

Jahresbericht

über das

Herzogliche Gymnasium

zu

Blankenburg am Harz

Ostern 1905 bis Ostern 1906.

Inhalt:

1. Über unendliche Potenzreihen, deren Koeffizienten nach arithmetischen Reihen höherer Ordnung fortschreiten. Vom Oberlehrer Wilhelm Demuth.
2. Schulnachrichten. Vom Direktor.

1906.

Otto Kircher, Herzogl. Hof-Buchdrucker, Blankenburg a. H.

1906. Progr. No. 857.



860
7

857



Über unendliche Potenzreihen, deren Koeffizienten nach arithmetischen Reihen höherer Ordnung fortschreiten.

Die unendlichen Potenzreihen, deren Koeffizienten nach arithmetischen Reihen höherer Ordnung fortschreiten, finden in der Elementarmathematik wenig Berücksichtigung. Sie greifen in die verschiedensten Gebiete hinüber und können in gewisser Weise als Vorbereitung für die Exponentialreihe, die logarithmische Reihe und die Reihen für die trigonometrischen Funktionen dienen.

Auf die Differentialrechnung und die Determinanten, deren Anwendung an einigen Stellen eine wesentliche Vereinfachung gestatten würde, muß verzichtet werden, da nur die Kenntnis der Elementarmathematik vorausgesetzt werden soll, etwa in dem Umfange, wie sie das Gymnasium bietet, so daß der Gegenstand auch in der Prima durchgenommen werden kann. Es ist deshalb die Darstellung besonders im Anfange ausführlicher, vom Besonderen zum Allgemeinen fortschreitend.

Der Gang der Entwicklungen ist ohne weiteres gegeben. Es werden zunächst diejenigen unendlichen Reihen besonders untersucht, deren Koeffizienten durch dieselben Potenzen der natürlichen Zahlen und durch figurierte Zahlen derselben Ordnung gebildet werden, und mit Hilfe dieser werden dann die unendlichen arithmetisch-geometrischen Reihen zu geschlossenen Ausdrücken zusammengefasst.

§ 1.

Unter der Voraussetzung $|x| < 1$ ist bekanntlich die unendliche Summe

$$x + x^2 + x^3 + \dots \text{ in inf. oder } \sum x^n, n = 1 \dots \infty, \text{ gleich } \frac{x}{1-x}.$$

Diese Reihe möge mit S_0 bezeichnet werden, und entsprechend sei

$$S_1 = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots \text{ in inf. } = \sum nx^n,$$

$$S_2 = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \dots + n^2x^n + \dots \text{ in inf. } = \sum n^2x^n,$$

$$S_k = x + 2^kx^2 + 3^kx^3 + \dots + n^kx^n + \dots \text{ in inf. } = \sum n^kx^n,$$

wo $n = 1 \dots \infty$ und $|x| < 1$. Multipliziert man S_1 mit x und subtrahiert den so gefundenen Wert $S_1 x$ von S_1 , so folgt, da $\lim. n^kx^n = 0$ für $n = \infty, x < 1$,

$$S_1 - S_1 x = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \text{ in inf., oder}$$

$$S_1 (1-x) = \sum x^n = \frac{x}{1-x}, \text{ d. h.}$$

$$S_1 = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Dasselbe Verfahren zur Bestimmung von S_2 angewandt, liefert

$$S_2 = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \dots + n^2x^n + \dots = \sum n^2x^n$$

$$S_2 x = x^2 + 2^2x^3 + \dots + (n-1)^2x^n + \dots = \sum (n-1)^2x^n$$

$$S_2 (1-x) = \sum n^2x^n - \sum (n-1)^2x^n = \sum (n^2 - (n-1)^2) x^n = \sum (2n-1) x^n$$

$$= 2 \sum nx^n - \sum x^n = 2 S_1 - S_0$$

$$= 2 \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} = \frac{x + x^2}{(1-x)^2}, \text{ also}$$

$$S_2 = \sum n^2x^n = \frac{x + x^2}{(1-x)^2}.$$

Ebenso erhält man mit Hilfe von

$$S_3 = x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + 4^3x^4 + \dots + n^3x^n + \dots = \sum n^3x^n \text{ und}$$

$$S_3 x = x^3 + 2^3x^4 + 3^3x^5 + \dots + (n-1)^3x^n + \dots = \sum (n-1)^3x^n$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} S_3(1-x) &= \sum n^3 x^n - \sum (n-1)^3 x^n = \sum (n^3 - (n-1)^3) x^n = \sum (3n^2 - 3n + 1) x^n \\ &= 3S_2 - 3S_1 + S_0 = 3 \frac{x+x^2}{(1-x)^3} - \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^3}, \end{aligned}$$

folglich ist

$$S_3 = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4},$$

und ferner für $S_4(1-x) = 4S_3 - 6S_2 + 4S_1 - S_0 = \frac{x+11x^2+11x^3+x^4}{(1-x)^4}$,

mithin
$$S_4 = \frac{x+11x^2+11x^3+x^4}{(1-x)^5}.$$

Weiter liefert die Entwicklung $S_5(1-x) = 5S_4 - 10S_3 + 10S_2 - 5S_1 + S_0$ den Wert

$$S_5 = \frac{x+26x^2+66x^3+26x^4+x^5}{(1-x)^6} \text{ und allgemein}$$

$$S_k(1-x) = kS_{k-1} - \binom{k}{2} S_{k-2} + \binom{k}{3} S_{k-3} \dots (-1)^{k-1} \binom{k}{k} S_0,$$

oder bei Anwendung des Summenzeichens

$$S_k = \frac{1}{1-x} \sum (-1)^{m-1} \binom{k}{m} S_{k-m}, \quad m = 1 \dots k.$$

Man ist also imstande, jedes S zu berechnen, sobald man die vorgehenden S kennt, und zwar ist S_k gleich einem Quotienten, dessen Zähler eine ganze Funktion k . Grades von x mit ganzzahligen Koeffizienten und dessen Nenner gleich $(1-x)^{k+1}$ ist.

§ 2.

Um zu entscheiden, ob unter der anfangs gemachten Voraussetzung $|x| < 1$ die unendliche Reihe $\sum n^k x^n$, $n = 1 \dots \infty$, konvergiert, wendet man das Cauchy'sche Konvergenzkriterium an, indem man den Quotienten aus dem $(n+1)$. und dem n . Gliede bestimmt und dann dessen Grenzwert für $n = \infty$ berechnet; ist dieser < 1 , so konvergiert die Reihe. Nun ist, wenn man diese Glieder mit g_{n+1} und g_n bezeichnet,

$$g_{n+1} = (n+1)^k \cdot x^{n+1} \text{ und } g_n = n^k \cdot x^n, \text{ also}$$

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{(n+1)^k x^{n+1}}{n^k x^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k x, \text{ folglich } \lim. \frac{g_{n+1}}{g_n} = \lim. \left(\frac{n+1}{n}\right)^k x.$$

Da $\lim. \left(\frac{n+1}{n}\right)^k = 1$ ist, so folgt $\lim. \left(\frac{n+1}{n}\right)^k x = x$; die Reihe konvergiert also für $|x| < 1$.

§ 3.

Bei der Zusammensetzung von S_k zu einem geschlossenen Ausdrucke waren die sämtlichen vorhergehenden S_{k-1} , $S_{k-2} \dots S_0$ erforderlich; dieses Verfahren ist ziemlich

umständlich, und es soll nun als Beispiel für eine unabhängige Berechnung zunächst S_4 entwickelt werden. Bezeichnet man die Koeffizienten im Zähler des Quotienten für S_4 mit $A_{41}, A_{42} \dots$, so gilt die Gleichung

$$x + 2^1 x^2 + 3^1 x^3 + \dots = \frac{A_{41}x + A_{42}x^2 + \dots}{(1-x)^5}, \text{ oder}$$

$$(1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5)(x + 2^1 x^2 + 3^1 x^3 + \dots) = A_{41}x + A_{42}x^2 + \dots$$

Werden die beiden Klammergrößen multipliziert, so ergeben sich, da die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x gleich sein müssen, die Werte

$$A_{41} = 1 = 1$$

$$A_{42} = 2^1 - 5 \cdot 1^4 = 11$$

$$A_{43} = 3^1 - 5 \cdot 2^1 + 10 \cdot 1^4 = 11$$

$$A_{44} = 4^1 - 5 \cdot 3^1 + 10 \cdot 2^1 - 10 \cdot 1^4 = 1,$$

in Übereinstimmung mit der früheren Entwicklung. Weiter folgt hieraus, da der Zähler des in § 1 berechneten Quotienten für S_4 eine ganze Funktion 4. Grades ist, daß die Koeffizienten von $x^5, x^6 \dots$ gleich 0 sind, d. h.

$$5^1 - 5 \cdot 4^1 + 10 \cdot 3^1 - 10 \cdot 2^1 + 5 \cdot 1^4 = 0 \text{ und}$$

$$n^4 - \binom{5}{1}(n-1)^4 + \binom{5}{2}(n-2)^4 - \binom{5}{3}(n-3)^4 + \binom{5}{4}(n-4)^4 - \binom{5}{5}(n-5)^4 = 0.$$

§ 4.

Ehe die allgemeine Entwicklung für S_k gegeben wird, mögen einige Hilfssätze abgeleitet werden. Es ist für jeden Wert von n

$$n - (n-1) = 1, \text{ also auch}$$

$$(n-1) - (n-2) = 1.$$

Multipliziert man nun die erste Gleichung mit n , die zweite mit $(n-2)$ und subtrahiert dann die zweite Gleichung von der ersten, so folgt

$$n^2 - n(n-1) - (n-1)(n-2) + (n-2)^2 = n - (n-2), \text{ also}$$

$$n^2 - 2(n-1)^2 + (n-2)^2 = 2.$$

Da diese Beziehung für alle Werte von n gilt, so ist auch

$$(n-1)^2 - 2(n-2)^2 + (n-3)^2 = 2.$$

Wird jetzt entsprechend die vorletzte Gleichung mit n , die letzte mit $(n-3)$ multipliziert, so erhält man durch Subtraktion

$$\begin{aligned} n^3 - 2n(n-1)^2 + n(n-2)^2 - (n-3)(n-1)^2 + 2(n-3)(n-2)^2 - (n-3)^3 \\ = 2n - 2(n-3) \text{ oder} \end{aligned}$$

$$n^3 - 3(n-1)^3 + 3(n-2)^3 - (n-3)^3 = 2 \cdot 3 = 3!$$

$$\text{und ebenso } n^4 - 4(n-1)^4 + 6(n-2)^4 - 4(n-3)^4 + (n-4)^4 = 4!$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt die Beziehung

$$n^k - \binom{k}{1} (n-1)^k + \binom{k}{2} (n-2)^k \dots (-1)^k \binom{k}{k} (n-k)^k = k! \text{ oder}$$

$$\sum (-1)^m \binom{k}{m} (n-m)^k = k!, \quad m = 0 \dots k,$$

deren Allgemeingültigkeit durch Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion leicht nachzuweisen ist.

