet, und in 14 Anmerkungen werden dann alle verschiedenen Aufgaben der Regeldetri erledigt, indem die umgekehrte und zusammengesetzte Regeldetri sowie die „welsche Praktik" auf dieselben Grundsätze der Proportionen zurückgeführt werden. Auch das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel ist in diesem Teile enthalten: das Wichtigste über die Logarithmen, die Wolff in seinen „Anfangsgründen" sehr ausführlich behandelt, sogar berechnen lehrt, bringt er in dem Auszuge unter § 13 bis § 18 seiner Trigonometrie.

Die Geometrie umfasst in § 1 bis § 176 die Planimetrie, von § 177 bis § 219 die Stereometrie. Erstere bringt die Eigenschaften der Dreiecke, Vierecke, Vielecke, des Kreises, die Ausmessung geradliniger Flächen, die Kreisberechnung und die wichtigsten Sätze der Ähnlichkeitslehre; daran schliessen sich Aufgaben aus der Feldmesskunst. Die Stereometrie enthält die Kubatur der bekannten stereometrischen Körper: Würfel, Prisma, Pyramide, Cylinder, Kegel, abgestumpfter Kegel und Kugel. Daran schliesst sich die „Visierung" eines Fasses, die Volumenbestimmung irgend eines unregelmässigen Körpers und die Anfertigung der Netze aller fünf regelmässigen Körper, eines Parallelopipeds, einer Pyramide und eines Cylinders. Die Trigonometrie behandelt kurz die goniometrischen Funktionen, den Sinussatz und geht dann zu den bekannten Fundamentalaufgaben über das rechtwinklige und schiefwinklige Dreieck über. Ein kurzer Anhang enthält noch einige Anwendungen auf die Feldmesskunst. Die sphärische Trigonometrie fehlt gänzlich. Wohl bringt der erste Teil der Astronomie Aufgaben über Bestimmung von Polhöhe, Rektascension, Deklination, Dämmerung u. s. w., aber diese entsprechen nicht unsern modernen derartigen Aufgaben, sondern sollen durch Beobachtungen mit Hülfe von Instrumenten gelöst werden. Die Algebra endlich beginnt mit einer Buchstabenrechnung, geht zu den Potenzen und Wurzeln über, von denen nur das Allernötigste gelehrt wird, behandelt an der Hand spezieller Beispiele Gleichungen mit einer und mit zwei Unbekannten, giebt die Auflösung der quadratischen Gleichung und lehrt auch den Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Koëffizienten einer Gleichung sowie zwischen den wahren, d. h. positiven Wurzeln und den Zeichenwechseln. Die Lehre von den Proportionen wird ziemlich ausführlich durchgenommen; die näherungsweise Berechnung der Wurzeln einer numerischen Gleichung bildet den Schluss.

Hierin haben wir den Grundstock dessen, was im achtzehnten Jahrhundert in der reinen Mathematik gelehrt wurde. Auf den Inhalt der übrigen Teile des Wolffschen Auszuges sei hier nicht näher eingegangen. Sie sind allmählich aus dem Lehrpensum der Mathematik geschwunden, und wir finden sie, wie der Titel der einzelnen Abschnitte verrät, in der Physik wieder, z. T. auch in der Geographie und im Zeichenunterricht. Nur die Gnomonik, Artillerie, Fortification und Baukunst sind vollständig aus dem Lehrstoff der

höheren Schulen geschieden. Diese Wandlung macht sich auch in den späteren Lehrbüchern bemerkbar. Schon bei Kästner spüren wir eine bedeutende Erweiterung und Vertiefung der reinen Mathematik, die er deutlich von der angewandten Mathematik sondert. Seine Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie geben an Umfang den Anfangsgründen der angewandten Mathematik wenig nach, und schon bedarf es keines Auszuges aus ihnen mehr, sondern sie selbst werden allmählich dem Unterricht auf den höheren Schulen zu Grunde gelegt. Die Algebra fehlt in ihnen, auch noch bei der zweiten Auflage (1764—65), doch kündigt er schon seine Absicht an, die Algebra in einem gesonderten Teile herauszugeben[43]). Im übrigen finden wir in seiner Arithmetik die Division über sich abgeschafft, nur das Unterwärtsdividieren nach heutiger Art mit Hinschreiben der einzelnen Multiplikationen wird gelehrt. Unser Begriff eines Hauptnenners fehlt auch hier noch; dagegen wird die Dezimalbruchrechnung ausführlich behandelt, zu ihrer Durchführung das Komma genau so wie heute gebraucht. Auch periodische Dezimalbrüche kommen vor, doch fehlt der Begriff einer Periode noch. Ausgehend von der geometrischen und der entsprechenden arithmetischen Reihe der natürlichen Zahlen wird der Begriff eines Logarithmus entwickelt und dann die Lehre von den Logarithmen mit grosser Ausführlichkeit durchgenommen. Auf die Planimetrie folgt eine kurze Anwendung aufs Feldmessen. In der Stereometrie werden zunächst Sätze über die Lage der Geraden im Raume, über Ebenen und ihre Lage zu einander sowie über Kugelschnitte gebracht, ehe die Berechnung der Körper gelehrt wird. An die ebene Trigonometrie schliesst sich die sphärische, in der sowohl das rechtwinklige wie das schiefwinklige sphärische Dreieck behandelt wird. Für die Berechnung ihrer Stücke aus drei gegebenen sind Proportionen aufgestellt und in einer Tabelle angeordnet. Unsere jetzigen Formeln für diese Fälle waren ja zu Kästners Zeiten noch nicht bekannt. Was Kästners Lehrbuch besonders vor dem Auszuge Wolffs auszeichnet, ist die Anwendung von Formeln. Während jener bei jeder Aufgabe die Operationen einzeln aufzählt, die zu ihrer Lösung führen, macht Kästner schon einen umfangreichen Gebrauch von Buchstaben-Ausdrücken, aus deren Form und Zusammensetzung der Verlauf der zur Lösung notwendigen Rechnungen unmittelbar zu entnehmen ist. Die Bezeichnung „Formel" findet sich bei ihm noch nicht. Kästner hatte seine Anfangsgründe ursprünglich nicht für den Gebrauch auf Schulen, sondern für seine akademischen Vorlesungen bestimmt, an welchen die Studenten aller Fakultäten teilnahmen. Es kennzeichnet den grossen Fortschritt, welchen die Pflege der Mathematik im Schulunterricht gemacht hatte, dass sein Buch sich in den letzten Dezennien des achtzehnten Jahrhunderts als Schulbuch einbürgerte.

Die Wandlung, die sich allmählich in der Auffassung von der Aufgabe des mathematischen Unterrichts und in der Wertschätzung der reinen Mathematik vollzog, macht sich auch in dem Erscheinen von Lehrbüchern bemerklich, die speziell die letztere behandeln. Es seien hier noch folgende erwähnt: 1773 gab der Leipziger Kantor Funck seine „Anfangsgründe der Mathematik" und im gleichen Jahre der Wittenberger Professor Ebert seine „Unterweisung in philosophischen und mathematischen Wissenschaften" heraus[44]). Beide waren, wie der Titel besagt, für den Gebrauch an Schulen und Gymnasien bestimmt; das letztere war speziell an der Schule in Stendal im Gebrauch. Es sei bemerkt, dass sich in diesem zum ersten Mal der jetzige Begriff eines Hauptnenners findet. 1776 und 77 erschienen die Anfangsgründe der Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie des Superintendenten und Leiters der Klosterschule zu Amelunxborn Haeseler. 1790 liess er ihnen die sphärische Trigonometrie, die Kegelschnitte und ihre Anwendung folgen. 1780 gab Michelsen[45]), Professor der Mathematik am Köllnischen Gymnasium zu Berlin seine „Anfangsgründe der reinen Mathematik" heraus. 1791 erschien „der erste Kursus der reinen Mathematik" des Helmstädter Professors Lorenz, als Lehrbuch an der Schule zu Kloster Bergen gebraucht. 1796 erschienen die „Anfangsgründe der reinen Mathematik" von Vieth, die als ein besonders gutes Lehrbuch gerühmt werden[46]). Mit dem „Grundriss der reinen Mathematik" vom Jahre 1803, welchen Thibaud nach Kästners Tode seinen Vorlesungen an der Universität Göttingen zu Grunde legte, haben wir dann den Anschluss an das gegenwärtige Jahrhundert erreicht.

Die Verteilung des mathematischen Lehrstoffs erfolgte natürlicherweise gemäss der geschichtlichen Entstehung und Entwickelung dieses Unterrichts. Zunächst wurde das Rechnen getrieben, dann eine Klasse hindurch neben dem Rechnen die Arithmetik, schliesslich Geometrie und Trigonometrie neben der Arithmetik und Algebra. Doch erkannte schon Michelsen das Missliche dieser Verteilung und befürwortete, die Geometrie vor der Arithmetik zu treiben, weil jene weniger Abstraktion erfordert[47]). So beginnt also schon am Ende dieses Zeitraumes die kritische Prüfung, ob das historisch Gewordene auch den Fähigkeiten der Schüler angemessen ist. Welchen Fortschritt die Anschauungen über die Mathematik und ihre Pflege im Laufe eines halben Jahrhunderts gemacht haben, erkennt man, wenn man die vorher besprochene Schrift Hählns vergleicht mit folgenden Schriften Michelsens: „Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik und die Art, die Vollkommenheit derselben zu vergrössern", ferner „Beiträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik".

Hinsichtlich der Methode kann man diesen Zeitraum mit Unger als die Epoche der beweisführenden Lehrart bezeichnen[48]) Im Mittelpunkt des Unterrichts steht das Streben, dem Schüler Klarheit über die Gründe zu verschaffen, warum das, was ihm gelehrt wird, richtig ist; keine Regel wird gegeben, kein Lehrsatz ausgesprochen, keine Aufgabe gelöst, ohne durch einen Beweis ihre Richtigkeit darzuthun. So trat die demonstrative Lehrart an die Stelle der dogmatischen, das denkthätige Können an die Stelle des blos gedächtnismässigen. Diese Lehrart musste schliesslich zur völligen Ueberwindung des Nützlichkeitsstandpunktes führen. Wie schwer dieser zu überwinden war, zeigt eine Aeusserung Büschings[49]) über den Unterricht in der Mathematik im Programm des Gymnasiums zum grauen Kloster vom Jahre 1768. Er betont darin den praktischen Vortrag, denn der bloss theoretische oder abstrakte Vortrag sei nicht nur unnütz, sondern schädlich und daher ebenso zu verwerfen wie der mechanische Unterricht. Zwar lernen die jungen Leute die Mathematik auch zur Schärfung ihres Verstandes, doch vornehmlich um körperliche Grössen richtig ausmessen zu können. Die „blasse Theorie" könne später kommen. Lehrsätze müssten nur um ihrer Ausübung willen gelernt werden, daher sollen nur solche Lehrsätze gegeben werden, die auch im gemeinen Leben nützlich sind.

