

Mit diesen Werten erhält man in Rücksicht darauf, dass $p_2 = p_1$ ist:

$$\cos(t_2 - t_1) = [\cos^2 \delta \sin^2 \varphi - \cos c \cos \delta \sin \varphi \cos p_1 - \cos \delta \sin \varphi \cos p_1 + \cos c \cos^2 p_1] : \sin^2 \delta \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 p_1 \cos c}{\cos^2 \varphi}.$$

Nach 4* ist $\cos p_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}$, also

$$\sin^2 p_1 = \frac{\cos^2 \delta - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \delta}.$$

Werden diese Werte in der Gleichung für $\cos(t_2 - t_1)$ substituiert, so wird nach einfacher Rechnung:

$$\cos(t_2 - t_1) = \frac{\cos c - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

und hieraus endlich findet sich:

$$\sin \frac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \varphi} \dots \dots \dots \text{VI.}$$

Tabelle III enthält die nach Gleichung VI berechnete Dauer der kürzesten Dämmerung unter Angabe des Datums, an welchem sie für die dort angegebenen geographischen Breiten eintritt.

Tabelle I.
Dauer der Dämmerung.

a = astronomisch; b = bürgerlich.

1. $\delta = -23^\circ 27'$ (21. Dezember).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	1 19	0 31	35°	1 35	0 38	70°	5 12	2 38
5	1 19	0 31	40	1 43	0 41	75	4 46	
10	1 19	0 31	45	1 53	0 46	80	3 55	
15	1 20	0 32	50	2 6	0 52	84	1 41	
20	1 23	0 33	55	2 26	1 2			
25	1 26	0 34	60	2 57	1 19			
30	1 30	0 36	65	4 3	2 2			

Für $\varphi = 84^\circ 33'$ steht die Sonne bei ihrer oberen Kulmination 18° unter dem Horizonte; für diese und alle höheren Breiten gibt

es an diesem Tage keine astronomische Dämmerung mehr, es ist stets Nacht.

Für $\varphi = 73^{\circ} 33'$ befindet sich die Sonne bei der oberen Kulmination gerade 7° unter dem Horizonte; die bürgerliche Dämmerung dauert hier also $0^h 0^m$. In noch höheren Breiten kann von einer bürgerlichen Dämmerung nicht mehr die Rede sein, da in allen die Sonne bei der oberen Kulmination um mehr als 7° unter dem Horizonte steht.

2. $\delta = -15^{\circ} 38'$ (6. Februar und 5. November).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	1 15	0 29	35°	1 30	0 36	70°	4 0	1 47
5	1 15	0 29	40	1 37	0 38	75	6 45	3 45
10	1 15	0 29	45	1 45	0 42	80	7 0	2 4
15	1 17	0 30	50	1 56	0 47	85	7 56	
20	1 19	0 31	55	2 12	0 53	90	12 0	
25	1 22	0 32	60	2 32	1 2			
30	1 25	0 34	65	3 4	1 18			

Für $\varphi = 87^{\circ} 38'$ beträgt die Dauer der astronomischen Dämmerung genau 12 Stunden; da für diese Breite an den beiden oben genannten Tagen die Sonne bei der unteren Kulmination gerade 18° unter dem Horizonte steht; in noch höheren Breiten fließen Morgen- und Abenddämmerung teilweise in einander.

Für $\varphi = 81^{\circ} 22'$ steht die Sonne bei ihrer oberen Kulmination 7 Grade unter dem Horizonte; eine bürgerliche Dämmerung gibt es also in dieser und noch höheren Breiten an den genannten Tagen nicht mehr.

3. $\delta = -7^{\circ} 49'$ (1. März und 13. Oktober).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	1 13	0 28	35°	1 28	0 34	70°	3 38	1 25
5	1 13	0 28	40	1 34	0 37	75	4 59	1 55
10	1 14	0 29	45	1 42	0 40	80		3 8
15	1 15	0 29	50	1 53	0 44	85		5 24
20	1 17	0 30	55	2 7	0 49	90		
25	1 20	0 31	60	2 26	0 57			
30	1 23	0 33	65	2 54	1 8			

Für $\varphi = 79^{\circ} 49'$ dauert die astronomische Dämmerung die ganze Nacht hindurch, für noch höhere Breiten fließen die Morgen- und Abenddämmerung mehr und mehr in einander.

Für $\varphi = 89^{\circ} 11'$ steht die Sonne bei der oberen Kulmination wieder 7° unter dem Horizonte, also gibt es in dieser Breite keine bürgerliche Dämmerung mehr:

4. $\delta = 0^{\circ} 0'$ (21. März und 23. September).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	1 12	0 28	35°	1 29	0 34	70°	4 18	1 24
5	1 12	0 28	40	1 35	0 37	75		1 52
10	1 13	0 28	45	1 44	0 40	80		2 58
15	1 15	0 29	50	1 52	0 44	85		
20	1 17	0 30	55	2 10	0 49	90		
25	1 20	0 31	60	2 33	0 56			
30	1 24	0 32	65	3 8	1 7			

Für $\varphi = 72^{\circ}$ dauert die astronomische Dämmerung genau 6 Stunden; da an diesen beiden Tagen die Sonne um 6 Uhr morgens auf- und um 0 Uhr abends untergeht, ist somit das Ende der Abenddämmerung zugleich der Anfang der folgenden Morgendämmerung. Für alle nördlicher gelegenen Punkte fließen die beiden Dämmerungen in einander.