Da für jeden Wert von n

$$\sum (-1)^m \binom{k}{m} (n-m)^k = k! \quad (m = 0 \dots k) \text{ ist, so ist auch}$$

$$\sum (-1)^m \binom{k}{m} (n-1-m)^k = k!$$

Subtrahiert man nun die zweite Gleichung von der ersten und faßt die Glieder mit gleichen Potenzen, also allgemein $(-1)^m \binom{k}{m} (n-m)^k$ und $(-1)^{m-1} \binom{k}{m-1} (n-m)^k$, zusammen, so folgt, da jetzt von $m = 0$ bis $m = k+1$ zu addieren ist,

$$\sum \left((-1)^m \binom{k}{m} (n-m)^k - (-1)^{m-1} \binom{k}{m-1} (n-m)^k \right) = 0, \text{ oder}$$

$$\sum (-1)^m \left(\binom{k}{m} + \binom{k}{m-1} \right) (n-m)^k = 0, \text{ d. h.}$$

$$\sum (-1)^m \binom{k+1}{m} (n-m)^k = 0, \quad m = 0 \dots k+1,$$

da bekanntlich $\binom{k}{m} + \binom{k}{m-1} = \binom{k+1}{m}$.

In entsprechender Weise erhält man weiter die für jeden positiven Wert von p gültige Gleichung

$$\sum (-1)^m \binom{k+p}{m} (n-m)^k = 0, \quad m = 0 \dots k+p.$$

§ 5.

Bezeichnet man die Koeffizienten im Zähler des Quotienten S_k mit $A_{k1}, A_{k2}, \dots$, d. h. schreibt man

$$S_k = x + 2^k x^2 + 3^k x^3 + \dots \text{ in inf. } = \frac{A_{k1}x + A_{k2}x^2 + \dots}{(1-x)^{k+1}},$$

so folgt

$$(x + 2^k x^2 + 3^k x^3 + \dots) (1-x)^{k+1} = A_{k1}x + A_{k2}x^2 + A_{k3}x^3 + \dots, \text{ oder}$$

$$(x + 2^k x^2 + 3^k x^3 + \dots) \left(1 - \binom{k+1}{1}x + \binom{k+1}{2}x^2 - \dots \right) = A_{k1}x + A_{k2}x^2 + A_{k3}x^3 + \dots$$

Die Koeffizienten gleicher Potenzen von x sind auf beiden Seiten gleich, also

$$A_{k1} = 1^k$$

$$A_{k2} = 2^k - \binom{k+1}{1} 1^k$$

$$A_{k3} = 3^k - \binom{k+1}{1} 2^k + \binom{k+1}{2} 1^k$$

$$A_{k4} = 4^k - \binom{k+1}{1} 3^k + \binom{k+1}{2} 2^k - \binom{k+1}{3} 1^k$$

$$\begin{aligned} A_{kl} &= 1^k - \binom{k+1}{1} (l-1)^k + \binom{k+1}{2} (l-2)^k - \dots (-1)^{l-1} \binom{k+1}{l-1} 1^k \\ &= \sum (-1)^m \binom{k+1}{m} (l-m)^k, \quad m = 0 \dots l-1. \end{aligned}$$

§ 6.

Hieraus folgt nun

1. $A_{kk} = 1$; denn für $m = 0 \dots k+1$ ist $\sum (-1)^m \binom{k+1}{m} (k-m)^k = 0$ nach § 4; trennt man in dieser Summe die beiden letzten Glieder ab, summiert also von $m = 0$ bis $m = k-1$, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum (-1)^m \binom{k+1}{m} (k-m)^k + (-1)^k \binom{k+1}{k} (k-k)^k + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k+1} (k-k-1)^k, \\ \text{oder: } 0 &= A_{kk} + 0 + (-1)^{k+1} \\ 0 &= A_{kk} - 1, \quad \text{d. h.} \\ A_{kk} &= 1. \end{aligned}$$

2. A_{kk+1}, A_{kk+2} u. s. w. $= 0$, wie unmittelbar aus der letzten Gleichung in § 4 sich ergibt.

3. $A_{kl} = A_{k, k-l+1}$, d. h. die Koeffizienten der gleichweit vom Anfang und Ende entfernt stehenden Glieder sind gleich. Zerlegt man nämlich in der aus § 4 folgenden Gleichung

$$\sum (-1)^m \binom{k+1}{m} (l-m)^k = 0, \quad m = 0 \dots k+1,$$

die Summe in die 3 Bestandteile $m = 0 \dots l-1$, $m = l$, und $m = l+1 \dots k+1$, so folgt für die angegebenen Grenzen

$$\sum (-1)^m \binom{k+1}{m} (l-m)^k + (-1)^l \binom{k+1}{l} (l-l)^k + \sum (-1)^m \binom{k+1}{m} (l-m)^k = 0.$$

Nun ist die erste Summe gleich A_{kl} , der zweite Ausdruck gleich null und die letzte Summe läßt sich nach Umstellung der Glieder und Einführung von $k+1-\mu$ für m , wodurch die Grenzen in $\mu = 0$ und $\mu = k-l+1$ übergehen, durch

$$\sum (-1)^{k+1-\mu} \binom{k+1}{k+1-\mu} (l-k-1+\mu)^k$$

ersetzen; ferner ist $\binom{k+1}{k+1-\mu} = \binom{k+1}{\mu}$, $(l-k-1+\mu)^k = (k-l+1-\mu)^k (-1)^k$ und

$(-1)^{-\mu} = (-1)^{\mu}$, folglich ist

$$A_{kl} + (-1)^{2k+1} \sum (-1)^{\mu} \binom{k+1}{\mu} (k-l+1-\mu)^k = 0, \text{ also}$$

$$A_{kl} - A_{k-k-l+1} = 0, \text{ oder}$$

$$A_{kl} = A_{k-k-l+1}.$$

§ 7.

Es lassen sich die Koeffizienten A_{kl} durch je zwei Koeffizienten der vorhergehenden Reihe, und zwar durch $A_{k-1,1}$ und $A_{k-1,1-1}$ ausdrücken, wie folgende Umrechnung zeigt: Es ist

$$\begin{aligned} A_{kl} &= \sum (-1)^m \binom{k+1}{m} (l-m)^k = \sum (-1)^m \binom{k+1}{m} (l-m) (l-m)^{k-1}, \quad m = 0 \dots l-1, \\ &= \sum (-1)^m \left(l \binom{k+1}{m} - m \binom{k+1}{m} \right) (l-m)^{k-1}; \end{aligned}$$

da nun $\binom{k+1}{m} = \binom{k}{m} + \binom{k}{m-1}$ und $m \binom{k+1}{m} = (k+1) \binom{k}{m-1}$, so erhält man

$$\begin{aligned} A_{kl} &= \sum (-1)^m \left(l \binom{k}{m} + (l-k-1) \binom{k}{m-1} \right) (l-m)^{k-1} \\ &= l \sum (-1)^m \binom{k}{m} (l-m)^{k-1} + (k-l+1) \sum (-1)^{m-1} \binom{k}{m-1} (l-m)^{k-1}. \end{aligned}$$

Nun hat $\binom{k}{m-1}$ den Wert null für $m=0$, die untere Grenze der zweiten Summe wird dann 1, und man erhält durch Umrechnung des zweiten Ausdrucks auf die untere Grenze 0

$$\begin{aligned} A_{kl} &= l \cdot \sum (-1)^m \binom{k}{m} (l-m)^{k-1} + (k-l+1) \sum (-1)^m \binom{k}{m} (l-m-1)^{k-1} \\ &= l \cdot A_{k-1,1} + (k-l+1) A_{k-1,1-1}. \end{aligned}$$

Durch diese Gleichung lassen sich in einfacher Weise die Koeffizienten der k . Reihe berechnen, sobald die der $(k-1)$. Reihe bekannt sind, also, da $A_{11} = 1$ ist,

$$A_{21} = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot 0 = 1$$

$$A_{22} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot A_{11} = 1$$

$$A_{31} = 1 \cdot A_{21} + 3 \cdot 0 = 1$$

$$A_{32} = 2 \cdot A_{22} + 2 \cdot A_{21} = 4$$

$$A_{33} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot A_{22} = 1$$

$$A_{41} = 1 \cdot A_{31} + 4 \cdot 0 = 1$$

$$A_{42} = 2 \cdot A_{32} + 3 \cdot A_{31} = 11$$

$$A_{43} = 3 \cdot A_{33} + 2 \cdot A_{32} = 11$$

$$A_{44} = 4 \cdot 0 + 1 \cdot A_{33} = 1.$$

Schreibt man die Koeffizienten passend unter einander, so bekommt man folgende Anordnung

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 11 & & 11 & 1 \\
 1 & & 26 & & 66 & & 26 & 1 \\
 & 1 & & 57 & & 302 & & 57 & 1
 \end{array}$$

in der die einzelnen Größen jeder Horizontalreihe aus den beiden darüberstehenden der vorhergehenden durch die Beziehung bestimmt sind:

$$A_{kl} = 1 \cdot A_{k-1,l} + (k-1+1) A_{k-1,l-1}.$$

§ 8.

Für die Summe der Koeffizienten einer Reihe findet man die Gleichung

$$\sum A_{kl} = k!, \quad l = 1 \dots k,$$

denn es ist

$$A_{k1} = 1 \cdot A_{k-1,1}$$

$$A_{k2} = 2 \cdot A_{k-1,2} + (k-1) \cdot A_{k-1,1}$$

$$A_{k3} = 3 \cdot A_{k-1,3} + (k-2) \cdot A_{k-1,2}$$

$$A_{kk-1} = (k-1) A_{k-1,k-1} + 2 A_{k-1,k-2}$$

$$A_{kk} = 1 A_{k-1,k-1},$$

addiert man diese k Gleichungen, so folgt

$$\sum A_{kl} = k (A_{k-1,1} + A_{k-1,2} + \dots + A_{k-1,k-1})$$

$$= k \cdot \sum A_{k-1,l}, \quad l = 1 \dots k-1$$

und ebenso

$$\sum A_{k-1,l} = (k-1) \sum A_{k-2,l}, \text{ also}$$

$$\sum A_{kl} = k (k-1) (k-2) \dots 2 \cdot 1 = k!$$

§ 9.