Für die Durchführung der beweisführenden Lehrart hatte man zwei Methoden, die synthetische und die analytische. Während die erstere von dem Allgemeinen und Einfachen ausgeht und aus demselben durch ein deduktives Schlussverfahren unter Anwendung der Regeln des Syllogismus zu dem Besonderen und Zusammengesetzteren fortschreitet, nimmt die Analysis das Unbekannte als bekannt an, verbindet es in Gleichungen mit bekannten Grössen und entwickelt es durch Lösung dieser Gleichungen. Beide Methoden waren anfänglich, z B. bei Wolff, streng gesondert, später entstand durch ihre Vereinigung die analytisch-synthetische Methode, der z B. Kästner den Vorzug gab. In dem Vortrage der Geometrie herrschte ausschliesslich die synthetische Methode; Euklids unerreichtes Vorbild, die strenge Folgerichtigkeit in der Anordnung seiner Lehrsätze, die unwiderlegliche Richtigkeit der auf diese Weise gewonnenen Ergebnisse veranlassten, dass man dabei auf die Natur des auszubildenden Geistes gar keine Rücksicht nahm, sondern lediglich das Gebäude der Geometrie in seiner folgerichtigen Schönheit betrachtete, dass man den Schüler über den Lehrgegenstand vergass. Daher denn die langdauernde Herrschaft der euklidischen Methode mit ihrem streng geordneten Apparat von Definitionen, Postulaten, Axiomen, Theoremen, Korollarien, Lemmen und Scholien, eine Herrschaft, unter welcher der Unterricht in der Mathematik solange zu leiden hatte und teilweise heute noch leidet, wenn auch jene altertümlichen Bezeichnungen längst vergessen sind und deutschen Worten Platz gemacht haben. Diese strikte Befolgung der euklidischen Methode verschaffte auch der Mathematik in dem Lehrplan der Gymnasien jene eigentümliche Stellung einer Vertreterin der Philosophie, wie später Spilleke mit Recht hervorgehoben hat[50])

Zu der Entwickelung dieser starren, für den kindlichen Geist toten Lehrmethode mag der Umstand nicht unwesentlich beigetragen haben, dass die Pädagogik damals sich erst im Anfangsstadium ihrer Ausbildung befand, ihre Prinzipien noch nicht auf erfahrungsmässig gewonnenen physiologischen und psychologischen Grundlagen ruhten. Für die pädagogische Ausbildung der Lehrer an höheren Schulen wurde wenig gesorgt, ebensowenig war

ihre wissenschaftliche Ausbildung in der Mathematik stets eine gründliche. Wohl enthielten schon die königlichen Verordnungen vom 24. Oktober 1713 und 30. September 1718 einige Bestimmungen über die Lehrerprüfung in Preussen, doch kamen sie nicht zu allgemeiner Anwendung. Ebenso schrieb die Instruktion für das Oberschulkollegium vom 22. Februar 1887 vor, dass die Anstellung eines Lehrers nur auf ein Zeugnis erfolgen sollte, welches die genannte Behörde entweder nach eigener Prüfung des Kandidaten oder auf den Bericht eines mit der Prüfung beauftragten Consistoriums aufzustellen hatte; allein auch hieraus entstand noch keine allgemein und konsequent durchgeführte Massregel[51]). Als Beispiel einer solchen Prüfung für das höhere Lehramt sei hier die des Joh. Dan. Wolff aus Rastenburg angeführt, die dieser 1790 vor dem Konsistorialrat Reccard in Königsberg ablegte. Das Mass der Anforderungen in der Mathematik ergiebt sich aus dem Bericht über das Examen, wie folgt: Mündliche Prüfung: „Während der Kandidat in der Arithmetik eine genügende Sicherheit zeigte, befand er sich in der Geometrie nur im Besitz der allerersten Anfangsgründe. Den Unterschied zwischen einem Centri- und Peripheriewinkel wusste er wohl anzugeben, nicht aber den Beweis zu liefern, dass einer der ersteren auf gleichem Bogen doppelt so gross als einer der letzteren ist, und bedurfte er der Einhülfe beim pythagoräischen Lehrsatze.“ Schriftliche Prüfung: Aufgaben in der Arithmetik. 1. „Welches ist die Summe von $4^2/_3$, $2^1/_2$, $6^3/_5$, $8^5/_6$ und $3^2/_7$, und dieselbe auf $25^{31}/_{35}$ von ihm angegeben.“ 2. Es stirbt ein Schuldner, dem 4 Kreditoren Geld geliehen haben, nämlich der erste 1000, der zweite 800, der dritte 600, der vierte 450 Thaler. Er hinterlässt aber nur 1596 Thaler: wieviel wird ein jeder von dem geliehenen Gelde wiederbekommen?“ Die Antwort war: A. 560, B. 448, C. 326, D. 252 Thaler. Endlich wurde aus der Geometrie die Lösung folgender Aufgaben verlangt: 1. „Durch 3 gegebene Punkte einen Kreis zu ziehen“ und 2. „Zu zwei gegebenen Linien die dritte Proportionale zu finden.“ Beide wurden mit Hinzufügung von Zeichnungen richtig gelöst“[52]).

Die Aufgaben in der Arithmetik beschränkten sich auf die Leistungen eines Quintaners und Quartaners, die in der Geometrie auf die eines Tertianers, während die mündliche Prüfung nicht einmal Sicherheit in den Tertianerkenntnissen verriet. Das Oberschulkollegium bestätigte die Wahl des Kandidaten zum Rektor in Saalfeld.

Wolff hatte Theologie studiert, und wie er, so waren die meisten Lehrer an höheren Schulen während jenes Zeitraums Theologen, „welche die Schule für einen Durchgang in ein ruhiges oder fettes geistliches Amt ansahen“[53]). Das theologische Amtsexamen gab zugleich die Befähigung für das Lehramt, und so hatten die meisten als Studenten der Theologie nur jene für alle Fakultäten bestimmten Vorlesungen über Mathematik gehört, beherrschten also selber nur notdürftig das Wissen, das sie auf der Schule lehren sollten. Zu einer selbständigen Auffassung der Aufgabe des mathematischen Unterrichts, zu einer Prüfung des Lehrstoffes und des Lehrverfahrens gelangten nur wenige. Erst die allgemeine staatliche Regelung des höheren Schulwesens brachte auch hierin eine Änderung hervor.

IV. Periode.

Der mathematische Unterricht unter dem Einflusse der staatlichen Verfügungen.

(19. Jahrhundert.)

Unser gegenwärtiges Jahrhundert hat nach der Tendenz, von welcher sein Geistesleben vornehmlich beherrscht wird, den Beinamen „das historische" erhalten. Diese Richtung auf das Historische setzt naturgemäss eine hohe Wertschätzung der alten Sprachen voraus und wurzelt daher in der Pflege der Philologie, in welcher die während der letzten Dezennien des vorigen Jahrhunderts zur Blüte gelangende neuhumanistische Auffassung einen Aufschwung ohne Gleichen hervorrief. Der mit den Bestrebungen Gesners und Ernestis beginnende Neuhumanismus fand durch Heyne (1729—1812)[54]) und vor allen Dingen Friedrich August Wolf (1759—1824)[55]) seine völlige Ausbildung, erlöste die Philologie aus ihrer bisherigen Stellung einer ancilla theologiae und erhob sie zu einer selbständigen Wissenschaft. Der belebende Hauch des Neuhumanismus durchdrang alle pädagogischen Bestrebungen, die eine höhere Bildung zum Ziel hatten, und hatte alle führenden Geister Deutschlands erfasst, als von den deutschen Staaten zuerst Preussen daran ging, sein höheres Schulwesen durch bestimmte Vorschriften in feste Formen zu bringen. So wurde für die Entwickelung des höheren Schulwesens in diesem Jahrhundert der Neuhumanismus massgebend, und er hat es ja auch im wesentlichen bis heute beherrscht. Bezugnehmend auf die Geschichte des höheren Unterrichts kann man daher unser Jahrhundert als „das neuhumanistische" oder „das philologische" bezeichnen.

Schon im vergangenen Abschnitt ist die Stellung gekennzeichnet, welche die neuen pädagogischen Prinzipien der Mathematik für die Ausbildung des menschlichen Geistes zuwiesen. Sie war ein unentbehrlicher Faktor im gelehrten Unterricht geworden und spielt daher während des ganzen Zeitraumes eine wichtige Rolle. Für den Umfang ihres Betriebes, für die Summe des mathematischen Lehrstoffs, ja zum Teil auch für das Lehrverfahren wurden die staatlichen Verfügungen in erster Linie massgebend, und an ihnen muss daher die Entwickelung des mathematischen Unterrichtes zunächst verfolgt werden. Drei Punkte sind es vornehmlich, welche jene Verfügungen ins Auge fassen: Die Abgrenzug der Schule gegen die Universität durch Festsetzung eines bestimmten Lehrzieles, dessen Erreichung der Schüler in einem besonderen Examen darthun muss, die Aufstellung eines für alle höheren Schulen verbindlichen Normal-Lehrplanes und die Ausbildung eines geeigneten Lehrerstandes. Schon das von dem Minister Zedlitz 1787 geschaffene Oberschulkollegium[56]) erliess eine Abiturienten-Prüfungsinstruktion, die durch das königliche Edikt vom 23. Dezember 1788 publiziert wurde, doch war in dieser nichts über die Gegenstände vorgeschrieben, in denen geprüft werden sollte. Die vorliegenden Berichte über solche Prüfungen zeigen aber, dass in den meisten Fällen mathematische Arbeiten im schriftlichen Examen verlangt wurden und auch eine mündliche Prüfung in der Mathematik stattfand. Als 1808 das Oberschulkollegium aufgelöst und die Unterrichtsverwaltung der dritten Sektion des Ministeriums des Innern zugewiesen wurde, trat in Wilhelm von Humboldt (1757—1835)[57]) an die Spitze dieser Sektion eine Persönlichkeit, die auf der höchsten Stufe der damaligen Bildung stand und, ganz von neuhumanistischem Geiste beseelt, diesem gemäss die Lehrverfassung unserer Gymnasien begründete. Welche Anschauungen er speziell über die Aufgabe und