Für $\varphi = 83^{\circ}$ und ebenso für alle nördlicher gelegenen Orte dauert die bürgerliche Dämmerung die ganze Nacht hindurch; es wird also nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche gar nicht Nacht.

5. $\delta = +7^{\circ} 49'$ (10. April und 3. September).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m			h m
0°	1 13	0 28	35°	1 32	0 35	70°		1 41
5	1 13	0 28	40	1 40	0 38	75		3 1
10	1 14	0 29	45	1 50	0 41	80		
15	1 16	0 29	50	2 4	0 46	85		
20	1 18	0 30	55	2 26	0 52	90		
25	1 22	0 31	60	3 3	1 1			
30	1 26	0 33	65		1 15			

Für $\varphi = 64^{\circ} 11'$ und alle höheren Breiten dauert die astronomische Dämmerung die ganze Nacht hindurch, abgesehen von jenen Orten, für welche nunmehr die Sonne stets über dem Horizonte bleibt.

Für $\varphi = 75^{\circ} 11'$ dauert die bürgerliche Dämmerung die ganze Nacht hindurch und ebenso für alle Orte von höheren Breiten, insoweit für sie die Sonne noch untergeht.

6. $\delta = +15^{\circ} 38'$ (3. Mai und 10. August).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m			
0°	1 15	0 29	35°	1 39	0 37			
5	1 16	0 29	40	1 49	0 40			
10	1 17	0 30	45	2 4	0 44			
15	1 19	0 30	50	2 28	0 50			
20	1 22	0 31	55	3 20	0 59			
25	1 25	0 33	60		1 14			
30	1 31	0 35	65		1 49			

Für $\varphi = 56^{\circ} 22'$ dauert die astronomische Dämmerung die ganze Nacht, ebenso für Orte von höherer Breite mit Sonnenuntergang resp. -Aufgang.

Für $\varphi = 67^{\circ} 22'$ dauert die bürgerliche Abenddämmerung bis Mitternacht, zu welchem Zeitpunkte die bürgerliche Morgendämmerung beginnt. Für Orte von höherer Breite fließen diese Dämmerungen teilweise in einander, insofern für sie noch ein Sonnenuntergang resp. -Aufgang eintritt.

7. $\delta = +23^{\circ} 27'$ (21. Juni).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m			
0°	1 19	0 31	35°	1 52	0 40			
5	1 20	0 31	40	2 9	0 45			
10	1 21	0 31	45	1 39	0 51			
15	1 24	0 32	50		1 1			
20	1 28	0 33	55		1 20			
25	1 33	0 35	60					
30	1 41	0 37	65					

Für $\varphi = 48^{\circ} 33'$ dauert am 21. Juni die astronomische Dämmerung die ganze Nacht hindurch, ebenso für Orte in höheren Breiten, wenn für sie an diesem Tage die Sonne noch untergeht.

Für $\varphi = 59^{\circ} 33'$ dauert die bürgerliche Dämmerung die ganze Nacht hindurch und ebenso für höhere Breiten, insofern die Sonne für sie noch untergeht.

Um angeben zu können, zu welcher Tageszeit die Dämmerung jeweils eintritt und endet, ist es nötig, die Zeit des Auf- und Unterganges der Sonne zu kennen.

In der folgenden Tabelle I^a sollen nun für die in Tafel I benutzten Deklinationen die Zeiten des Auf- und Unterganges der Sonne an allen dort gebrauchten geographischen Breiten mitgeteilt werden.

Tabelle I^a.

Wahre Zeiten des wahren Auf- und Unterganges der Sonne.

1. $\delta = -23^{\circ} 27'$ (21. Dezember).

φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang	φ	Aufgang	Untergang
	h m	h m		h m	h m			
0°	6 0	6 0	35°	7 11	4 49			
5	6 9	5 51	40	7 25	4 35			
10	6 18	5 42	45	7 43	4 17			
15	6 27	5 33	50	8 5	3 55			
20	6 36	5 24	55	8 33	3 27			
25	6 47	5 13	60	9 15	2 45			
30	6 58	5 2	65	10 34	1 26			

Für alle Orte, deren geographische Breite $\varphi = 66^{\circ} 33'$ beträgt, kommt der Sonnenmittelpunkt bei der oberen Kulmination für einen Augenblick in den Horizont des Beobachters, um aber sofort wieder unter den Horizont hinabzusinken; es kann also hier von einem Auf- und Untergange der Sonne nicht mehr die Rede