Die Summe der unendlichen Reihen, bei denen die Koeffizienten von x figurierte Zahlen sind, kann man unter der Voraussetzung $|x| < 1$ in der Weise finden, daß man die Koeffizienten nach Potenzen von n entwickelt und dann die Reihen S benutzt.

$$\text{Es sei} \quad T_2 = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} x + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} x^3 + \dots \text{ in inf.} = \sum \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2} x^n, \quad n = 1 \dots \infty,$$

$$\begin{aligned}
 \text{dann ist} \quad T_2 &= \sum \frac{n^2+n}{1 \cdot 2} x^n = \frac{1}{2} \sum n^2 x^n + \frac{1}{2} \sum n x^n = \frac{1}{2} \frac{x+x^2}{(1-x)^3} + \frac{1}{2} \frac{x}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{x}{(1-x)^3}.
 \end{aligned}$$

und entsprechend

$$T_3 = \sum \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^n = \sum \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} x^n = \frac{1}{6} S_3 + \frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{3} S_1 \\ = \frac{x}{(1-x)^4}.$$

Dieses Verfahren erfordert indessen viel Rechnung, einfacher gelangt man auf folgendem Wege zum Ziele. Erweitert man in der Reihe

$$T_2 = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} x + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} x^3 + \dots \text{ in inf.}$$

die Brüche der Reihe nach mit $3-0$, $4-1$, $5-2 \dots$, so folgt

$$T_2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x + \frac{2 \cdot 3 \cdot (4-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^2 + \frac{3 \cdot 4 \cdot (5-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \text{ in inf.} \\ = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^2 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^2 + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \\ = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x (1-x) + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^2 (1-x) + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 (1-x) + \dots \\ = (1-x) \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^2 + \dots \right) \\ = (1-x) T_2, \text{ d. h.} \\ T_3 = \frac{T_2}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^4}.$$

Weiter ergibt sich in derselben Weise

$$T_1 = \frac{x}{(1-x)^5},$$

$$T_k = \frac{x}{(1-x)^{k+1}}.$$

Zur allgemeinen Ableitung kann man auch die Beziehung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

benutzen; ersetzt man nämlich in T_k das allgemeine Glied

$$\frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \dots n + k - 1}{k!} \text{ durch } \binom{n+k-1}{k},$$

so ist

$$T_k = \sum \binom{n+k-1}{k} x^n, \quad n = 1 \dots \infty,$$

$$= \sum \binom{n+k-2}{k} x^n + \sum \binom{n+k-2}{k-1} x^n.$$

Da in der vorletzten Summe das erste Glied gleich null wird, weil $\binom{k-1}{k} = 0$ ist, so

wird darin die untere Grenze gleich 2; führt man statt dieser 1 ein, d. h. ersetzt man n durch $n+1$, so folgt

$$\begin{aligned} T_k &= \sum \binom{n+k-1}{k} x^{n+1} + \sum \binom{n+k-2}{k-1} x^n \\ &= x \cdot \sum \binom{n+k-1}{k} x^n + \sum \binom{n+k-2}{k-1} x^n, \quad n = 1 \dots \infty, \\ &= x \cdot T_k + T_{k-1}, \text{ oder} \end{aligned}$$

$$T_k - x T_k = T_{k-1}, \quad T_k = \frac{T_{k-1}}{1-x}, \text{ mithin}$$

$$T_k = \frac{x}{(1-x)^{k+1}}.$$

§ 10.

Bei Untersuchung der Konvergenz verfährt man wie bei S_k . Das $(n+1)$. Glied g_{n+1} ist $\frac{n+1 \cdot n+2 \dots n+k}{k!} x^{n+1}$ und das n . Glied gleich $\frac{n \cdot n+1 \dots n+k-1}{k!} x^n$, also $\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{n+k}{n} \cdot x = (1 + \frac{k}{n}) x$. Da nun für $n = \infty$ $\lim. \frac{g_{n+1}}{g_n} = x$ wird, so konvergiert auch in diesem Falle die Reihe bei der auf Seite 11 gemachten Annahme $|x| < 1$.

§ 11.

Um die Reihen zu summieren, deren Koeffizienten durch die Binomialfaktoren $\binom{n}{k}$ gebildet werden, hat man zu berücksichtigen, daß $\binom{n}{k}$ für $n = 1, 2 \dots k-1$ verschwindet, daß also die Reihe $\sum \binom{n}{k} x^n$ mit $\binom{k}{k} x^k$ beginnt, d. h.

$$\sum \binom{n}{2} x^n = \frac{1 \cdot 0}{1 \cdot 2} x + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} x^3 + \dots$$

$$= x \cdot T_2 = \frac{x^2}{(1-x)^3},$$

$$\sum \binom{n}{3} x^n = x^2 T_3 = \frac{x^3}{(1-x)^4}, \text{ und allgemein}$$

$$\sum \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

§ 12.

Auch die Größen S lassen sich aus T ableiten. Zu dem Zwecke mögen zunächst die Potenzen von n aus den Binomialfaktoren berechnet werden.

Es ist
$$n \binom{n}{k} = (k + n - k) \binom{n}{k} = k \binom{n}{k} + (n - k) \binom{n}{k} = k \binom{n}{k} + (n - k) \binom{n}{k} \frac{k+1}{k+1}$$

$$= k \binom{n}{k} + (k+1) \binom{n}{k+1}, \text{ also}$$

$$n \binom{n}{1} = 1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2}$$

$$n \binom{n}{2} = 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3}$$

$$n \binom{n}{3} = 3 \binom{n}{3} + 4 \binom{n}{4} \text{ u. s. f.}$$

Daraus folgt

$$n = \binom{n}{1}$$

$$n^2 = n \cdot \binom{n}{1} = 1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2}$$

$$n^3 = n \cdot n^2 = n \cdot \binom{n}{1} + 2n \cdot \binom{n}{2} = 1 \binom{n}{1} + 6 \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3}$$

$$n^4 = n \cdot n^3 = 1 \binom{n}{1} + 14 \binom{n}{2} + 36 \binom{n}{3} + 24 \binom{n}{4}$$

$$n^5 = n \cdot n^4 = 1 \binom{n}{1} + 30 \binom{n}{2} + 150 \binom{n}{3} + 240 \binom{n}{4} + 120 \binom{n}{5}.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß sich n^k aus den Binomialfaktoren $\binom{n}{1} \binom{n}{2} \dots \binom{n}{k}$ als lineare Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen läßt, deren Bestimmung nun ausgeführt werden soll, und zwar möge zunächst als Beispiel n^4 berechnet werden. Bezeichnet man die Koeffizienten mit $B_{41}, B_{42}, \dots$, so ist

$$n^4 = B_{41} \binom{n}{1} + B_{42} \binom{n}{2} + B_{43} \binom{n}{3} + B_{44} \binom{n}{4}.$$

Setzt man nun der Reihe nach $n = 1, 2, 3, 4$, so erhält man die 4 Gleichungen

$$1^4 = B_{41} \cdot 1$$

$$2^4 = B_{41} \cdot 2 + B_{42} \cdot 1$$

$$3^4 = B_{41} \cdot 3 + B_{42} \cdot 3 + B_{43} \cdot 1$$

$$4^4 = B_{41} \cdot 4 + B_{42} \cdot 6 + B_{43} \cdot 4 + B_{44} \cdot 1,$$

aus denen folgt

$$B_{41} = 1^4$$

$$B_{42} = 2^4 - 2 \cdot 1^4$$

$$B_{43} = 3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 1^4$$

$$B_{44} = 4^4 - 4 \cdot 3^4 + 6 \cdot 2^4 - 4 \cdot 1^4.$$

Hieraus ist das allgemeine Verfahren zu ersehen, das bei Bestimmung der Koeffizienten in der Reihe

$$n^k = B_{k1} \binom{n}{1} + B_{k2} \binom{n}{2} + \dots + B_{kk} \binom{n}{k}$$

anzuwenden ist. Gibt man nämlich wieder n der Reihe nach die Werte $1, 2, \dots, k$, so erhält man die n Gleichungen

$$1^k = B_{k1} \binom{1}{1}$$

$$2^k = B_{k1} \binom{2}{1} + B_{k2} \binom{2}{2}$$

$$3^k = B_{k1} \binom{3}{1} + B_{k2} \binom{3}{2} + B_{k3} \binom{3}{3}$$

$$\vdots$$

$$l^k = B_{k1} \binom{l}{1} + B_{k2} \binom{l}{2} + \dots + B_{kl} \binom{l}{l}$$

$$\vdots$$

$$k^k = B_{k1} \binom{k}{1} + B_{k2} \binom{k}{2} + \dots + B_{kk} \binom{k}{k}.$$

Multipliziert man zur Bestimmung von B_{kl} die ersten l Gleichungen der Reihe nach mit

$$(-1)^{l-1} \binom{l-1}{l-1}, (-1)^{l-2} \binom{l-1}{l-2} \dots (-1)^0 \binom{l-1}{0}$$

und addiert dieselben, so hat der Faktor von dem beliebigen B_{kp} den Wert

$$\sum (-1)^m \binom{l}{m} \binom{l-m}{p}, \quad m = 0 \dots l-p.$$

Da nun, wie leicht zu zeigen,

$$\binom{l}{m} \cdot \binom{l-m}{p} = \binom{l}{p} \cdot \binom{l-p}{m}$$

ist, so geht für dieselben Grenzen der Faktor von B_{kp} über in

$$\begin{aligned} \sum (-1)^m \cdot \binom{l}{p} \cdot \binom{l-p}{m} &= \binom{l}{p} \sum (-1)^m \binom{l-p}{m} \\ &= \binom{l}{p} (1-1)^{l-p} = 0, \end{aligned}$$

d. h. die Faktoren von $B_{k1}, B_{k2} \dots B_{k,l-1}$ sind sämtlich gleich null, während der von B_{kl} gleich 1 ist, und es folgt hieraus

$$\begin{aligned} B_{kl} &= 1 - \binom{l}{1} (1-1)^k + \binom{l}{2} (1-2)^k \dots (-1)^{l-1} \binom{l}{l-1} 1^k \\ &= \sum (-1)^m \binom{l}{m} (l-m)^k, \quad m = 0 \dots l-1. \end{aligned}$$

§ 13.

Auch die Größen B_{k+l} lassen sich durch zwei Größen B_k ausdrücken, denn es ist

$$n^k = \sum B_{kl} \binom{n}{l}, \quad l = 1 \dots k,$$

also

$$\begin{aligned} n^{k+1} &= n \cdot \sum B_{kl} \binom{n}{l} \\ &= \sum B_{kl} n \binom{n}{l}, \end{aligned}$$

und da auch hier die Beziehung gilt

$$n \binom{n}{l} = l \binom{n}{l} + (l+1) \binom{n}{l+1},$$

so folgt $n^{k+1} = \sum B_{kl} (l \binom{n}{l} + (l+1) \binom{n}{l+1})$, $l = 1 \dots k$.