den Betrieb des mathematischen Unterrichts hatte, darüber lässt sich nichts Genaueres angeben. Er stand in allen Unterrichts- und Erziehungsfragen auf demselben Boden wie Herder (1744—1803)[58]), mit dem er ja befreundet war. Dieser hat zwar in seinen Schriften „Zum Unterricht am Weimarer Gymnasium", die er als Ephorus dieser Anstalt verfasste, einige Bemerkungen über den Betrieb der Arithmetik und der Geometrie gemacht, nirgends aber sich über die Bedeutung des mathematischen Unterrichts im Zusammenhange mit den übrigen Lehrfächern ausführlich geäussert. Ihn leitete der allgemeine Gesichtspunkt, dass edle Menschenbildung das Ziel der Schule sei, und da ist es „einerlei, ob man an Griechen oder an Römern, an der Theologie oder der Mathematik denken gelernt hat, d. h. seinen Verstand und sein Urteil, sein Gedächtnis und seinen Vortrag ausgebildet hat; alles gleichviel, wenn sie nur ausgebildet sind". Ähnlich wurde auch Humboldt von einem allgemeinen, hohen edlen Prinzip geleitet; dass aber er, wie seine beiden Ratgeber für gymnasiale Angelegenheiten, F. A. Wolf und Süvern (1775—1829)[59]), der Mathematik eine hohe Bedeutung zuerkannten, erhellt daraus, dass in den Verfügungen, die er selbst während der anderthalb Jahre seiner Wirksamkeit[60]) als Leiter der Unterrichtsverwaltung erlassen, oder die doch auf ihn zurückzuführen sind, die Mathematik im Gymnasium als ein gleichberechtigtes Lehrfach neben den alten Sprachen und der Geschichte anerkannt wird. In dem Edikt vom 12. Juli 1810[61]), betreffend die Einführung einer allgemeinen Prüfung der Schulamtskandidaten, wird ausdrücklich hervorgehoben, dass die schriftliche wie mündliche Prüfung sich auf philologische, historische und mathematische Kenntnisse richten soll. Das Mass dieser Anforderungen wird jedoch nicht näher bestimmt. Dieses Edikt ist die einzige, von Humboldt selbst herrührende „gesetzgeberische Massnahme über das höhere Schulwesen", doch hatte er auch schon die Neuordnung des Abiturientenexamens und die Aufstellung eines Normallehrplans angeregt. Beide wurden nachher namentlich Süverns Werk. In dem Edikt vom 25. Juni 1812[62]), betreffend die Abiturienten-Prüfung, finden wir schon bestimmte Vorschriften für die Mathematik. In der schriftlichen Prüfung wurde ein mathematischer Aufsatz gefordert. Durch ihn war „besonders die Beurteilungskraft des Examinanden in der Anwendung des Erlernten zu erforschen; auch soll aus ihm hervorgehen, ob er selbst Fragen aufzufinden und Ansichten zu nehmen imstande sei, und wie weit sich sein Kombinationsvermögen erstrecke". In der mündlichen Prüfung stellte sich das Ziel der Mathematik so dar: „Kenntnis der Rechnungen des gemeinen Lebens nach ihren auf die Proportionslehre gegründeten Prinzipien, des Algorithmus der Buchstaben, der ersten Lehre von den Potenzen und Wurzeln, der Gleichungen des 1. und 2. Grades, der Logarithmen, der Elementargeometrie (Euklid B. 1—6. 11. 12.), der ebenen Trigonometrie und des Gebrauchs der mathematischen Tafeln". Das Pensum der Geometrie ist hier also nach Euklid angegeben, ein Beweis, wie sehr damals die euklidische Methode den geometrischen Unterricht beherrschte.

Wie sich das mathematische Pensum auf die einzelnen Klassen verteilen sollte, ist in dem Lehrplane von Süvern enthalten, der nach mehrmaliger Umarbeitung 1816 als Richtschnur für den Gymnasial-Unterricht aufgestellt, aber nicht veröffentlicht wurde. Er gelangte daher nicht zu allgemeiner Anwendung und die Lehrpläne behielten noch zwei Jahrzehnte lang eine grosse Verschiedenheit, bis die 1836 erschienene Schrift Lorinsers[63]) „Zum Schutz der Gesundheit in den Schulen" zu einer Revision der Lehrpläne führte und die Ministerialordnung vom 27. Oktober 1837 einen allgemein verbindlichen Normal-Lehrplan für die Gymnasien vorschrieb. Diese Zeit des Übergangs zeigt daher in dem Umfang und dem Inhalt des mathematischen Lehrbetriebs eine auffällige Verschiedenheit. Im allgemeinen spürt man ein energisches Streben nach Erweiterung des mathematischen Unterrichts. Äussere Umstände trugen hierzu bei: der Einfluss der französischen Revolution, die Gründung der école polytechnique, die kriegerische Überlegenheit Napoleons, die nicht zum wenigsten auf seiner besseren Artillerie beruhte und so mit seiner hohen Wertschätzung der Mathematik in Verbindung gebracht wurde, wirkten zusammen, um die Pflege derselben besonders wichtig erscheinen zu lassen, schrieb doch Scharnhorst 1811: „Ich setze in das gründliche Studium der Mathematik einen sehr hohen Wert, ich betrachte dasselbe als die Grundlage aller ferneren Geistesbildung und aller anderen Kenntnisse"[64]). So wird es auch erklärlich, dass Süverns Lehrplan[65]) vom Jahre 1816 wöchentlich sechs Stunden Mathematik in jeder Klasse

aufweist und nach ihm das Gymnasium, dessen Unterrichtskursus auf 10 Jahre — 3 in der Prima — veranschlagt war, wöchentlich 60 Mathematikstunden haben sollte. Daher zeigen denn auch die jener Übergangszeit angehörigen Lehrpläne mancher Gymnasien eine Ausdehnung der Mathematik, welche die heutige übertrifft. Am Friedrich-Wilhelms-Gymnasium wurden sogar Differential- und Integralrechnung getrieben und die Kegelschnitte behandelt[66]). Allein dass der Wert des mathematischen Unterrichts nicht an der Fülle des Gebotenen, sondern an der Art des Vortrages liegt, beweist folgende Stelle in den Lebenserinnerungen Ludwig Wieses, der 1822—1826 Schüler des Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums war[67]): „Der mathematische Eifer, den wir beide mitgebracht hatten, fand im Gymnasium keine Nahrung und erlosch leider schon in der Sekunda gänzlich. Der Lehrer daselbst und in Prima kam immer spät und wie träumend in die Klasse, hielt dann einen akademischen Vortrag und liess ihn zuletzt von Schülern, die er schon als befähigt kannte, wiederholen. Ich habe später erkannt, dass er ein geistreicher Mann und philosophischer Denker war, aber zu lehren und eine volle Klasse zu beschäftigen verstand er nicht.“ Aus ungefähr derselben Zeit haben wir einen Bericht über die sächsische Fürstenschule Grimma in dem Leben Gottfried Hermanns von Hermann Köchly[68]): „Von Algebra haben wir während jenes Zeitraums kein Sterbenswörtchen vernommen, und in der Geometrie sind wir nur zum pythagoreischen Lehrsatz gekommen. Ein guter Mathematiker zu sein, galt unter uns für ein sehr zweifelhaftes Lob.“ Hier lag die Ursache des schlechten Betriebes der Mathematik an der ganzen Lehrverfassung der Fürstenschulen, die ihren alten Traditionen möglichst lange treu blieben und der Mathematik den Sprachen gegenüber geringen Wert beilegten.

Um ein Beispiel zu geben, welcher Art die mathematischen Aufsätze waren, die im Abiturientenexamen gemäss den Bestimmungen von 1812 gegeben werden sollten, sei die Aufgabe erwähnt, die der geniale Mathematiker Jacobi 1821 als Abiturient am Gymnasium zu Potsdam zu behandeln hatte[69]): „Wenn Polhöhe eines Ortes, Abweichung eines Sternes, des Sternes Höhe, Stundenwinkel und Azimut für diesen Ort gegeben sind, aus je dreien dieser Stücke die beiden anderen zu finden.“

Mit den ministeriellen Verfügungen vom 20. April 1831, 4. Juni 1834 und 24. Oktober 1837 erreicht die staatliche Regelung des höheren Schulwesens zunächst einen festen Abschluss. In der ersten[70]) wird das Edikt wegen der Prüfung der Kandidaten des höheren Schulamts von 1810 weiter ergänzt und unter den drei Gruppen der zusammengehörigen Hauptfächer, in denen eine facultas docendi erworben werden kann, treten die Mathematik und die Naturwissenschaften auf. Die zweite[71]) enthält ein Reglement für die Maturitätsprüfung, welches ebenfalls eine Erweiterung und Erläuterung des Edikts von 1812 ist. Für die Mathematik gelten folgende Bestimmungen: in der schriftlichen Prüfung wird die Anfertigung einer mathematischen Arbeit verlangt, „deren Gegenstand die Lösung zweier geometrischen und zweier arithmetischen Aufgaben aus den verschiedenen in den Kreis des Schulunterrichts gehörigen Abschnitten, oder eine nach bestimmten, vorher anzugebenden Rücksichten geordnete Übersicht und Vergleichung zusammengehöriger mathematischer Sätze“. Die mündliche Prüfung formuliert das mathematische Lehrziel der Gymnasien, wie folgt: „Fertigkeit in den Rechnungen des gemeinen Lebens nach ihren auf die Proportionslehre gegründeten Prinzipien, Sicherheit in der Lehre von den Potenzen und Wurzeln und von den Progressionen, ferner in den Elementen der Algebra und der Geometrie, sowohl der ebenen als der körperlichen, Bekanntschaft mit der Lehre von den Kombinationen und mit dem binomischen Lehrsatze, Leichtigkeit in der Behandlung der Gleichungen ersten und zweiten Grades, eine geübte Auffassung in der Trigonometrie und hauptsächlich eine klare Einsicht in den Zusammenhang sämtlicher Sätze des systematisch geordneten Vortrages.“ Die letzte[72]) der genannten drei Verfügungen giebt dann im Normal-Lehrplan die Anweisung, dass für die Erreichung dieses Lehrzieles wöchentlich 33 Stunden aufgewendet werden sollen, nämlich in VI und V je 4 Stunden Rechnen und geometrische Anschauungslehre, in IV und III je drei Stunden, in II und I je 4 Stunden Mathematik; der Kursus der obersten drei Klassen war zweijährig. Alle Gymnasien hatten selbst alljährlich den Lektionsplan festzustellen, in dem das Lehrziel jeder einzelnen Klasse genau abgegrenzt wurde, sodass ihnen noch eine gewisse Freiheit der Bewegung erhalten blieb. So hatte der mathematische Unterricht auf sämtlichen preussischen Gymnasien nach Umfang, Inhalt und Ziel eine feste Gestaltung gewonnen.