Andererseits ist aber

$$n^{k+1} = \sum B_{k+1,l} \binom{n}{l}, \quad l = 1 \dots k+1,$$

und da die Faktoren von $\binom{n}{l}$ in beiden Entwicklungen für n^{k+1} gleich sein müssen, so ergibt sich die allgemeine Beziehung

$$B_{k+1,l} = l (B_{k,l-1} + B_{kl}),$$

d. h. es ist

$$B_{k+1,1} = 1 \cdot B_{k1}$$

$$B_{k+1,2} = 2 \cdot (B_{k1} + B_{k2})$$

$$B_{k+1,3} = 3 \cdot (B_{k2} + B_{k3})$$

$$\dots$$

Auch die Koeffizienten B lassen sich in ähnlicher Weise anordnen, wie die Größen A

		1		
		1	2	
	1	6	6	
	1	14	36	24
1	30	150	240	120
.	.	.	.	.

wo die Bestimmung der einzelnen Werte einer Horizontalreihe aus den darüberstehenden

durch die Gleichung $B_{k+1,l} = l (B_{k,l-1} + B_{kl})$ gegeben ist.

§ 14.

Mit Hilfe der Größen B kann die Summe der k . Potenzen der natürlichen Zahlen berechnet werden. Es ist

$$n^k = B_{k1} \binom{n}{1} + B_{k2} \binom{n}{2} + \dots + B_{kk} \binom{n}{k},$$

also

$$\sum n^k = B_{k1} \sum \binom{n}{1} + B_{k2} \sum \binom{n}{2} + \dots + B_{kk} \sum \binom{n}{k},$$

und da

$$\sum \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}, \quad \sum \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3} \dots \sum \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1},$$

so folgt

$$\begin{aligned}\Sigma n^k &= B_{k1} \binom{n+1}{2} + B_{k2} \binom{n+1}{3} + \dots + B_{kk} \binom{n+1}{k+1} \\ &= \Sigma B_{kl} \binom{n+1}{l+1}, \quad l = 1 \dots k.\end{aligned}$$

§ 15.

Die Werte für die Koeffizienten A und B lassen einen Zusammenhang zwischen denselben vermuten. Drückt man nämlich einmal

$$\Sigma n^k x^n$$

mit Hilfe der Größen A und dann mit Hilfe der Größen B aus, so müssen die Entwicklungen gleich sein. Da

$$n^k = B_{k1} \binom{n}{1} + B_{k2} \binom{n}{2} \dots + B_{kk} \binom{n}{k}$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned}\Sigma n^k x^n &= \Sigma \left(B_{k1} \binom{n}{1} x^n + B_{k2} \binom{n}{2} x^n + \dots + B_{kk} \binom{n}{k} x^n \right) \\ &= B_{k1} \Sigma \binom{n}{1} x^n + B_{k2} \Sigma \binom{n}{2} x^n + \dots + B_{kk} \Sigma \binom{n}{k} x^n \\ &= \frac{B_{k1} x}{(1-x)^2} + \frac{B_{k2} x^2}{(1-x)^3} + \dots + \frac{B_{kk} x^k}{(1-x)^{k+1}};\end{aligned}$$

und ferner ist $\Sigma n^k x^n = \frac{A_{k1} x + A_{k2} x^2 + \dots + A_{kk} x^k}{(1-x)^{k+1}},$

woraus sich die Gleichung ergibt

$$A_{k1} x + A_{k2} x^2 + \dots + A_{kk} x^k = B_{k1} x (1-x)^{k-1} + B_{k2} x^2 (1-x)^{k-2} + \dots + B_{kk} x^k.$$

Setzt man nach Entwicklung der rechten Seite die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x gleich, so erhält man

$$A_{k1} = B_{k1}$$

$$A_{k2} = B_{k2} - \binom{k-1}{1} B_{k1}$$

$$A_{k3} = B_{k3} - \binom{k-2}{1} B_{k2} + \binom{k-1}{2} B_{k1}$$

$$A_{k4} = B_{k4} - \binom{k-3}{1} B_{k3} + \binom{k-2}{2} B_{k2} - \binom{k-1}{3} B_{k1}$$

$$A_{kl} = B_{kl} - \binom{k-1+1}{1} B_{k,l-1} + \dots + (-1)^{l-1} \binom{k-1}{l-1} B_{k1}$$

d. h.

$$A_{kl} = \Sigma (-1)^{l-m} \binom{k-m}{l-m} B_{km}, \quad m = 1 \dots l,$$

oder

$$A_{kl} = \Sigma (-1)^{l-m} \binom{k-m}{k-l} B_{km}.$$

Umgekehrt läßt sich auch B_{kl} durch die Größen A_k darstellen; multipliziert man nämlich die obigen Gleichungen der Reihe nach mit

$$\binom{k-1}{k-1}, \binom{k-2}{k-1} \dots \binom{k-1}{k-1}$$

und addiert, so verschwinden die Faktoren von $B_{k1}, B_{k2} \dots B_{k,l-1}$, wie an dem Koeffizienten des beliebig gewählten B_{kp} gezeigt werden soll. Dieser ist

$$\binom{k-p}{0} \binom{k-p}{k-1} - \binom{k-p}{1} \binom{k-p-1}{k-1} + \dots (-1)^{l-p} \binom{k-p}{l-p} \binom{k-1}{k-1}$$

oder

$$\sum (-1)^m \binom{k-p}{m} \binom{k-p-m}{k-1}, \quad m = 0 \dots l-p.$$

Da nun

$$\binom{k-p}{m} \binom{k-p-m}{k-1} = \binom{k-p}{k-1} \binom{l-p}{m}$$

ist, so erhält man als Faktor von B_{kp}

$$\begin{aligned} \sum (-1)^m \binom{k-p}{k-1} \binom{l-p}{m} &= \binom{k-p}{k-1} \sum (-1)^m \binom{l-p}{m}, \quad m = 0 \dots l-p, \\ &= \binom{k-p}{k-1} (1-1)^{l-p}, \end{aligned}$$

und dieser Wert ist gleich null für $p = 1 \dots l-1$, d. h. der Koeffizient von B_{kp} ist gleich null für $p = 1, 2 \dots l-1$, während der Faktor von B_{kl} gleich 1 wird, mithin ist

$$\begin{aligned} B_{kl} &= \sum \binom{k-m}{l-m} A_{km} \\ &= \sum \binom{k-m}{k-1} A_{km}, \quad m = 1 \dots l, \end{aligned}$$

da $\binom{k-m}{l-m} = \binom{k-m}{k-1}$ ist.

§ 16.

Durch die Reihen S und T ist man imstande, solche geometrische Reihen zu addieren, deren Koeffizienten arithmetische Reihen höherer Ordnung bilden, auch hier unter der Voraussetzung $|x| < 1$. Man bestimmt zu dem Zwecke in bekannter Weise das allgemeine Glied der aus den Koeffizienten gebildeten arithmetischen Reihe entweder als Funktion von n oder als Funktion von $\binom{n-1}{k}$ und zerlegt dann die gegebene Reihe in Summen, die sich mittels der Größen S oder T zusammenfassen lassen.

Es sei gegeben $S = 2x + 15x^2 + 34x^3 + 59x^4 + 90x^5 + \dots$; bildet man aus den Koeffizienten die Differenzenreihen

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 15, & 34, & 59, & 90, & \\ 13, & 19, & 25, & 31, & & \\ 6, & 6, & 6, & & & \end{array}$$

so folgt, daß die Koeffizienten nach einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung fortschreiten, deren allgemeines Glied $an^2 + bn + c$ ist. Setzt man nun der Reihe nach $n = 1, 2, 3$, so ergibt sich

$$a + b + c = 2, \quad 4a + 2b + c = 15, \quad 9a + 3b + c = 34,$$

und weiter $3a + b = 13, \quad 5a + b = 19$, d. h. $a = 3, b = 4, c = -5$,

also ist der allgemeine Ausdruck für den Koeffizienten von x^n

$$3n^2 + 4n - 5,$$

mithin ist

$$S = \sum (3n^2 + 4n - 5)x^n, \quad n = 1 \dots \infty,$$

oder bei Anwendung von S_2, S_1, S_0

$$\begin{aligned} S &= 3S_2 + 4S_1 - 5S_0 \\ &= 3 \frac{x+x^2}{(1-x)^3} + 4 \frac{x}{(1-x)^2} - 5 \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{2x + 9x^2 - 5x^3}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Bestimmt man den Wert des Faktors von x^n mittels der an erster Stelle stehenden Differenzen aus den obigen Differenzreihen, so erhält man bekanntlich als allgemeines Glied $g_1 + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2$, wo g_1 das Anfangsglied und d_1 und d_2 die an erster Stelle stehenden Zahlen der Differenzenreihen sind. In dem gegebenen Beispiele ist $g_1 = 2, d_1 = 13, d_2 = 6$, also

$$\begin{aligned} S &= \sum \left(2 + 13 \binom{n-1}{1} + 6 \binom{n-1}{2} \right) x^n \\ &= 2 \sum x^n + 13 \sum \binom{n-1}{1} x^n + 6 \sum \binom{n-1}{2} x^n \\ &= 2 \frac{x}{1-x} + 13 \frac{x^2}{(1-x)^2} + 6 \frac{x^3}{(1-x)^3} \\ &= \frac{2x + 9x^2 - 5x^3}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Als weiteres Beispiel diene die Bestimmung von

$$S = 12x + 16x^2 + 29x^3 + 57x^4 + 106x^5 + 182x^6 + \dots$$

Die Differenzreihen

12, 16, 29, 57, 106, 182
4, 13, 28, 49, 76
9, 15, 21, 27
6, 6, 6

zeigen, daß hier die Koeffizienten nach einer arithmetischen Reihe 3. Ordnung fortschreiten, deren allgemeines Glied $an^3 + bn^2 + cn + d$ für $n = 1, 2, 3, 4$ die Bestimmungs-
gleichungen liefert

$$a + b + c + d = 12$$

$$8a + 4b + 2c + d = 16$$

$$27a + 9b + 3c + d = 29$$

$$64a + 16b + 4c + d = 57.$$

Daraus folgt $a = 1$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = \frac{3}{2}$, $d = 11$, also ist

$$\begin{aligned} S &= \sum (n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 11) x^n, n = 1 \dots \infty, \\ &= S_3 - \frac{3}{2}S_2 + \frac{3}{2}S_1 + 11S_0 \\ &= \frac{x + 4x^2 + x^3}{(1-x)^4} - \frac{3}{2} \frac{x + x^2}{(1-x)^3} + \frac{3}{2} \frac{x}{(1-x)^2} + 11 \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{12x - 32x^2 + 37x^3 - 11x^4}{(1-x)^4}. \end{aligned}$$

Bei Benutzung des Anfangsgliedes und der an erster Stelle stehenden Differenzen, wo $g_1 = 12$, $d_1 = 4$, $d_2 = 9$, $d_3 = 6$ ist, erhält man

$$\begin{aligned} S &= \sum (12 + 4 \binom{n-1}{1} + 9 \binom{n-1}{2} + 6 \binom{n-1}{3}) x^n \\ &= \frac{12x}{1-x} + 4 \frac{x^2}{(1-x)^2} + 9 \frac{x^3}{(1-x)^3} + 6 \frac{x^4}{(1-x)^4} \\ &= \frac{12x - 32x^2 + 37x^3 - 11x^4}{(1-x)^4}. \end{aligned}$$

Weiter möge berechnet werden

$$S = 1^2 \cdot 2x + 2^2 \cdot 3x^2 + 3^2 \cdot 4x^3 + 4^2 \cdot 5x^4 + \dots \text{ in inf.,}$$

d. h.

$$\begin{aligned} S &= \sum n^2(n+1) x^n, n = 1 \dots \infty \\ &= \sum n^3 x^n + \sum n^2 x^n = S_3 + S_2 \\ &= \frac{x + 4x^2 + x^3}{(1-x)^4} + \frac{x + x^2}{(1-x)^3}, \end{aligned}$$

mithin

$$S = \frac{2x + 4x^2}{(1-x)^4}.$$

Bei Anwendung der figurierten Zahlen, wo also

$$n^3 = \binom{n}{1} + 6 \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3},$$

$$n^2 = \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2}$$

zu setzen ist, folgt

$$S = \sum \left(\binom{n}{1} + 6 \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3} + \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} \right) x^n$$

$$= \sum \left(2 \binom{n}{1} + 8 \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3} \right) x^n$$

$$= 2 \sum \binom{n}{1} x^n + 8 \sum \binom{n}{2} x^n + 6 \sum \binom{n}{3} x^n$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{8x^2}{(1-x)^3} + \frac{6x^3}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{2x + 4x^2}{(1-x)^4}.$$



Lehrplan der Gymnasien.

	VI	V	IV	IIIB	IIIA	IIB	IIA	IB	IA	Zusammen
Religion	3	2	2	2	2	2	2	2	2	19
Deutsch und Geschichtserzählungen	3) 1) 4	2) 1) 3	3	2	2	3	3	3	3	26
Lateinisch	8	8	8	8	8	7	7	7	7	68
Griechisch	—	—	—	6	6	6	6	6	6	36
Französisch	—	—	4	2	2	3	2	2	2	17
Englisch	—	—	—	—	—	—	2	2	2	6
Geschichte und Erdkunde	2	2	2 2	2 1	2 1	2 1	3	3	3	26
Rechnen und Mathematik	4	4	4	3	3	4	4	4	4	34
Naturbeschreibung	2	2	2	2	—	—	—	—	—	8
Physik, Elemente der Chemie und Mineralogie	—	—	—	—	2	2	2	2	2	10
Schreiben	2	2	—	—	—	—	—	—	—	4
Zeichnen	—	2	2	2	2	—	—	—	—	8
Zusammen	25	25	29	30	30	30	31	31	31	262

Dazu kommen: Turnen (je 3 St.) und Singen obligatorisch; Zeichnen für IIB—IA (2 St.) fakultativ; Hebräisch in IIA—IA (4 St.) fakultativ; 1 Schreiben in IV—IIIA.

Vergl. Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen im Herzogtum Braunschweig von 1903. Braunschweig, Druck und Verlag von Joh. Heinr. Meyer. Preis 50 Pfg.

Verteilung der Unterrichtsstunden.

Lehrer	Ordinarius	OI	UI	OII	UII	OIII	UIII ₁	UIII ₂	IV	V	VI	Zusammen
Direktor Prof. Dr. Müller		2 Religion 2 Horaz 6 Griech.	2 Horaz									12
Professor Dr. Wagenführ	Ia	5 Latein 3 Gesch. u. Erdk.	5 Latein 3 Dtsch.		3 Turn.							19
Prof. Klügel	IIa	2 Hebräisch	2 Hebr. 7 Latein 3 Dtsch.				6 Griech.					20
Professor Damköhler	IIIa				3 Gesch. u. Erdk.	8 Latein 2 Dtsch. 2 Franz.		6 Griech.				21
Professor Dr. Liesenberg	Ib	3 Dtsch. 2 Franz. 2 Engl.	6 Griech. 2 Franz. 2 Engl.	2 Engl.								19
Professor Dr. Menzel			3 Gesch. u. Erdk.	2 Franz.	6 Griech. 3 Franz.			2 Franz.	4 Franz.			20
Oberlehrer Mollenhauer	IIb				7 Latein 3 Dtsch.		2 Franz.		4 Gesch. u. Erdk.		3 Relig. 2 Erdk.	21
Oberlehrer Demuth		4 Math.	4 Math.	4 Math. 2 Physik		3 Math. 2 Physik		2 Natur- kunde				21
Oberlehrer Rabert	IIIb ₁					3 Gesch. u. Erdk.	8 Latein 2 Dtsch. 3 Gesch. u. Erdk.	3 Gesch. u. Erdk.		2 Erd- kunde		21
Oberlehrer Dr. Bürger	IIIb ₂				6 Griech. 3 Gesch. u. Erdk.			2 Relig. 2 Dtsch. 8 Latein				21
Oberlehrer Dr. Wiebrecht		2 Physik	2 Physik	4 Math. 2 Physik			3 Math. 2 Natur- kunde		2 Natur- kunde	2 Natur- kunde	2 Natur- kunde	21
Oberlehrer Dr. Witte	V	3 Turnen					6 Griech.	3 Turnen		3 Dtsch. 8 Latein		23
Oberlehrer Dr. Schaper	IV								3 Dtsch. 8 Latein 3 Turn.		8 Latein	22
Gymnasiallehrer Borrmann	VI					3 Turn.		3 Math.	4 Rechn.	4 Rechn.	4 Dtsch. 4 Rechn.	26
		1 Schreiben								3 Turnen		
Pastor Collaborator Kellner				2 Relig.	2 Relig.	2 Relig.	2 Relig.		2 Relig.	2 Relig.		12
Zeichenlehrer Hinze		2 Zeichnen			2 Zeich- nen		2 Zeichnen		2 Zeich- nen	2 Zeich- nen		10
Organist u. Musiklehrer Sölter		1 Chorsingen							1 Singen	2 Schrb. 2 Singen	2 Schrb. 2 Singen	10

Lektüre in den oberen Klassen.

Oberprima.

Deutsch. Shakespeares Julius Caesar. Hamburgische Dramaturgie. Wallenstein. Emilia Galotti. Schillers Abhandlung über das Erhabene. Latein. Horaz, Oden III u. IV. Ausgewählte Satiren und Episteln. Cicero pro Milone. Tacitus Ann. I u. II. Livius B. 23, 24, 28 u. 29 teils privatim gelesen, teils extemporiert. Cicero, Tusculanen V mit Auswahl. Griechisch. Homer, Ilias XIII—XXIV mit Auswahl; Sophokles, König Ödipus und Antigone; Demosthenes, 1. u. 3. olynthische Rede; Thukydides, aus B. VI; Platon, Protagoras und Phädon mit Auswahl. Französisch. Racine, Britannicus. Molière, Le Misanthrope. Englisch. Drapour, Intellectual Development of Europe. Shakespeare, The Tempest.

Unterprima.

Deutsch. Goethes und Schillers Gedankenpoesie. Klopstocks Oden. Lessings Laokoon und Abhandlung über die Fabel. Schillers Braut von Messina. Goethes Iphigenie auf Tauris. Latein. Horaz, Oden I u. II, einige Epoden und Satiren. Tacitus, Germania und Agricola teilweise. Ciceros Briefe mit Auswahl. Livius B. 23, 24 u. 28 teils privatim gelesen, teils extemporiert. Griechisch. Homers Ilias, Auswahl aus V—XII. Thukydides, Auswahl aus II—IV. Sophokles, Aias. Platons Apologie und Kriton. Französisch. Boissier, Cicéron et ses amis. Molière, Le Malade imaginaire. Englisch. London Old and New, herausgegeben von Klapperich. Collection of longer English Poems (Velhagen & Klasing).

Obersekunda.

Deutsch. Nibelungenlied. Gedichte Walters von der Vogelweide. Schillers Maria Stuart. Latein. Sallusts Jugurthinischer Krieg. Ciceros Rede über den Oberbefehl des Pompejus. Livius, Buch XXII mit Auswahl. Virgils Aeneis II—VI mit Auswahl. Griechisch. Homer, Odyssee XIII—XXIV mit Auswahl. Auswahl aus Herodot V und VI. Aus Xenophons Memorabilien und Plutarch, Kimon und Perikles. Französisch. Jeanne d'Arc par Barante. Les contes de la reine de Navarre par Scribe et Legouvé. Englisch. Lesestücke und Gedichte aus Gesenius I. Chambers, History of the Victorian Era.

Themata der deutschen Aufsätze.

Oberprima.

1. Warum verehren wir Deutschen Schiller so sehr? 2. Der Schild des Achilleus bei Homer und Schillers Glocke. 3. Es bildet ein Talent sich in der Stille, Sich ein Charakter in dem Strom der Welt. (Klassenaufsatz.) 4. Wer ist der tragische Held in Shakespeares Julius Caesar? (Abiturientenaufsatz.) 5. In tenui labor, at tenuis non gloria. 6. Butlers Charakter und sein Anteil an der Handlung. 7. Die Kunst der Komposition in Lessings Emilia Galotti. 8. Recht stets behält das Schicksal, denn das Herz In uns ist sein gebietrischer Vollzieher. (Abiturientenaufsatz.) 9. Entzwei und gebiete! Tüchtig Wort: Verein und leite! Besserer Hort. (Klassenaufsatz.)

Unterprima.

1. a) Bestimmung der Glocke. b) Der Stromeslauf ein Heldenleben nach Goethes Mahomets Gesang. 2. a) Groß und glücklich bestandene Gefahren sind für die Völker stets die größte Wohltat gewesen. b) Schiller ein Herold sittlicher Ideen. 3. Warum sind wir dem Alter Ehrfurcht schuldig? (Klassenaufsatz.) 4. a) Klopstocks Oden nach ihrem Inhalt geordnet. b) Der wahre Bettler ist doch einzig und allein der wahre König. 5. a) Was unsterblich im Gesang soll leben, muß im Leben untergehn. b) Die Affekte in der Ilias und im Nibelungenliede nach ihren Motiven und ihren Graden. 6. a) Der Schild des Achill, Bilder des menschlichen Lebens. b) Ungleich verteilt sind des Lebens Güter Unter der Menschen flücht'gem Geschlecht, Aber die Natur sie ist ewig gerecht. 7. a) Die Vorfabel zur Braut von Messina. b) Die gute Sache stärkt den schwachen Arm. (Klasenaufsatz.) 8. a) Nur Dämmerung ist unser Blick. b) Welche Seiten des Menschenlebens werden in den Chorliedern der Braut von Messina zur Anschauung gebracht?

Obersekunda.