Man erkennt sofort, dass hiermit dem erwähnten Streben nach grösserer Ausdehnung des mathematischen Unterrichts auf den Gymnasien ein fester Damm entgegengesetzt ist. Das Dezernat für das höhere Schulwesen lag seit 1818 nicht mehr in Süverns Händen, sondern war auf Johannes Schulze (1786—1869)[73]) übergegangen, der es bis 1840 verwaltete, aber erst 1858 aus dem Unterrichtsministerium schied. Über den Wert des mathematischen Unterrichts hatte er keine so hohe Meinung, wie ja sein Ausspruch kennzeichnet, dass in einer Zeile des Cornelius Nepos mehr bildende Kraft läge als in der ganzen Mathematik[74]). Daher sehen wir denn auch ihre Stundenzahl gegen den Süvernschen Entwurf um mehr als 20 Stunden gekürzt und bemerken während der ganzen Dauer von Schulzes Dezernat ein ablehnendes Verhalten der obersten Schulbehörde gegen irgend welche Erweiterungen des mathematischen Unterrichts. So wird eine Eingabe der schlesischen Stände, die unter anderm auch den Unterricht in der Mathematik mit gleichem Vorzuge und mit gleicher Gründlichkeit wie den Sprachunterricht behandelt wissen will, abschlägig beschieden; in den Verfügungen vom 13. September 1834, 13. Dezember 1834 und vom 21. Oktober 1840[75]) wendet er sich gegen die Bestrebungen, den mathematischen Unterricht an den Gymnasien über das im Reglement für die Maturitätsprüfung von 1834 festgesetzte Lehrziel auszudehnen, lehnt z. B. die Hineinziehung der sphärischen Trigonometrie und der Lehre von den Kegelschnitten in den Unterricht ab und dringt mit aller Entschiedenheit auf ein gründliches Erlernen der Elementar-Mathematik. Ebenso energisch tritt er aber auch in andern Verfügungen (7. April 1841, 1. Dezember 1854)[76]) für die Erreichung des einmal vorgeschriebenen Lehrzieles ein, verbietet z. B. das Zeugnis der Reife einem Zögling zu geben, der in der Mathematik sich nicht die gewöhnlichsten Elementarkenntnisse angeeignet hat. So will er, trotz seiner grossen Vorliebe für die alten Sprachen, der Mathematik doch die Stellung gewahrt wissen, welche ihr schon das Edikt von 1812 zugewiesen hatte. An der mit diesem Edikt staatlich anerkannten Gleichberechtigung mit den altsprachlichen Lehrfächern rüttelt Schulze nicht.

Verfolgen wir den Betrieb der Mathematik an den Gymnasien bis in die neuste Zeit hinein, so bemerken wir in den späteren Lehrplänen von 1856, 1882, 1892 keine tief eingreifenden Änderungen mehr. Zwar wird 1856 die wöchentliche Stundenzahl um 1 vermindert — die V verliert eine Stunde — doch hat dies auf den Betrieb der Mathematik keinen Einfluss[77]). Dasselbe Jahr bringt dagegen der Maturitäts-Prüfungsordnung den wichtigen Zusatz, nach welchem gute Leistungen in der Mathematik schwächere in den alten Sprachen kompensieren können[78]). Dies ist der letzte Schritt zur völligen amtlichen Gleichstellung der Mathematik mit Latein und Griechisch. Freilich dauert es noch mehrere Jahrzehnte, bis die im Prinzip von der obersten Schulbehörde anerkannte Gleichberechtigung der Mathematik mit den Sprachen von den vorwiegend humanistischen Direktoren gebührend geachtet wird. Die geringschätzigen Urteile der Philologen über den Wert einer mathematischen Ausbildung des Geistes beginnen erst am Schluss des Jahrhunderts zu verstummen[79]).

Die Revision der Lehrpläne im Jahre 1882[80]) erhöht die wöchentliche Stundenzahl in der Mathematik auf 34 Stunden: das Mehr von zwei Stunden soll einer propädeutischen Geometrie in der V und einer Vertiefung des mathematischen Unterrichts in der IV zu gute kommen. Im übrigen ist das gesamte Lehrziel des Gymnasiums unverändert geblieben, da „die wirkliche Aneignung des mathematischen Wissens und Könnens in dem Umfange, welcher als Lehraufgabe des Gymnasiums bezeichnet ist, nach den Erklärungen competenter Fachmänner des technischen Gebietes auch zum Eintritt in die technischen Hochschulen ausreicht". Dem Streben der Fachlehrer, über den vorgeschriebenen Umfang hinauszugehen, finden wir das Zugeständnis gemacht, „unter geeigneten Umständen" etwas von der sphärischen Trigonometrie, die analytische Behandlung der Elemente der Lehre von den Kegelschnitten, sogar den Begriff der Differentialquotienten zu bringen. Was hier gestattet wird, tritt dann in den neusten Lehrplänen teilweise als vorgeschriebene Aufgabe auf. Das allgemeine Lehrziel der Gymnasien wird um den „Koordinatenbegriff" und „einige Grundlehren von den Kegelschnitten" vermehrt. Sonst weist der Lehrstoff denselben Bestand auf, nur dass seine Verteilung sich etwas verschiebt, um „den aus der Untersekunda abgehenden Schülern eine wenigstens einigermassen abgeschlossene Vorbildung zu verschaffen". Im übrigen behält der Lehrplan von 1892 dieselbe Stundenzahl — wöchentlich 34 — bei,

sodass während der, man möchte beinahe sagen zersetzenden Einwirkung, welche der Übergang von dem historischen in das naturwissenschaftliche Zeitalter, notwendigerweise auf die ursprüngliche Lehrverfassung der Gymnasien ausüben musste, die Mathematik unangefochten ihre Stellung behauptet hat; während die alten Sprachen 1882 11, 1892 sogar 19, im Ganzen also 30 wöchentliche Lehrstunden, d. h. fast ein Viertel ihrer ursprünglichen Zahl — 128 — eingebüsst haben, steht die Mathematik in dem ganzen Jahrhundert als die feste, unwandelbare Säule der gymnasialen Bildung da. Ja es steht zu vermuten, dass eine künftige Neuordnung des gymnasialen Unterrichts noch eine Verstärkung der Mathematik bringen wird; wie der mathematische Unterricht augenblicklich abschliesst, trägt er noch zu sehr den Charakter des Unfertigen, gleicht er einem Turme, dessen Spitze unvollendet geblieben ist und nur einen notdürftigen, der harmonischen Schönheit des Bauwerks unwürdigen Abschluss erhalten hat.

Von 1812 bis 1859 blieben die Gymnasien die einzige Art der höheren Schulen, deren Ziel keine Berufsbildung, sondern allgemeine Menschenbildung war. Der grosse Aufschwung, welchen die Naturwissenschaften und damit auch die technischen Wissenschaften nahmen, verlieh dem wissenschaftlichen Leben allmählich ein anderes Gepräge und verschaffte den Realschulen die staatliche Anerkennung als eines neuen Zweiges des höheren Unterrichtswesens. Für ihre Gestaltung wurde L. Wiese (geb. 1806) [81]) massgebend, der 1852 als vortragender Rat in das Kultusministerium eintrat, schon 1856 die Revision der gymnasialen Lehrpläne bearbeitet hatte und durch seine Ausbildung unter Spilleke (1778—1841) [82]) mit dem Realschulwesen vertraut geworden war. Die Unterrichts- und Prüfungsordnung vom 6. Oktober 1859[83]), nach welcher Realschulen — 1. Ordn. u. 2. Ordn. — und höhere Bürgerschulen unterschieden wurden. Das Lehrziel der Realschulen 1. Ordnung — mit neunjährigem Kursus — ist hier, wie folgt, festgestellt: „Kenntnis der Beweisführungen sowie der Auflösungsmethoden einfacher Aufgaben aus der Algebra, die Lehre von den Potenzen, Proportionen, Gleichungen, Progressionen, der binomische Lehrsatz und die einfachen Reihen, die Logarithmen, die ebene Trigonometrie, die Stereometrie, die Elemente der beschreibenden Geometrie, analytische Geometrie, Kegelschnitte; angewandte Mathematik: Statik, Mechanik". In der Prüfungsordnung wird von dem Abiturienten der Nachweis verlangt, dass er sichere, geordnete und wissenschaftlich begründete Kenntnisse in den oben aufgeführten Disziplinen besitzt, und dass ihm auch die elementaren Teile der Wissenschaft noch wohlbekannt sind. Ebenso muss Fertigkeit in allen im praktischen Leben vorkommenden Rechnungsarten, im Rechnen mit allgemeinen Grössen und im Gebrauch der mathematischen Tafeln vorhanden sein. Auf strenge Beweisführung und auf Fertigkeit in der Lösung der Aufgaben ist bei der Abiturientenprüfung besonderer Wert zu legen. In der schriftlichen Prüfung wird die Lösung von 4 Aufgaben verlangt: a) aus dem Gebiete der Gleichungen 2. Grades, b) aus dem Gebiete der Planimetrie oder der analytischen Geometrie, c) aus der ebenen Trigonometrie, d) aus der Stereometrie oder den Kegelschnitten; ausserdem noch die Lösung einer Aufgabe aus der angewandten Mathematik (Statik oder Mechanik). Zur Erreichung dieses Zieles erhält die Realschule 1. Ordn. 47 Stunden wöchentlich: VI 5, V 4, IV 6, IIIB u. A 6, IIB u. A 5, I B u. A 5. Hinsichtlich einer grösseren Ausdehnung des mathematischen Unterrichts wird die Erlaubnis gewährt, befähigte Schüler auch in die höhere Analysis, die Differential- und Integralrechnung und die sphärische Astronomie einzuführen.

Das mathematische Lehrziel der höheren Bürgerschulen — mit 6jährigem Kursus — lautet: Fertigkeit in den vier Grundrechnungsarten, sowohl in ganzen Zahlen, wie in gewöhnlichen und in Dezimalbrüchen; Fähigkeit, Aufgaben aus der Gesellschafts-, Mischungs-, Münz- und Wechselrechnung mit Sicherheit des Verfahrens zu lösen; eine gründliche Kenntnis der ebenen und körperlichen Geometrie, der ebenen Trigonometrie, der Gleichungen des 1. und 2. Grades, der Potenzlehre, Theorie und Anwendung der Logarithmen und der Progressionslehre. Die schriftliche Prüfung verlangt: Lösung einer geometrischen, einer trigonometrischen, einer algebraischen und einer Rechenaufgabe.

Die Neuordnungen des höheren Schulwesens im Jahre 1882 und 1892 „lassen den Umfang des mathematischen Unterrichts auf den realen Anstalten nach Stundenzahl und

Lehraufgabe im wesentlichen ungeändert". Die 1882 zu Realgymnasien werdenden Realschulen 1. Ordn büssen 3 Stunden wöchentlich ein, die IV und die beiden III verlieren je eine Stunde. Dem mehr gymnasialen Charakter dieser Schulen entsprechend wird das praktische Rechnen sehr eingeschränkt; die schwierigeren Aufgaben aus dem kaufmännischen Leben werden gänzlich ausgeschlossen, und der Rechenunterricht, der nach der Verfügung von 59 noch bis Prima dauern sollte, erhält schon in IIIB seinen Abschluss. Eine Rechenstunde der V soll zu einem propädeutischen Kursus in der Geometrie verwendet werden. Differentialrechnung und analytische Geometrie des Raumes dürfen nicht mehr getrieben werden. Diese werden nur auf den Oberrealschulen, einer neuen, aus den früheren Gewerbeschulen hervorgegangenen Schulgattung mit 9jährigem Kursus, gestattet, doch nicht vorgeschrieben. Die Integralrechnung darf auch bei diesen nicht mehr in den Unterricht hineingezogen werden. Der amtliche Lehrplan der Oberrealschulen zeigt 49 Mathematikstunden wöchentlich: VI 5, V bis IIIA 6, IIB bis IA 5.

In beiden realen Vollanstalten werden die Grundlehren der synthetischen Geometrie und die Elemente der sphärischen Trigonometrie obligatorische Lehrgegenstände. Der Lehrplan von 1892 nimmt beiden 2 Stunden: am Realgymnasium verlieren VI und IV, an der Oberrealschule V und IIIA je eine Stunde. Der Lehrstoff bleibt derselbe, nur dass hier speziell eine elementare synthetische Behandlung der Kegelschnitte für IB und die elementare Theorie der Maxima und Minima für IA als obligatorisch erwähnt werden.

Hiermit sind die Grenzen gekennzeichnet, welche in Preussen die staatlichen Verfügungen dem mathematischen Unterricht auf den höheren Schulen gesteckt haben. Das bis über die Mitte des Jahrhunderts hinaus deutlich bemerkbare Streben der Fachlehrer, ihn über die Elementarmathematik zu erweitern, wird allmählich zurückgedämmt, und jetzt, an der Wende des Jahrhunderts, sind solche Wünsche gänzlich verstummt. Allgemein ist man zu der Ansicht gelangt, dass zur Erreichung des Bildung-zieles einer höheren Lehranstalt der gründliche Betrieb der Elementar-Mathematik vollauf genügt Wenn auch die Verfügungen immer ausführlicher werden, wenn auch ihre Bestimmungen immer mehr ins Einzelne gehen, der neuste Lehrplan das Pensum jeder Klasse genau vorschreibt, sodass die Lehrfreiheit dadurch sehr eingeschränkt wird, so bleibt dem Lehrer in den obersten Klassen doch noch ein gewisser Spielraum für wahlfreie Lehrstoffe.

Dem Vorgange Preussens folgten allmählich alle andern deutschen Staaten und gaben dem höheren Schulwesen durch Erlasse, die sich auf die allgemeine Unterrichtsordnung, die Maturitätsprüfung und die Prüfung für das höhere Lehramt beziehen, feste Normen. In Sachsen[84]) wird die Abgangsprüfung 1829, die Lehrerprüfung 1843, ein allgemeiner Lehrplan 1846 eingeführt; dieser unterscheidet 6 Klassen mit $1^1/_2$ jährigem Kursus und giebt der Mathematik 33 Stunden wöchentlich. In Bayern[85]) wurde 1829 durch Thiersch (1784—1860) ein neuer Lehrplan eingeführt, das Lehrziel durch das Absolutorialexamen festgelegt und die Anforderungen an die Lehrer durch eine Prüfungsordnung bestimmt. Lateinschulen mit sechsjährigem Kursus, Gymnasien mit 4 jährigem Kursus bilden zusammen die Vollanstalten, die 28 Stunden wöchentlich Mathematik erhalten, in denen die elementare Arithmetik bis zum Gebrauche der Logarithmen, die elementare Geometrie und Stereometrie gelehrt wird. Das höhere Schulwesen in Württemberg[86]) wurde am wenigsten durch das Vorgehen der übrigen Staaten beeinflusst, dagegen ordnete Baden[87]) durch die Einführung der Maturitätsprüfung 1823 und durch die Reformierung von 1836 und 37 den Unterricht seiner höheren Schulen fast ganz nach preussischem Muster. Dass überall die Mathematik schliesslich als gleichberechtigtes Fach neben den Sprachen anerkannt wird, beweist die Dresdener Konvention von 1874, welche das Prinzip der Kompensation der Mathematik gegen jede alte oder neuere Sprache für alle Staaten des Deutschen Reiches ausspricht und verbindlich macht. Das Jahr 1891 bringt für alle vier Königreiche eine Neuordnung des Unterrichts, nach welcher die Mathematik in dem Lehrplan der höheren Schulen folgende Stundenzahl erhält[88]):

I. Gymnasien: Preussen 34, Bayern 33 (mit Physik zusammen), Sachsen und Württemberg 33. II. Realgymnasien: Preussen 42, Bayern 38, Sachsen 44, Württemberg 59. III. Oberrealschulen: Preussen 47, Württemberg 83. Zu bemerken ist, dass in Württemberg der Kursus 10jährig ist, doch die angegebene Stundenzahl sich auf die Klassen II—X

bezieht. IV. Realschulen: Preussen 32, Sachsen 35, Bayern 31. Die Realschulen in Württemberg lassen sich nicht zu einem Vergleich heranziehen, da die Lehrpläne der niederen Realschulen Verschiedenheiten aufweisen. Ausserdem giebt es hier noch Realschulen mit 8jährigem Kursus, deren Lehrpläne denjenigen der 8 ersten Klassen der Oberrealschulen entsprechen.

So besteht jetzt im ganzen Deutschen Reich eine ziemliche Übereinstimmung in den Lehrzielen und dem Umfang des mathematischen Unterrichts. Die staatlichen Bestimmungen begnügen sich aber nicht damit, den zeitlichen und stofflichen Rahmen möglichst einheitlich zu machen, innerhalb dessen der eigentliche Unterricht sich vollzieht, sie fassen auch die lebendige Gestaltung dieses Unterrichts ins Auge. Da diese in erster Linie von der Persönlichkeit und Vortragsweise des Lehrers abhängt, letztere aber von seiner wissenschaftlichen und pädagogischen Ausbildung bedingt wird, so wird auch der Bildungsgang des künftigen Lehrers der Mathematik in feste Bahnen zu lenken gesucht. Die wissenschaftliche Ausbildung wird durch die Prüfungsordnungen für die Kandidaten des höheren Schulamts geregelt; die schon erwähnten Reglements von 1810 und 1831 finden ihre Fortsetzung in den Prüfungsordnungen vom 12. Dezbr. 1866[89]), 5. Febr. 1887[90]) und 12. Septbr. 1898[91]). Während 1866 noch ein ausgebildeter Mathematiker für den Unterricht in den oberen Klassen gefordert wurde, wird diese Forderung 1887 dahin ermässigt, dass „der Kandidat in die höhere Mathematik so weit eingedrungen sein soll, um nicht zu schwierige Aufgaben aus diesem Gebiete selbständig zu behandeln". Die neuste Prüfung schafft im Interesse des mathematischen Unterrichts an den Oberrealschulen und gewerblichen Lehranstalten das neue Lehrfach der „angewandten Mathematik", für das neben „einer Lehrbefähigung in der reinen Mathematik die Kenntnis der darstellenden Geometrie bis zur Centralprojektion, verbunden mit der nötigen Fertigkeit im Zeichnen, ferner der mathematischen Methoden der technischen Mechbnik, insbesondere der graphischen Statik, endlich niedere und die Elemente der höheren Geodäsie nebst Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler" vorgeschrieben wird.

Für die pädagogische Ausbildung der Lehramtskandidaten waren im Anfang des Jahrhunderts noch keine Bestimmungen getroffen. Jeder hatte seine Lehrbefähigung durch Ablegen einer Probelektion zu erweisen, doch da diese nicht ausreichte, um seine Befähigung zum Lehramt genügend kennen zu lernen, so wurde 1826 die Einrichtung des Probejahrs getroffen[92]). Unter Anleitung des mathematischen Fachlehrers einer Anstalt bildete sich der künftige Lehrer der Mathematik, erst hospitierend, dann selbst unterrichtend heran. Diese Einrichtung wurde bis 1890 als genügend für die pädagogische Vorbereitung der Kandidaten befunden; dann trat noch das Seminarjahr vor das Probejahr, womit die bisher gegenüber der wissenschaftlichen Ausbildung vernachlässigte praktische Vorbereitung zur Lehrthätigkeit ihre gebührende Berücksichtigung erfuhr. Für die Ausbildung der mathematischen Lehrer wurde im Jahre 1855 noch eine besondere Einrichtung geschaffen, die segensreiche Früchte getragen hat: Das unter der Leitung des Professors Schellbach (1804—1892) stehende „mathematisch-pädagogische Seminar", dessen Ziel war, dass die „Kandidaten den Zusammenhang aller Teile des mathematisch-physikalischen Unterrichts, seinen Organismus und seine Bedeutung für die Bildung der Jugend, wie auch die wichtigsten Erscheinungen der Litteratur sich zum klaren Verständnis bringen"[93]). Durch dieses Seminar, das zugleich mit der Wirksamkeit Schellbachs[94]) zu existieren aufhörte, wurde die mathematische Lehrgabe eines der ausgezeichnetsten Lehrer aller Zeiten für weitere Kreise nutzbar zu machen gesucht, und bis in die neuste Zeit hinein reicht der von ihm ausgehende befruchtende Strom. Etwa hundert Lehrer der Mathematik, von denen nicht wenige jetzt die ersten Lehrstühle dieser Wissenschaft an deutschen Universitäten zieren[95]), wurden persönliche Zeugen seiner frommen Begeisterung für dies Lehrfach und der wunderbaren pädagogischen Meisterschaft, mit der er es handhabte; sie wurden die lebendigen Träger der Ideen über die Bedeutung und Aufgabe des mathematischen Unterrichts, die er in seiner bekannten Programmschrift vom Jahre 1866[96]) und seinem Vortrage „Über die Zukunft der Mathematik an unsern Gymnasien" (1887) ausgesprochen hat, und verbreiteten so die von ihm ausgestreuten Keime, die in der Verbesserung der Methode des mathematischen Unterrichts aufzugehen und reiche Frucht zu tragen anfangen. Schon wenige Jahre nach Beginn des

Seminars ging aus ihm das weitverbreitete Lehrbuch von Mehler hervor: „Hauptsätze der Elementar-Mathematik". Nunmehr schon 40 Jahre im Gebrauch, gilt es gegenwärtig noch als das beste Schulbuch, jedenfalls ist seitdem noch kein anderes entstanden, das ihm an Vorzügen überlegen wäre[97]).