1. Wem Gott will rechte Gunst erweisen, den schickt er in die weite Welt. 2. Ein Bruderzwist im Numidischen Königshause (nach Sallust). 3. Weshalb feiern wir den Sedantag? 4. a) Wie verhält sich Kriemhild zu Ezels Werbung? b) König Gunthers Brautfahrt. c) Wie bewahrheiten sich die Worte aus Uhlands «Ernst von Schwaben»: «Die Treue sei des deutschen Volks» im Nibelungenliede. (Schulaufsatz.) 5. Nur Beharrung führt zum Ziel. 6. Eine Schilderung. 7. Woran erinnert uns das Jahr 1906? 8. a) Welche Charakterzüge treten bei Elisabeth besonders hervor? b) Wie wird unsere Teilnahme für Maria Stuart erweckt? (Schulaufsatz.)

Schriftliche Aufgaben für die Reifeprüfung.**Michaelis 1905.**

1. Deutscher Aufsatz. Wer ist der tragische Held in Shakespeares Julius Cäsar?
2. Eine Übersetzung aus dem Deutschen ins Lateinische.
3. Übersetzung aus Thukydides B. IV Kapp. 129—131.
4. Hebräisch. Übersetzung von Psalm 138, 1—8 nebst Analyse schwierigerer Formen.
5. Mathematik. 1. Ein Dreieck zu zeichnen und zu berechnen aus der Grundlinie $c = 44,75$, dem Radius des eingeschriebenen Kreises $\rho = 11,61$ und dem Radius des der Grundlinie angeschriebenen Kreises $\rho_c = 37,01$. 2. Eine Rente von 500 Mk. auf 12 Jahre soll in eine solche auf 20 Jahre umgewandelt werden; wie groß ist diese, wenn 4 % gerechnet werden? 3. Von einem Kegelstumpfe, dessen Mantel gleich der Summe der Grundflächen ist, sind die beiden Radien $R = 18$, $\rho = 9$ gegeben; wie groß ist die Seite des volumgleichen regelmäßigen Tetraeders? 4. Gegeben ist der Kreis $x^2 - 10x + y^2 - 8y + 16 = 0$ und die Gerade $x + 2y = 18$; in welchen Punkten schneidet die Gerade den Kreis, und welches ist die Gleichung des über der Sehne als Durchmesser gezeichneten Kreises?

Ostern 1906.

1. Deutscher Aufsatz. Recht stets behält das Schicksal, und das Herz
In uns ist sein gebietrischer Vollzieher.
2. Ein lateinisches Skriptum.
3. Übersetzung aus Platons Phädon Kap. 38.
4. Mathematische Aufgaben. 1. Ein Dreieck zu zeichnen und zu berechnen aus dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises $r = 32,802$, der Höhe $h_c = 47,829$ und dem Unterschiede der Basiswinkel $\alpha - \beta = \delta = 32^\circ 23,8'$. 2. Einer Kugel mit dem Halbmesser r ist ein gerader Doppelkegel eingeschrieben, dessen Höhen sich wie 1 zu 4 verhalten; wie groß ist sein Inhalt und seine Oberfläche? Zahlenbeispiel $r = 15$. 3. In welchen Punkten trifft das Mittellot zu $P_1(7,3)$ und $P_2(3,9)$ die Parabel $y^2 = 8x$ und wie groß ist das Segment? 4. Eine Rente von $r = 250$ Mk. auf 12 Jahre soll in eine solche auf 15 Jahre verwandelt werden; wie groß ist diese bei 4% ?

Chronik und Statistik.

Am Ende des alten Schuljahres hielten wir unsere Schillerfeier. Festrede des Direktors. Schüler verschiedener Klassen deklamierten: Macht des Gesanges, Alpenjäger und Alpenscene aus Wilhelm Tell, Graf von Habsburg, Taucher, Das Glück, Epilog zu Schillers Glocke. Einige Primaner waren später beteiligt an den öffentlichen Darbietungen der Literaria.

1905. Mai 2. Eröffnung des Schuljahres. Dr. Wiebrecht zu einer militärischen Dienstleistung auf 8 Wochen eingezogen. Mit Genehmigung der Herzoglichen Oberschulkommission war Cand. min. Weidel in dankenswerter Weise zur Aushilfe bereit.

Mai 6. Der Direktor vertrat das Gymnasium bei Einweihung der Berechtigten Realschule des Herrn Direktor Rhotert.

Mai 8. Feier des Geburtstages Sr. Königlichen Hoheit des Regenten. Die Ansprache hielt Oberlehrer Mollenhauer. Nachmittags war schulfrei.

September 1. Sedanfeier in Kloster Michaelstein.

„ 14. Reifeprüfung unter Vorsitz des Herrn Oberschulrat Dauber.

Oktober 27. Beim Empfang Sr. Majestät des Kaisers bildet auch das Gymnasium Spalier. Am ersten Jagdtage war nachmittags 1 Stunde, am zweiten vormittags 2 Stunden schulfrei.

November 8. Feier des h. Abendmahles in der St. Bartholomäikirche.

Dezember 16. Der Schüler-Turnverein feierte sein Jahresfest in herkömmlicher Weise.

1906. Januar 27. Öffentlicher Aktus in der Aula zur Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers. Die Festrede hielt der Direktor.

Februar 27. Am Tage der silbernen Hochzeit der Kaiserlichen Majestäten und der Vermählung Sr. Königl. Hoheit des Prinzen Eitel Friedrich Feier in der Aula. Ansprache des Direktors im Anschluß an Psalm 23. Die von Sr. Königlichen Hoheit dem

Regenten gnädigst geschenkten 3 Exemplare des Werkes «Der Kaiser und die deutsche Jugend» von Wilm wurden an je einen Schüler aus den drei oberen Klassen verteilt.

März 21. Reifeprüfung unter Vorsitz des Herrn Oberschulrat Dauber.

April 7. Schluß des Schuljahres.

Im November v. J. erkrankte der Organist und Musiklehrer Adolf Sölter. Seine Vertretung übernahmen in dankenswerter Weise die Bürgerschullehrer Bösche und Schreiber. Leider sah sich Herr Sölter genötigt, zum 1. April um Versetzung in den Ruhestand zu bitten. Er hat 25 Jahre lang den Gesangunterricht, zuletzt auch den Schreibunterricht erteilt und seines Amtes in aller Treue eifrigst gewaltet. Dafür sei ihm auch an dieser Stelle herzlich gedankt. Möge dem scheidenden Kollegen Besserung seiner Gesundheit und ein freundlicher Lebensabend beschieden sein!

Aus der Volkmarstiftung kamen 2 Stipendien von je 50 M. zur Verteilung. Die Unterstützungsbibliothek für bedürftige Schüler erhielt daraus 25 M. — Das Kuratorium besteht aus dem Direktor als Vorsitzenden, dem Prof. Dr. Liesenberg als Rechnungsführer und dem Prof. Klügel als Vertreter des Familienältesten Dr. A. Volkmar in Lichterfelde bei Berlin.

Geschenke erhielten:

1. Die Gymnasialbibliothek vom Herzogl. Konsistorium, von den Herren Gymn.-Dir. Prof. Dr. Müller, Prof. Dr. Wagenführ, Prof. Dr. Bahmann, Hofbuchdrucker Kircher, Rentner Richard, vom Testamentsvollstrecker des † Herrn C. Hardt in Hamburg, Stud. Ahrberg, Frau Dr. Gnauck-Kühne, von der Verlagsbuchhandlung C. F. Volkmar in Leipzig, vom Grenzbotenverein.

2. Die Schülerbibliothek von Frau Major Besser, Frau Dr. Gnauck-Kühne, Herrn Prof. Dr. Wagenführ, Prof. Klügel, Prof. Dr. Menzel. Von den Schülern: Scholze I A, Kaapke III A, Prochno II B, Ahrberg III B, Hornig III B, Krach III B, Schwieger III B, Engelhardt II B, Niemeyer IV, Helle IV, Lust III B, Fuchs III A, Wegener III A, Kramer III B, L. Meyer III A.

3. Die Unterstützungsbibliothek von den Herren Generalmajor v. Steuben, Gymnasiallehrer Borrmann, Assessor Sommer, von den Verlagsbuchhandlungen F. A. Herbig in Berlin und B. G. Teubner in Leipzig.

4. Die naturwissenschaftlichen Sammlungen von den Herren Prof. Klügel, Stadtsekretär a. D. Scheffler, Hofbuchhändler Brüggemann, Ingenieur Hieronimus, Hofbuchdrucker Kircher sowie vom Untertertianer Leidig.

Allen freundlichen Gebern sei auch an dieser Stelle bestens gedankt.

Während des Schuljahres 1905/06 haben folgende Schüler das Gymnasium besucht:

Oberprima			
1. Erich Müller	Blankenburg	6. Wilhelm Ebert	Blankenburg
2. August Dietrich	Hadmersleben	7. Heinrich Scholze	"
3. Otto Kirchner	Blankenburg	8. Otto Witte	Wienrode
4. Hans Wagenführ	"	9. Eckhard de Convenent	Blankenburg
5. Friedrich Damköhler	"	10. Robert Breitmeyer	Blankenburg
		11. Heinrich Rabe	Giebichenstein

12. Martin Bertling Blankenburg
13. Friedrich Röbbeling "
14. Karl Wilhelmi "
15. Arno v. Ingersleben Oschersleben
16. Hermann Pockels Blankenburg
17. Karl Zellmann Hamburg
18. Wilhelm Luchte Blankenburg
19. Hermann Schaffhirt Quedlinburg.

Unterprima

1. Karl Priesterjahn Heimbürg
2. Ernst Hohl Blankenburg
3. Kurt Eichert Wilhelmshaven
4. Wilhelm Schlüter Blankenburg
5. Walter Torns "
6. Karl Lange Preuss. Stargard
7. Hermann Ulbricht Ballenstedt
8. Theodor v. Brincken Blankenburg
9. Rudolf Jacobsen Glücksbürg
10. Joachim Lemelsen Blankenburg
11. Kurt Rhotert "
12. Werner Niemeier Wienrode
13. Ernst Rehm Blankenburg
14. Paul Tippe "
15. Richard Reckleben Langenweddingen
16. Andreas Palm Blankenburg
17. Erich Dorendorf Magdeburg.

Obersekunda

1. Hermann Menzel Blankenburg
2. Karl Engelke "
3. Gustav Gebhardt Heimbürg
4. Arthur v. Funetti Blankenburg
5. Karl Meier "
6. Friedrich Kurt Wilhelmi "
7. Georg Kratzenstein "
8. Karl Rieche Hasselfelde
9. Friedrich Schilling Blankenburg
10. Friedrich Schwanecke Derenburg
11. Bernhard Kessler Blankenburg
12. Hans Peters "
13. Gerhard Kuntzen "
14. Hermann Streitenberg Heidelberg
15. Karl Bauer Halle a. S.
16. Paul Schoch Blankenburg
17. Hans Trolldenier "
18. Wilhelm Hahn Röderhof
19. Erich Braune Ermsleben
20. Johannes Clemens Blankenburg
21. Paul Mühlmann "
22. Georg Niemeier Wienrode

23. Walter Sänberlich Mittel-Edlau
24. Richard Meier Blankenburg
25. Rudolf Herrmann Braunschweig
26. Robert Grasshoff Blankenburg
27. Werner Ranft Trautenstein
28. Herbert Massalsky Gnölbzig
29. Fritz v. Otto Blankenburg.