Was dem mathematischen Unterricht der Gegenwart seinen besonderen Vorzug verleiht, ist die Entwickelung seiner Methode, die gerade in den letzten Dezennien die bedeutendsten Fortschritte aufweist. Dies hängt in erster Linie damit zusammen, dass der Betrieb der Mathematik auf den Universitäten ungefähr seit der Mitte des Jahrhunderts in den Händen der wirklichen Koryphäen dieser Wissenschaft ruht, was in den ersten Jahrzehnten noch so wenig der Fall war, dass z. B. Dirichlet noch nach Paris ging, um dort Mathematik zu studieren. Die Rückwirkung des wissenschaftlichen Betriebes an den Universitäten auf den Lehrbetrieb an den höheren Schulen durchzieht ja die ganze Entwickelungsgeschichte des höheren Schulwesens. Hervorgehoben muss werden, dass die freigebige Gehaltsausstattung der Lehrstühle der Mathematik ebensosehr auf die Hebung ihres Universitätsbetriebes eingewirkt hat, wie die bessere Normierung der Lehrergehälter auf die Hebung des Schulwesens. Die Abhängigkeit der gesunden, gedeihlichen Entwickelung des wissenschaftlichen Lebens von ökonomischen Fragen tritt auch hierin wieder klar zu Tage.

Wenn auch der wissenschaftliche, auf die Pflege der höheren Disziplinen beschränkte Betrieb der Mathematik auf den Universitäten bisher auf die Bedürfnisse der Schule wenig Rücksicht nimmt, so lässt sich doch nicht verkennen, dass die Klärung, welche die Vorlesungen Weierstrass' über die elementar-arithmetischen Begriffe gebracht haben, der natürliche, organische Aufbau der geometrischen Wahrheiten durch Steiner, die Untersuchungen über die Grundlagen unserer Raumvorstellungen, sowie vor allen Dingen die mehr genetische, entwickelnde Vortragsweise der Professoren, die, statt einer möglichst eleganten Darbietung des vollendeten Denkergebnisses, mehr einen Einblick in den Denkprozess geben will, der zu diesem Ereignis führte, von der grössten Bedeutung für die Behandlung der Mathematik auf den Schulen geworden sind. Dazu kommt noch ein zweites, nicht minder wichtiges Moment: der Einfluss der Pädagogik Herbarts. Er war der erste, der die Behauptung aussprach, dass die Anlage zur Mathematik in jedem Geiste vorhanden sei, dass der eingebildete Mangel einer solchen — das Fehlen „des mathematischen Rades"[98]), wie sich ein Fachlehrer um 1870 ausdrückte — nur von verspäteten und vernachlässigten Anfängen herrührt[99]). Sein nach Pestalozzis Ideen entworfenes ABC der Anschauung (1802)[100]) enthält für den Anfangsunterricht äusserst fruchtbare Gedanken. Schellbachs ganze Schulthätigkeit ist ein lebendiger Beweis für die Richtigkeit des von Herbart geäusserten Prinzips, und wie er, so haben alle seine Schüler dazu mitgewirkt, die mangelnde mathematische Begabung zu einem Märchen zu machen, das heutzutage nur noch hier und da von Schulmännern geglaubt wird. Die Behauptung, dass viele Schüler überhaupt keine Befähigung zur Mathematik hätten, verdankt ihre Entstehung der Zeit, wo die Mathematik auf den Schulen in wenig ansprechender Weise vorgetragen wurde, der ersten Hälfte des Jahrhunderts, wo die euklidische Methode unbestritten herrschte. Es muss als die grösste Errungenschaft der Arbeit auf dem Gebiete der mathematischen Methodik bezeichnet werden, dass man sich von diesem „ehernen Hemmschuh" frei gemacht hat. Vor 1850 erst vereinzelt, dann häufiger und seit den siebziger Jahren in erdrückender Fülle entstanden die Abhandlungen, die eine Verbesserung des Unterrichts in allen Zweigen der Elementarmathematik anstrebten. Sie legen Zeugnis ab, welch ernstes Streben die Lehrer der Mathematik an den höheren Schulen beseelt, welchen Eifer, welche Arbeit sie aufwenden, um die Bebauung ihres Unterrichtsfeldes so fruchtbar wie möglich zu gestalten. Im Jahre 1870 wurde ein eigenes Organ für diese Bemühungen geschaffen in Hoffmanns „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht", die sich speziell folgende Ziele steckte: Prinzipien der Organisation des mathematischen Unterrichts, Pflege und Vervollkommnung der Lehrmethode, Besprechung der Lehr- und Anschauungsmittel, Entwickelung des Bildungsgehaltes und des Bildungswertes der exakten Wissenschaften als einer Ergänzung des Bildungsgehaltes der sprachlichen Wissenschaften. Die Litteratur über den planimetrischen Unterricht hat Dr. Heinrich Schotten in seinem äusserst verdienstvollen Werke: „Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts" (I. Bd. 1890, II. Bd. 1893) zu einer vergleichenden Planimetrie

zusammengestellt; für die Arithmetik und die übrigen Disziplinen fehlt es noch an einem ähnlichen Werke.

So sind für den gegenwärtigen Betrieb des mathematischen Unterrichts folgende Gesichtspunkte massgebend geworden: Möglichst sorgfältige Behandlung des Anfangsunterrichts — völlige Einsetzung der Anschauung in ihre Rechte — Verlegung des Schwerpunktes des mathematischen Unterrichts in die Geometrie — Beginn des Unterrichts in der Geometrie vor dem in der allgemeinen Arithmetik — Vermeidung von Definitionen, wo die Anschauung ausreicht, speziell bei den Grenzbegriffen der Geometrie — Einschränkung der Beweise auf die unumgänglich notwendigen — schrittweise Entwicklung der Gedanken, die zur Aufstellung eines Lehrsatzes geführt haben — Anleitung der Schüler zur selbstthätigen Auffindung von Lehrsätzen: mit andern Worten: kein dozierendes, sondern heuristisches Lehrverfahren — Ziel und Zweck der mathematischen Ausbildung ist die Aufgabe — Beseitigung des „Zufalls" oder „der Kniffe" in der Lösung von Aufgaben durch Aufstellung möglichst allgemeiner Lösungsmethoden für arithmetische und geometrische Aufgaben, wie sie z. B. für die letzteren Petersen in seinen „Methoden und Theorien" entwickelt. Man kann daher mit Rethwisch[101]) den Fortschritt der mathematischen Lehrmethode am Ausgange unseres Jahrhunderts kurz dahin charakterisieren: Genetische Ausbildung des Systems bei analytischer Beweisführung und heuristischem Lehrverfahren. Die Befolgung dieser Prinzipien sowie die stete Beachtung der Regel, den mathematischen Unterricht so zu gestalten, dass er in innigem, teils ergänzendem, teils förderndem Zusammenhange mit allen übrigen Lehrfächern bleibt, hat die Mathematik eine so ausgedehnte Bedeutung für die Ausbildung des jugendlichen Geistes erlangt, wie kaum ein anderes Lehrfach sie aufzuweisen hat.

Wir sind hiermit an das Ende unseres kurzen Überblicks über die Entwickelung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen angelangt. Aus unscheinbaren Anfängen heraus hat sich der mathematische Unterricht im Laufe von vier Jahrhunderten eine fast dominierende Stellung innerhalb des Lehrbetriebes der höheren Schulen errungen, sodass die Ansicht des Stuttgarter Professors Dillmann[102]) fast berechtigt erscheint, nach welcher die Mathematik dazu berufen ist, „die Fackelträgerin einer neuen Zeit" zu werden.

Verzeichnis

der häufiger benutzten Werke und der für sie in den folgenden Anmerkungen gebrauchten Abkürzungen:

B. Pr.: Beier: Die Mathematik im Unterrichte der höheren Schulen von der Reformation bis zur Mitte des achtzehnten Jahrhunderts. Programm der Realschule in Crimmitschau 1879.
Mh. L.: Murhardt: Litteratur der mathematischen Wissenschaften. 1797.
Pa. G.: Paulsen: Geschichte des gelehrten Unterrichts. 1885.
Po. B.: Poggendorff: Biographisch-litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 1863.
Re. H. S.: Rethwisch: Deutschlands höheres Schulwesen. 1893.
Re. Z.: Rethwisch: Der Staatsminister Freiherr v. Zedlitz und Preussens höheres Schulwesen im Zeitalter Friedrichs des Grossen. 1881.
Sch. G.: Schulz: Geschichte der Königl. Real- und Elisabethschule zu Berlin. 1857.
Si. D.: Simon: Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. 1895. Bd. 4 Teil 9 des Handbuchs der Erziehungs- und Unterrichtslehre von Baumeister.
U. M.: Unger: Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. 1888.
Vb. S.: Vormbaum: Evangelische Schulordnungen. 3 Bände. 1860—1864.
Wiese H. S.: Wiese: Das höhere Schulwesen in Preussen. 3 Bände. 1864, 69, 73.
Wiese K.: Wiese-Kübler: Verordnungen und Gesetze für das höhere Schulwesen in Preussen. 2 Bände. 1886, 88.

Anmerkungen.

[1]) cf. Vb. S. Bd. III. [2]) Leonhard Euler, aus Basel gebürtig, war Sohn eines Pfarrers, Schüler Johann Bernoullis, 1727—1741 Prof. d. Math. in Berlin. 1741—1766 Prof. in Berlin, 1744 Direkt. d. math. Klasse der Akad. d. Wiss., 1766—1783 in Petersburg. 1735 auf einem, 1766 auf beiden Augen erblindet, doch bis zu seinem Tode thätig. cf. Po. B. [3]) In Po. B. sind nicht weniger als 11 Bernoullis aufgezählt. Die Familie der B. stammt aus dem Niederland, von wo ein Jakob B. vor Alba nach Frankfurt a. M. flüchtete. Sein gleichnamiger Enkel zog nach Basel, wo er 1634 starb. Dessen Sohn Nikolaus B. († 1708) war Kaufmann in Basel, hatte 11 Kinder. Das fünfte und das zehnte Kind waren die beiden grossen Mathematiker Jacob B. (1654—1705) und Johann B. (1667—1748). Ersterer war Prof. der Math. in Basel, letzterer anfangs in Gröningen, nach seines Bruders Tode in Basel. Ein Neffe beider, Nikolaus (1687—1759) war ebenfalls Professor, erst in Padua, dann in Basel. Drei Söhne Johanns waren ebenfalls Prof. der Mathematik: Nikolaus (1695—1726) starb als Prof. der Math. in Petersburg. Daniel (1700—1782) folgte diesem in Petersburg, später seinem Onkel in Basel. Johann (1782—1790) war seines Bruders Nachfolger in Basel. Von diesem Johann dem jüngeren stammen wieder drei Söhne, Johann, Daniel und Jakob, von denen der erstere Direktor der mathem. Sektion der Akademie der Wissenschaften in Berlin war und 1807 in Köpenick starb. [4]) Abraham de Moivre verliess Frankreich infolge der Aufhebung des Edikts von Nantes, lebte in London. Mitgl. der Roy. Society seit 1697. Seine Arbeiten cf. Po. B. [5]) Thomas Fantet de Lagny 1697—1714 Prof. der Hydrographie in Rochefort, dann an der königl. Bibliothek in Paris, Mitgl. der dortigen Akademie der Wissenschaften. cf. Po. B. [6]) Man kennt drei Clairauts. Der Vater, Jean Baptiste, war Lehrer der Math. in Paris. Von seinen beiden Söhnen war der ältere Alexis Claude, seit seinem 18. Jahre Mitgl. d. Akad. d. Wissenschaften in Paris. Nahm auch an der französ. Gradmessung in Lappland 1736—1737 teil. Er ist der hier gemeinte. Der jüngere Bruder starb schon im 16. Lebensjahre 1732, nachdem er schon ein Jahr zuvor ein traité des quadratures circulaires et hyperboliques herausgegeben hatte. cf. Po. B. [7]) Johann Heinrich Lambert, Sohn eines Schneiders, wurde 1765 Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Berlin, starb dort 1777 als Ober-Baurat. cf. Po. B. [8]) Christian Kramp, anfangs Arzt, dann Prof. d. Chemie u. Physik an der Centralschule des Roerdepartements in Köln, zuletzt Prof. d. Math. in Strassburg. cf. Po. B. [9]) cf. die Vorreden der Lehrbücher von Sturm, Wolff und Kästner. [10]) Hankel fällt in seiner akademischen Antrittsrede „Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten“ über Kästner ein sehr hartes Urteil. Er spottet über seine Epigrammen-Dichterei, welche ihm in der Litteraturgeschichte wohl einen Namen gesichert habe. Als Mathematiker habe er nichts geleistet; seine Lehrbücher seien gehaltlos, geschmacklos, weitschweifig und unbegreiflicher Weise weit verbreitet gewesen, ja mit Kommentaren versehen worden. Er beklagt sich, dass er in so hohem Ansehen stehen, als ein Wunder der Mathematik gelten konnte, während Gauss, der wahre princeps matheseos, der damals schon seine Thätigkeit begonnen hatte, noch ohne jegliche Anerkennung war. [11]) cf. Mh. L. S. 16—30. Es gab Bücher über den Nutzen der Mathematik wie einzelner math. Disziplinen in der Theologie, Rechtsgelehrsamkeit, den Kameralwissenschaften, der Naturwissenschaft, Chemie, Arzneiwissenschaft, Philosophie, der Forst-, Bergmanns- und

Kriegswissenschaft, der Rechenkunst, dazu mathematische Erquickungen und Ergötzungen. [12]) cf. Mh. L. S. 31. [13]) Findet sich abgedruckt in U. M. S. 142 ff. [14]) Christian Freiherr von Wolff, bis 1707 in Leipzig, dann bis 1723 Professor der Math. und Physik in Halle; wurde von den Pietisten der Irreligiosität angeklagt und von Friedrich Wilhelm I aus Preussen verwiesen. 1723—1740 Prof. in Marburg, von Friedrich dem Grossen zurückgerufen, 1740—1754 wieder in Halle. Mitgl. der Akademieen in Berlin, London u. Paris. Seine math. Schriften cf. Po. B. [15]) Kästner war bis 1756 Prof. d. Math. in Leipzig, dann bis zu seinem Tode Prof. d. Math. u. Phys. in Göttingen. Seine zahlreichen Schriften cf Po. B. [16]) Der ältere Sturm ist der schon im Teil I erwähnte Johann Christoph Sturm (1635—1703), 1664 Pfarrer in Deiningen, 1669—1703 Prof. d Math. in Altdorf, Verfasser der Mathesis iuvenilis. Sein Sohn, Leonhard Christoph, ist der jüngere Sturm (1669—1719), 1694 Prof. d. Math. in Wolfenbüttel, 1702—1711 Prof. d. Math. in Frankfurt a. O., starb als Meklenburgischer Baudirektor, Verfasser des 1708 erschienenen Lehrbuchs: Kurtzer Begriff der gesamten Mathesis. [17]) cf die Vorrede zu „Wolffens Auszug aus den Anfangsgründen aller Mathematischen Wissenschaften". 1717. [18]) z. B. Benjamin Hederichs Anleitung zu den fürnehmsten math. Wissenschaften. 1710. [19]) cf. die Vorrede zu Kästners Anfangsgründen der Arithm. Geom. und Trigonom. [20]) z. B. im Jahre 1821 noch am Gymnasium in Potsdam, wo damals Jacobi sein Abiturientenexamen bestand. [21]) z. B. in Neu-Ruppin, in Breslau, wo wir schon 1780 die Bezeichnung Realgymnasium finden für das Maria-Magdalenenm. cf. Wiese H. S. 26. [22]) Diese Schrift des Tschirnhauss findet sich in der Kgl. Bibliothek in Berlin mit vielen andern math. Schriften zusammengebunden. Der Verfasser ist in ihr nirgends genannt. Über Franckes Beziehung zu Tschirnhauss und die Verfasserschaft des letzteren cf. Kramer: Franckes Pädagogische Schriften 2. Aufl. 1885 S. 228 und S. 268 die Anmerkungen. [23]) cf. Vb. III. S. 74—102 und S. 214 ff. Ebenfalls enthalten in Kramer: Franckes Pädag. Schriften. S. 205—368. [24]) cf. Vb. III. S. 1 ff und das vorhin schon zitierte Buch von Kramer. S. 107. [25]) cf. Nasemann: A. H. Francke und der Unterricht in Realgegenständen. Progr. Halle 1863. Ferner Sch. G. S. 9. [26]) Über die Bedeutung Heckers für die Umgestaltung des Lehrzieles der höheren Schulen cf. Sch. G. S. 52 ff. Nach dem Vorbilde der Heckerschen Schulen wurden noch bei seinen Lebzeiten und unter seiner Mitwirkung angelegt: 1756 eine Realschule in Wittenberg, im siebenjährigen Kriege eingegangen, als das Schulhaus durch ein Bombardement zerstört war. 1759 in Stargard, 1763 in Züllichau, 1766 wurde das Maria-Magdalena-Gymnasium nach dem Muster der Heckerschen Schule umgewandelt; erst um 1810 wieder zu einem eigentlichen Gymasium gemacht. Ausserdem wurde um dieselbe Zeit eine Realschule in Erlangen gegründet. cf. Sch. G. S. 11. [28]) cf. Sch. G. S. 38 und 39. [29]) Die Schrift Hähns findet sich in Nova acta scholastica Bd. I. [30]) cf. Sch. G. S. 53. [31]) cf. Gesner: Isagoge. § 1130: Privat se altero oculo, qui neglegit mathesin. [32]) cf. Gesner: Institutiones rei scholasticae Caput II sectio XI § 21. [33]) Vb III S. 358 ff. [34]) Vb. III S. 613 ff. [35]) cf. Si. D. S. 11. [36]) cf. Progr. d. Köllnischen Gymnasiums in Berlin vom Jahre 1802. [37]) Andreas Jakob Hecker war ein Neffe des Gründers der Realschule. Seine Schriften über Mathematik: Gedanken über die verschiedenen Unterrichtsmethoden in den mathematischen Wissenschaften auf Gelehrten-, Kunst- und Bürger-Schulen. Progr. d. Friedrich-Wilh.-Gymn. 1797. Gedanken über den Wert und Nutzen des Unterrichts in den math. Wiss. auf gelehrten Schulen. Progr. d. Friedrich-Wilh.-Gymn. 1812. [38]) cf. Flathe St. Afra. [39]) cf. Schmid und Kraft: Die Landesschule Pforta. Über Hübsch cf. Scheibel. Bd. II. Stück XII der mathem. Bücherkenntnis. S. 520. [40]) cf. Die Programme der erwähnten Anstalten aus den betreffenden Jahren. [41]) Christian August Hausen (1693—1743), Sohn eines Pfarrers in Dresden, war Prof. d. Math. in Leipzig. Johann Friedrich Polack (1700—1771) war in Frankfurt a. d. O. der Reihe nach Prof. extraord. d. Rechte, Prof. ord. d. Math., Rechte, Oekonomie- u. Kameralwiss. cf. Po. B. [42]) Eine Inhaltsangabe des Lehrbuches von Hederich findet sich ausführlich in B. Pr. Hederichs Leben ist enthalten in Nova acta scholastica Bd. I. [43]) In der Vorrede zur ersten Auflage der Anfangsgründe der angewandten Mathematik vom Jahre 1759 kündigt er eine Einleitung in die Algebra als den dritten Teil seiner Anfangsgründe an. [44]) Das Buch von Funck ist besprochen in Scheibel, Math. Bücherkenntnis I. 6. Stück S 673 ff. Das von Ebert ebenda S. 683 ff. [45]) Über Michelsens Bedeutung als Mathematiker cf. die Gedächtnisrede Fischers im Progr. des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin 1798. [46]) Über das Lehrbuch Vieths cf. Mh. L. S. [47]) cf. Michelsen in der Vorrede zu den Anfangsgründen der reinen Mathematik S. 2. [48]) Unger bezeichnet die Periode von 1700—1800: Betonung der beweisführenden Lehrart. cf. U. M. S. 137. [49]) Anton Friedr. Büsching 1724—1793 war Schüler der Lateinschule des Waisenhauses in Halle. 1755—1761 Prof. in Goettingen, 1761—65 Pfarrer in Petersburg. 1766—1793 Direktor des Grauen Klosters. Berühmt als Geograph durch seine Erdbeschreibung. [50]) cf. Prgr. des Friedr.-Wilh.-Gymn. 1821. [51]) cf. Wiese H. S I. S. 545. [52]) cf Re. Z. S. 17. ff. [53]) cf. Wolff: Consilia scholastica S. 310. Die Lehrer wurden so kärglich besoldet, dass die Theologen die erste, beste Gelegenheit benutzten, ihr Lehramt mit einer Pfarre zu vertauschen. Über die damaligen Besoldungsverhältnisse: cf, Re. Z. S. 9 u. 10. [54]) Christian Gottlob Heyne ein Schüler Ernestis, seit 1763 Prof. in Göttingen cf. Pa. G. S. 440 ff. [55]) Friedrich August Wolf, der „heros eponymos des Neuhumanismus" (Paulsen) 1777—1779 in Göttingen Philologie studierend, 1783—1807 Prof. d. Philologie in Halle, 1807—1824 in Berlin lebend. Über seine bedeutungsvolle Wirksamkeit cf. Pa. G. S. 530 ff. [56]) Über Zedlitz cf. Re. Z. [57]) Über Humboldt cf. Gebhardt: Wilhelm von Humboldt als Staatsmann I. [58]) Herders Schulschriften sind in Bd. 30 der Gesamtausgabe von Suphan enthalten. [59]) Süvern war 1796—1800 Lehrer am Köln. Gymn. zu Berlin, dann bis 1804 Gymnasialdirektor in Thorn, bis 1807 Gymnasialdirektor in Elbing, dann Prof. in Königsberg, 1808 Staatsrat in der Unterrichtsabteilung des Ministeriums des Innern. Über ihn cf. Passow: Zur Erinnerung an J. W. Süvern. Progr. Thorn 1860. Süvern starb 1829 in Charlottenburg. [60]) Humboldt war Chef der Sektion für den Kultus und den öffentlichen Unterricht vom 17. Dzb. 1808—23. Juni 1810. cf. Wiese H. S. I. S. 4. [61]) cf. Wiese. H. S. I. S. 547. [62]) cf. Wiese H. S. I. S. 484 ff. [63]) Lorinser war Medizinalrat in Oppeln. [64]) cf. Si. D S. 11. [65]) cf. Wiese H. S. S. 22. [66]) z. B. Friedrich-Wilhelms-Gymnasium u. Joachimsthal. [67]) cf. Wiese: Lebenserinnerungen, S. 21, auch Re. H. S. S. 58. [68]) Gottfried Hermann (1772—1848) seit 1795 Prof. in Leipzig. Über ihn cf. Pa. G. S. 638. ff. Köchlys Schilderung des Schulbetriebs in Grimma cf. Pa. G. S. 648 ff. u. Re. H. S. S. 63 ff. [69]) cf. Prgr. des Victoria-Gymn. in Potsdam 1891. [70]) cf. Wiese H. S. I. S. 548 ff. [71]) cf. Wiese H. S. I. S. 492 ff [72]) cf. Wiese H. S. I.