Untersekunda

1. August Corves Blankenburg
2. Wilhelm Siedler "
3. Ludwig Kamin Timmenrode
4. Henry Detlof Blankenburg
5. Karl Lust "
6. Otto Westram "
7. Bruno v. Henniges Eilenstedt
8. Wilhelm Ziegenmeyer Cattenstedt
9. Otto Korfes "
10. Wilhelm Waldvogel Blankenburg
11. Otto Schröder "
12. Hans Kricheldorf Calbe a. S.
13. Erich Nothdurft Blankenburg
14. Karl Räddecke Michaelstein
15. Albrecht Brandes Anderbeck
16. Wilhelm Müller Blankenburg
17. Siegfried Durschnabel "
18. Gustav Nabert Börnecke
19. Ulrich Lademann Blankenburg
20. Wilhelm Eickhoff "
21. Hugo Sommer "
22. Friedrich Rinke "
23. Wilhelm Streitenberg Rübeland
24. Karl Wegener Börnecke
25. Eduard Prochno Blankenburg
26. Friedrich Korfes Cattenstedt
27. Wolf Krämer-Winkler Hamburg
28. Walter Kruse Blankenburg
29. Bernd von der Marwitz "
30. Otto Winkelvos Braunschweig
31. Albrecht Massalsky Gnölbzig
32. Alfred Wiehle Blankenburg
33. Kurt Engelhardt Bremen
34. Gustav Krach Blankenburg
35. Werner Maillard Danzig
36. Wilhelm Ulbricht Ballenstedt
37. Ernst Reckleben Wülperode
38. Paul Tiessler Halle a. S.
39. Paul Debitsch Derenburg
40. Hans Schulze Friedenau
41. Franz Jordan Magdeburg.

Obertertia

1. Walter Hubbe Kaltenmark
2. Fritz Rabe Giebichenstein
3. Ludwig Kempe Blankenburg
4. Julius Meyer Abbenrode
5. Kurt Büttner Blankenburg
6. Walter von Hollander "
7. Hans Soeder Berlin
8. Jobst Meyer Heimbürg
9. Gerhard Korfes Cattenstedt
10. Ernst Helle Blankenburg
11. Erich Witzig Hasselfelde
12. Joachim Albrecht
von Trauwitz-Hellwig Blankenburg
13. Erich Friedr. von Wallenberg "
14. Fritz Kaapke "
15. Heinrich Rimpau Schlanstedt
16. Paul Heinemann Blankenburg
17. Wilhelm Pooch "
18. Albert Möhle Timmenrode
19. Friedrich Wilhelm Klöppel Blankenburg
20. Friedrich Schmalhoff "
21. Hans Meinders "
22. Paul Fuchs Braunlage
23. Werner Roettig Blankenburg
24. Theodor Damköhler "
25. Berthold Stein Cattenstedt
26. Robert Försterling Blankenburg
27. Walter Heinemann "
28. Erich Niemeier Wienrode
29. Franz Gerecke Blankenburg
30. Hermann Wegener Börnecke
31. Fritz Unger Blankenburg
32. Arnold Meyer "
33. Wilhelm Greiffenhagen "
34. Walter Pockels "

Untertertia I

1. Paul Schulz Blankenburg
2. Martin Teitge Löderburg
3. Friedrich Voigt Hohegeiß
4. Hans Lust Blankenburg
5. Bodo v. Borries "
6. Walter Kötz "
7. Emil Jänecke "
8. Wilhelm Diesing "
9. Hans Curt v. Grawert "
10. Walter Götze "
11. Walter Ebrecht Grünthal
12. Rudolf Fischer Blankenburg
13. Johann Krach "

14. Rudolf Wermuth Blankenburg
15. Paul Wichmann Wienrode
16. Hans Hornig Blankenburg
17. Ernst Lückhoff "
18. Walter Beck "
19. Rudolf Hölzke "
20. Rudolf Deter "
21. Erich Ahrberg "
22. Richard Heydecke Wienrode.

Untertertia II

1. Karl Hecker Prieborn b. Strehlen
2. Gustav Gieselberg Blankenburg
3. Alfred Leidig "
4. Hermann Rädecke Michaelstein
5. Wolfgang Retslag Blankenburg
6. Gerhard Kellner "
7. Ludwig Dubois "
8. Otto Sander "
9. Kurt Schwieger "
10. Heinrich Barnstorf "
11. Karl Eickhoff "
12. Wolfgang Eilers "
13. Ernst Quensel Hasselfelde
14. Hans Kramer Blankenburg
15. Hermann Reemtsma "
16. Walter Hecker Prieborn
17. Viktor Leidig Blankenburg
18. Franz Nickell "
19. Günther Rudloff Etgersleben
20. Hilmar v. Münchhausen Neuhaus Leitzkau
21. Renter Hausdörffer Engelnstedt
22. Johannes Schoch Blankenburg.

Quarta

1. Ewald Hohberg Holthausen
2. Hermann Ahrenberg Blankenburg
3. Wilhelm Vogetley "
4. Arthur Constabel "
5. Willi Kramer Cattenstedt
6. Philipp Reemtsma Blankenburg
7. Heinz Mollenhauer "
8. Paul Nabel Harsleben
9. Walter Schröder Rübeland
10. Alfred Meinhardt Blankenburg
11. Hans Helle "
12. Rudolf Pilz "
13. Walter Schrader "
14. Helmut Günther "
15. Fritz Lüddecke "
16. Walter Damköhler "

17. Albert Liesmann	Blankenburg
18. Wilhelm Riefe	Adenstedt
19. Hilmar Lüders	Blankenburg
20. Werner Schlüter	"
21. Walter Stein	Cattenstedt
22. Friedrich Massalsky	Gnölzig
23. Adolf Niemeyer	Blankenburg
24. Otto Metzenmacher	"
25. Georg v. d. Marwitz	"
26. Johannes Etzdorf	"
27. Willi Ahrendt	"
28. Felix Unger	"
29. Rudolf Burkhardt	"
30. Fritz Bensch	Tempelhof
31. Hanns Conon v. d. Gabelentz	Poschwitz
32. Werner Meyer	Vorsfelde
33. Fedor v. Skrbensky	Blankenburg
34. Arnold v. Schlüter	Schweinert
35. Friedrich Wolle nann	Ostharingen.

Quinta

1. Fritz Weydemann	Heimbürg
2. Hermann Kramer	Blankenburg
3. Hans Lindner	"
4. Ednard v. Hollander	"
5. Hans Buttler	"
6. Kurt Paul	"
7. Werner Bethge	"
8. Werner Spitta	"
9. Ewald Gast	"
10. Erich Grüning	"
11. Walter Fessel	Hasselfelde
12. Georg Ritzau	Blankenburg
13. Hans Walkemeier	"
14. Gerhard Suder	"
15. Heinrich Krupp	"
16. Walter Rasehorn	"

17. Johannes Grube	Flinsberg
18. Karl Fessel	Hasselfelde
19. Robert Lüddecke	Blankenburg
20. Werner Kühnholz	Cattenstedt
21. Hans Bensch	Tempelhof
22. Franz Schröder	Blankenburg
23. Friedr. Wilhelm Glanz	"
24. Curt Wichmann	Wienrode
25. Ernst Schreyer	Blankenburg
26. Udo Saeuberlich	Mittedlau
27. Bodo Volck	Dorpat.

Sexta

1. Walter Soeder	Blankenburg
2. Walter Wulfert	"
3. Wilhelm Schönfeld	"
4. Arno Spitta	"
5. Gustav Uhde	"
6. Heinrich Kleye	"
7. Ernst Schumann	"
8. Curt Seidel	"
9. Walter de Convenent	"
10. Hermann Angerstein	"
11. Emil Ruhfus	"
12. Theodor Kellner	"
13. Emil Schreyer	"
14. Wilbrand Rhotert	"
15. Guido Erdmann	"
16. Alwin Reemtsma	"
17. Curt Richter	"
18. Gerhard v. Bistram	"
19. Walther Korfes	Cattenstedt
20. Hans Wiersdorff	Gröningen
21. Walter Wiersdorff	Dahlenwarsleben
22. Herbert Volck	Dorpat
23. Axel Volck	"

Das Zeugnis der Reife zum akademischen Studium haben erhalten

Michaelis 1905:

Namen der Geprüften	Stand des Vaters	Wohnort	Studium u. Beruf
1. Erich Müller*	Buchhalter	Blankenburg	Mathematik
2. August Dietrich	Amtsrat	Hadmersleben	Landwirtschaft
3. Otto Kirchner	Rentner	Blankenburg	Chemie
4. Hans Wagenführ*	Professor	Blankenburg	Jura

* Von der mündlichen Prüfung befreit.

Ostern 1906:

Namen der Geprüften	Stand des Vaters	Wohnort	Studium u. Beruf
1. Friedrich Damköhler	Professor	Blankenburg	Philologie
2. Wilhelm Ebert	Professor †	„	Gärtnerei
3. Heinrich Scholze*	Oberförster †	„	Philologie
4. Otto Witte*	Rentner	Wienrode	Theologie
5. Eckhard de Convent*	Postdirektor	Blankenburg	Jura
6. Robert Breitmeyer*	Schlossermeister	„	Steuerfach
7. Heinrich Rabe	Fabrikbesitzer	Halle a. S.	Marine
8. Karl Wilhelmi	Präsident †	Blankenburg	Jura
9. Arno v. Ingersleben	Arzt, Dr. med.	Oschersleben	Landwirtschaft

* Von der mündlichen Prüfung befreit.

Ferner sind im Laufe des Schuljahres abgegangen: aus UI Kruse; aus OII Graßhoff, v. Otto, Ranft, Massalsky; aus UII Wiehle, Siedler, Kamin, Detlof, Lust, v. Henniges, Schulze; aus OIII Soeder, Schmalhoff; aus UIII₁ Ahrberg, Heydecke, Deter; aus IV Hohberg, Etdorf, Günther, Bensch; aus V Grabe, Rasehorn; aus VI Schumann, Seidel, Hans Wiersdorff.

Am hebräischen Unterricht haben teilgenommen im S. 8, im W. 5; am wahlfreien Zeichenunterricht im S. 8, im W. 3. Am Chorsingen beteiligten sich die dazu befähigten Schüler. Vom Turnunterricht waren auf Grund eines ärztlichen Zeugnisses 20 Schüler dauernd befreit. Das Zeugnis der wissenschaftlichen Befähigung für den einjährig-freiwilligen Dienst haben erhalten 26 Schüler.