der häufiger benutzten Werke u[nd] [...] gebrauchten Abkürzungen:

B. Pr.: Beier: Die Mathematik i[n] [...] Reformation bis zur Mitte des achtzehnten Jahrhunderts. [...] 1879.
Mh. L.: Murhardt: Litteratur der [...]
Pa. G.: Paulsen: Geschichte des [...]
Po. B.: Poggendorff: Biographisch-li[t.] [...] er exakten Wissenschaften. 1863.
Re. H. S.: Rethwisch: Deutschlan[d] [...]
Re. Z.: Rethwisch: Der Staatsmin[ister] [...] heres Schulwesen im Zeitalter Friedrichs des Grossen. [...]
Sch. G.: Schulz: Geschichte der K[unst] [...] 1857.
Si. D.: Simon: Didaktik und Meth[odik] [...] 1895. Bd. 4 Teil 9 des Handbuchs der Erziehungs- un[d]
U. M.: Unger: Die Methodik der [...] ntwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die G[egenwart]
Vb. S.: Vormbaum: Evangelische [...]
Wiese H. S.: Wiese: Das höhere [...] 9, 73.
Wiese K.: Wiese-Kübler: Verordn[ungen] [...] n in Preussen. 2 Bände. 1886, 88.

[1]) cf. Vb. S. Bd. III. [...] ar Sohn eines Pfarrers, Schüler Johann Bernoullis, 1727—1741 Pr[of.] [...] Berlin, 1744 Direkt. d. math. Klasse der Akad. d. Wiss., 1766—1[787] [...] uf beiden Augen erblindet, doch bis zu seinem Tode thätig. cf. P[o. B.] [...] 11 Bernoullis aufgezählt. Die Familie der B. stammt aus dem [...] nach Frankfurt a. M. flüchtete. Sein gleichnamiger Enkel zog nach [...] olaus B. († 1708) war Kaufmann in Basel, hatte 11 Kinder. Das fü[nfte] [...] grossen Mathematiker Jacob B. (1654—1705) und Johann B. (1667 [...] Basel, letzterer anfangs in Gröningen, nach seines Bruders Tode i[n] [...] —1759) war ebenfalls Professor, erst in Padua, dann in Basel. Drei [...] thematik: Nikolaus (1695—1726) starb als Prof. der Math. in Peters[burg] [...] Petersburg, später seinem Onkel in Basel. Johann (1782—1790) war [...] diesem Johann dem jüngeren stammen wieder drei Söhne, Johan[n] [...] Direktor der mathem. Sektion der Akademie der Wissenschaften i[n] [...] [4]) Abraham de Moivre verliess Frankreich infolge der Aufhebung d[es] [...] gl. der Roy. Society seit 1697. Seine Arbeiten cf. Po. B. [5]) Thom[as] [...] ydrographie in Rochefort, dann an der königl. Bibliothek in Pari[s] [...] nschaften. cf. Po. B. [6]) Man kennt drei Clairauts. Der Vater, J[ean] [...] Von seinen beiden Söhnen war der ältere Alexis Claude, seit seine[r] [...] n in Paris. Nahm auch an der französ. Gradmessung in Lappland [...] e. Der jüngere Bruder starb schon im 16. Lebensjahre 1732, n[ach] [...] é des quadratures circulaires et hyperboliques herausgegeben hatte. [...] hn eines Schneiders, wurde 1765 Mitglied der Akademie der Wissensch[aften] [...] t. cf. Po. B. [8]) Christian Kramp, anfangs Arzt, dann Prof. d. Che[mie] [...] rdepartememts in Köln, zuletzt Prof. d. Math. in Strassburg. cf. P[o. B.] [...] von Sturm, Wolff und Kästner. [10]) Hankel fällt in seiner akademis[chen] [...] athematik in den letzten Jahrhunderten" über Kästner ein sehr h[arten] [...] mmen-Dichterei, welche ihm in der Litteraturgeschichte wohl einen [...] habe er nichts geleistet; seine Lehrbücher seien gehaltlos, geschm[acklos] [...] ise weit verbreitet gewesen, ja mit Kommentaren versehen worden. [...] ehen stehen, als ein Wunder der Mathematik gelten konnte, während Gauss, der wahre princeps matheseos, der damals schon seine Thätigkeit begonnen hatte, noch ohne jegliche Anerkennung war. [11]) cf. Mh. L. S. 16—30. Es gab Bücher über den Nutzen der Mathematik wie einzelner math. Disziplinen in der Theologie, Rechtsgelehrsamkeit, den Kameralwissenschaften, der Naturwissenschaft, Chemie, Arzneiwissenschaft, Philosophie, der Forst-, Bergmanns- und

S. 23 u. 624. [73]) Johannes Schulze, Schüler von Kloster Berge, studierte in Halle unter Wolf und Schleiermacher Philologie und Theologie, wurde 1808 Prof. am Gymn. in Weimar, 1812 in Hanau, 1817 Konsistorialrat in Koblenz, 1818 vortragender Rat im preussischen Kultusministerium. 1859 trat er in den Ruhestand. [74]) cf. Si. D. S. 11. [75]) cf. Wiese K. I S. 206 u. 207. [76]) cf. Wiese K. I. S. 207, 208. [77]) cf. Wiese K. I. S. 66 ff. [78]) cf. Wiese H. S. I. S. 500. [79]) cf. Hoffmann: Zeitschr. für math. und naturwiss. Unterricht I. S. 2. [80]) cf. Wiese K. I. S. 110 ff. [81]) Über Wiese cf. sein eigenes Buch: „Lebenserinnerungen und Amtserfahrungen". Er war Dezernent für das höhere Schulwesen bis 1875. Sein Vorgänger war Kortüm. [82]) Spilleke war unter Gedike gebildet, 1821—1841 Direktor des Friedrich-Wilhelm-Gymnasiums u. d. Realschule. Über ihn cf. die Biographie seines Schwiegersohnes, des obgenannten L. Wiese. [83]) cf. Wiese K. I. S. 70 ff. [84]) cf. Pa. G. S. 649, 650. Eine Zusammenstellung der Stundenzahl, die in Sachsen, Bayern und Württemberg auf den höheren Schulen der Mathematik geweiht wird, ist in Hoffmanns Zeitschrift, Bd. I S. 8 zu finden. [85]) cf. Pa. G. S. 657 ff. [86]) cf. Pa. G. S. 664 ff. [87]) cf. Pa. G. S. 670. [88]) cf. Re. H. S. S. 129. [89]) cf. Wiese-K. Aufl. 1875. II. S. 65 ff. [90]) cf. Wiese K. II. S. 33. [91]) Ordnung der Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen in Preussen. Berlin, Verl. v. Wilh. Herz. [92]) cf. Wiese, H. S. I. S. 553. [93]) cf. Wiese K. II. S. 20. [94]) Karl Heinrich Schellbach studierte in Halle 1824—1829, promovierte 1834 in Jena, 1841—1889 Lehrer am Friedrich-Wilhelms-Gymn. in Berlin. Über sein Leben, sein Wirken und seine Schriften cf. Felix Müller: Karl Heinrich Schellbach (Gedächtnisrede). [95]) cf. Felix Müller, Chronik des von Schellbach geleiteten math. pädag. Seminars (1880 Prof. an Universitäten wurden z. B. Clebsch † 1872, Naumann, Fuchs, Königsberger, Schwarz, Cantor, Netto. [96]) „Über den Inhalt und die Bedeutung des mathematischen und physikalischen Unterrichts auf unsern Gymnasien." [97]) cf Si. D. S. 125. [98]) cf. Felix Müller: Gedächtnisrede auf Schellbach. [99]) Schotten: „Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts" hat Bd I, S. 70—73 die wichtigsten Aussprüche Herbarts über die Mathematik zusammengestellt. [100]) cf. Gesamtausgabe von Herbarts Schriften von Kehrbach. Bd. I [101]) cf. Re. H. S. S. 176. [102]) cf. die Schrift Dillmanns: „Die Mathematik die Fackelträgerin einer neuen Zeit."