Die Zahl der Schüler betrug:

Im Sommer:

	Einheimische	Aus dem Herzogtum	Aus andern Ländern	Im ganzen
OI	12	1	3	16
UI	11	2	6	19
OII	17	4	5	26
UII	19	8	11	38
OIII	22	9	3	34
UIII ₁	16	3	1	20
UIII ₂	15	2	4	21
IV	24	2	7	33
V	20	3	3	26
VI	17	1	1	19
	173	35	44	252

Darunter 2 katholischer Konfession, 1 jüdischer Religion.

Im Winter:

OI 15. UI 17. OII 25. UII 35. OIII 34. UIII₁ 20. UIII₂ 22. IV 34. V 25. VI 21.
Zusammen 248.

Zur Nachricht.

Den Eltern und Vormündern unserer Schüler wird der nachstehende Erlaß der Herzogl. Ober-Schul-Kommission betreffend die Schüler, die nach zweijährigem Besuche einer Klasse mit einjährigem Kursus die Versetzungsreife nicht erreichen, hierdurch mitgeteilt und zur Beachtung dringend empfohlen.

„Wenn an den uns unterstehenden höheren Lehranstalten ein Schüler nach zweijährigem Besuche einer Klasse mit einjährigem Kursus infolge von Unfleiß und mangelhafter Befähigung die nötige Reife für die nächstfolgende höhere Klasse nicht erreicht hat, so ist er von dem ferneren Besuche der Anstalt auszuschließen. Ein weiteres Verbleiben ist nur mit unserer besonderen Genehmigung gestattet, diese aber nur dann zu beantragen, wenn mit Sicherheit nachgewiesen werden kann, daß die ungenügenden Leistungen des Schülers nicht auf Mangel an Fähigkeit und Fleiß, sondern auf anderen entschuldigen Ursachen, insbesondere auf längerer Krankheit beruhen. In allen Fällen, in denen zu befürchten steht, daß ein Schüler, der eine Klasse mit einjährigem Kursus im zweiten Jahre besucht, das Ziel derselben nach Verlauf des zweiten Jahres nicht erreichen wird, ist sein Vater oder Vormund von dem Direktor mindestens ein Vierteljahr vor Schluß des Schuljahrs auf diese Möglichkeit, sowie auf die mit der Nichtversetzung verbundenen Folgen schriftlich aufmerksam zu machen.

Es ist selbstverständlich, daß in allen Fällen der in Rede stehenden Art gegen die Verfügung der Entfernung eines Schülers den davon Betroffenen die Beschwerde bei uns freisteht.“ (Verfügung H. O. S. vom 1. Dezember 1896 No. 825.)

Aus einer Bekanntmachung Herzogl. Staatsministeriums, betr. das Übereinkommen der deutschen Bundesregierungen wegen gegenseitiger Anerkennung der von den Gymnasien bzw. Realgymnasien ausgestellten Reifezeugnisse d. d. Braunschweig, 19. März 1899: Diejenigen Schüler der Gymnasien und Realgymnasien, welche später als mit Beginn des drittobersten Jahreskursus (Obersekunda) in eine Anstalt eines Staates eintreten, welchem sie weder durch die Staatsangehörigkeit noch durch den jeweiligen Wohnsitz ihrer Eltern bzw. deren Stellvertreter angehören, haben zur Ablegung der Reifeprüfung die Erlaubnis von der Unterrichtsverwaltung des Staates, dem sie angehören, vorher einzuholen und dem Direktor vorzulegen.

Das Schulgeld beträgt in allen Klassen 120 M. jährlich. Befreit wird auf Antrag in der Regel der älteste von drei Brüdern, die zugleich das Gymnasium besuchen, wenn Fleiß und Betragen gut sind. Schulgelderlaß kann bedürftigen, fleißigen und begabten Schülern von **Obertertia** an bewilligt werden, in den Klassen von Sexta bis Untertertia einschließlich nur in ganz besonderen Fällen. „Bewerbungen um Schulgelderlaß für solche Schüler, deren Eltern ihren Wohnsitz im Herzogtum Braunschweig nicht haben, können nur ausnahmsweise infolge besonderer Umstände Berücksichtigung finden.“ (§ 3 der Anweisung vom 10. 3. 1902.)

Die Wahl der Pension bedarf der vorherigen Genehmigung des Direktors.

Der Unterricht im Sommersemester wird am Dienstag, dem 24. April, nachmittags 2 Uhr beginnen. Die neu aufzunehmenden Schüler werden an demselben Tage vormittags 9 Uhr in den Klassen des Gymnasiums geprüft werden. Dieselben haben Schreibmaterialien, ein Abgangszeugnis der zuletzt besuchten Anstalt und einen Impfschein sowie eine Geburtsurkunde und einen Taufschein mitzubringen. Zur Aufnahme in die Sexta bei Beginn des Kursus ist Latein nicht erforderlich; dagegen werden allgemeine Kenntnisse in der Religionslehre, der deutschen Sprache und namentlich Sicherheit im elementaren Rechnen verlangt.

Der Gymnasialdirektor

Prof. Dr. H. F. Müller

Verzeichnis der eingeführten Schulbücher.

Fächer	Titel der Schulbücher	Klasse									
Religion	Die heilige Schrift	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IV	V	VI		
	Schulgesangbuch	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IV	V	VI		
	Ernesti, Landes-Katechismus	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IV	V	VI		
	Brüggemann, Heilsgeschichte						IV	V	VI		
	Noack, Hilfsbuch für den evangel. Religionsunterricht (Ausg. B)	I	IIa	IIb							
Deutsch	Novum Testamentum Graece	I									
	Paulsiek-Muff, Deutsches Lesebuch I (Berlin, Grote)									V	VI
	dasselbe II										
	dasselbe III						IV				
	Paulsiek-Kinzel, Deutsches Lesebuch (Berlin, Mittler & Sohn)		IIa	IIb	IIIa	IIIb					
Lateinisch	Legerlotz, Mittelhochdeutsches Lesebuch (Velhagen & Klasing)	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IV	V	VI		
	Regeln und Wörterverzeichnis für die deutsche Rechtschreibung	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb					
	Ellendt-Seyffert, Lateinische Grammatik	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb					
	Ostermann-Müller I. Ausg. A mit gramm. Anhang									V	VI
	dasselbe II desgl.										
Griechisch	dasselbe III desgl.						IV				
	dasselbe IV, 1. Abt.				IIIa	IIIb					
	dasselbe IV, 2. Abt.			IIb							
	dasselbe V	I	IIa								
	Caesar de bello Gallico				IIIa	IIIb					
Hebräisch	Virgil, Aeneis		IIa	IIb							
	Ovid, Metamorphosen, Auswahl von Siebelis		IIa	IIb	IIIa						
	Uhle, Griechische Schulgrammatik	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb					
	Wesener, Griechisches Elementarbuch I					IIIb					
	dasselbe II			IIb	IIIa						
Französisch	Xenophon, Anabasis			IIb	IIIa						
	Homer, Odyssee	I	IIa	IIb							
	Homer, Ilias	I									
	Hollenberg, Hebräisches Schulbuch (Berlin, Weidmann)		IIa								
	Biblia Hebraica	I	IIa								
Englisch	Gesenius, Hebräisches Wörterbuch	I	IIa								
	Mangold u. Coste, Grammatik, Ausg. A*	I	IIa								
	Ploetz-Kares, Übungsbuch Ausg. E und Sprachlehre			IIb	IIIa						
	G. Ploetz, Elementarbuch d. franz. Sprache. Ausgabe E					IIIb	IV				
	Gesenius, Elementarbuch der engl. Sprache I		IIa								
Mathematik	dasselbe II	I									
	Scott, Tales of a grandfather		IIa								
	Hercher, Planimetrie 1. Heft. Ausgabe A			IIb	IIIa	IIIb	IV				
	dasselbe 2. Heft		IIa								
	dasselbe 3. Heft	I									
Physik	Clasen u. Bach, Aufgabensammlung 1. u. 2. Heft zu Ausgabe A	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IV				
	Bardeys Aufgabensammlung von Pietzker u. Presler. Neue Ausg.	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb					
	Fölsing, Rechenbuch I								V	VI	
	dasselbe II						IV				
	Jochmann, Grundriß der Experimentalphysik	I	IIa								
Geschichte	R. Waerber, Leitfaden f. d. Unterricht i. d. Physik (Leipz., Hirt & Sohn)			IIb	IIIa						
	Bail, Neuer methodischer Leitfaden f. d. Unterricht in der Zoologie					IIIb	IV	V	VI		
	Bertram, Schulbotanik					IIIb	IV	V	VI		
	Herbst, Historisches Hilfsbuch	I	IIa								
	Eckertz, desgl.			IIb	IIIa	IIIb					
Geographie	Jäger, desgl.						IV				
	Alfred Kirchhoff, Schulgeographie				IIIa	IIIb	IV	V			
	Erk, Sängerbahn I. Heft, 2. Abt.							V	VI		

NB. Von den Schriftstellern wird die Textausgabe verlangt. Neueste Auflagen!

* Fällt allmählich weg.

Namen der Geprüften
1. Friedrich Damköhler
2. Wilhelm Ebert
3. Heinrich Scholze*
4. Otto Witte*
5. Eckhard de Convenent*
6. Robert Breitmeyer*
7. Heinrich Rabe
8. Karl Wilhelmi
9. Arno v. Ingersleben

* Von der mündlichen Prüfung befreit

Ferner sind im Laufe der Zeit folgende Namen in die Liste aufgenommen worden: Graßhoff, v. Otto, Ranft, Maschke, v. Henninges, Schulze; aus O II Deter; aus IV Hohberg, Etzel, Schumann, Seidel, Hans Wiersma.

Am hebräischen Unterricht und Zeichenunterricht im S. 8, in der Lage, die dazu befähigten Schüler. Vom Turnen und Sport sind 20 Schüler dauernd befreit. Der einjährig-freiwilligen Dienst haben

	Einheimische	Aus dem Ausland
O I	12	
U I	11	
O II	17	
U II	19	
O III	22	
U III ₁	16	
U III ₂	15	
IV	24	
V	20	
VI	17	
	173	

Darunter 2 kassierte

O I 15. U I 17. O II 25. U II

Studium u. Beruf
Philologie
Gärtnerei
Philologie
Theologie
Jura
Steuerfach
Marine
Jura
Landwirtschaft

aus UI Kruse; aus OII Kamin, Detlof, Lust, Ahrberg, Heydecke, e, Rasehorn; aus VI

W. 5; am wahlfreien n sich die dazu be- ärztlichen Zeugnisses t Befähigung für den

ern	Im ganzen
	16
	19
	26
	38
	34
	20
	21
	33
	26
	19
	252

eligion.

V 34. V 25. VI 21.

