

Die meisten unserer Kalender enthalten ausser anderen astronomischen Angaben auch die Zeit des Auf- und Unterganges der Sonne; daraus kann sich jeder mühelos die Dauer des Tages berechnen, da man ja darunter die Zeit versteht, welche vom Aufgange der Sonne bis zu ihrem Untergange verfliesst.

Der Tag beginnt nicht plötzlich mit dem Aufgange der Sonne und ebenso wenig endet er plötzlich mit ihrem Untergange, sodass von einem Sonnenuntergange bis zum nächstfolgenden Aufgange vollständige Finsternis herrscht. Geraume Zeit vor ihrem Aufgange und ebenso nach ihrem Untergange ist die ganze Umgebung des Beobachters schon resp. noch beleuchtet, wenn auch die Beleuchtung weniger intensiv ist, als wenn die Sonne über dem Horizonte des Beobachters steht.

Dieses Licht von geringerer Intensität als das Tageslicht nennt man das Dämmerlicht, die Dämmerung, und man spricht deshalb von der Morgendämmerung und Abenddämmerung.

Aus eigener Erfahrung weiss wohl jeder, dass die Sonne, auch wenn sie für seinen Standort schon untergegangen ist, doch die über seinem Horizonte gelegenen Punkte noch um so länger bescheint, je höher diese über dem Horizonte liegen. Daraus wird zu schliessen sein, dass die Sonne für die höheren Schichten der Atmosphäre später untergeht als für den Beobachter auf der Oberfläche der Erde.

Diese von der Sonne beschienenen oberen Schichten der Atmosphäre reflektieren das von der Sonne erhaltene Licht auch nach der Oberfläche der Erde, wodurch eben für den Erdenbewohner die Dämmerung entsteht. Der Beobachter erhält also vor Aufgang und ebenso nach Untergang der Sonne zwar nicht

mehr direktes, wohl aber reflektiertes Sonnenlicht in allmählich zunehmender resp. abnehmender Menge.

Nach den Beobachtungen hört die Sonne auf, Teile des über dem Horizonte des Beobachters befindlichen Abschnitts der Atmosphäre zu beleuchten, wenn sie sich etwa 18 Grad unter dem Horizonte befindet. Der Augenblick, in welchem sich die Sonne in dieser Tiefe unter dem Horizonte befindet, ist daher für den Beobachter der Anfang resp. das Ende der astronomischen Dämmerung.

Verschieden von dieser ist die bürgerliche Dämmerung, während welcher gewöhnliche Druckschrift vor Aufgang resp. nach Untergang der Sonne ohne Anstrengung der Augen gelesen werden kann; sie beginnt resp. endet, wenn die Sonne etwa 7 Grad unter dem Horizonte des Beobachters steht.

Wie aus dem Dargelegten ersichtlich sein dürfte, werden die Beleuchtungsverhältnisse der Erde durch die Kalenderangaben über die Zeit des Auf- und Unterganges der Sonne keineswegs genügend dargestellt, da keine Angaben über die Dauer der Dämmerung gemacht werden.

Da ich nirgends solche Angaben auffinden kann, so erachte ich es als keine ganz überflüssige Arbeit, wenn ich im Nachfolgenden die Dämmerungsverhältnisse auf der Oberfläche der Erde etwas näher darlege und damit die Kenntnis der Beleuchtungsverhältnisse der Erde durch die Sonne weiteren Kreisen zugänglich mache.

A.

Um die Dauer der Dämmerung zu finden, betrachte man das sphärische Dreieck Pol*) — Zenith — Mittelpunkt der Sonne; bezeichnet man mit t_1 den Stundenwinkel der Sonne beim Untergange, mit τ die Dauer der Dämmerung und die Zenithdistanz der Sonne beim Ende der Dämmerung mit $90^\circ + c$, so ist in dem genannten Dreiecke die Seite Pol — Sonnenmittelpunkt $= 90^\circ - \delta$, die Seite Pol — Zenith $= 90^\circ - \varphi$ und die 3. Seite $= 90^\circ + c$, sowie der Winkel am Pol $= t_1 + \tau = t_2$; aus diesem Dreiecke ist dann:

$$\begin{aligned} \cos (90^\circ + c) &= \cos (90^\circ - \varphi) \cos (90^\circ - \delta) \\ &+ \sin (90^\circ - \varphi) \sin (90^\circ - \delta) \cos t_2. \end{aligned}$$

*) Pol = Nordpol des Himmelsgewölbes.

Nach einigen leicht ersichtlichen Transformationen ergibt sich hieraus:

$$\cos(90^\circ + c) = \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} t_2$$

und hieraus:

$$\sin \frac{1}{2} t_2 = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} [(90^\circ + c) + (\varphi - \delta)] \sin \frac{1}{2} [(90^\circ + c) - (\varphi - \delta)]}{\cos \varphi \cos \delta}}$$

In dieser Gleichung bedeutet φ die geographische Breite des Beobachters, δ die Deklination der Sonne und je nachdem die Dauer der astronomischen oder der bürgerlichen Dämmerung zu berechnen ist, hat man $c = 18^\circ$ oder $c = 7^\circ$ zu setzen.

Hat man mit Hilfe dieser Gleichung $t_2 = t_1 + \tau$ berechnet, so ist noch für die gerade geltende Deklination der Sonne und die geographische Breite des in Betracht kommenden Erdortes die Zeit des Sonnenunterganges zu berechnen; es ist dann die Dauer der Dämmerung gegeben durch:

$$t_2 - t_1 = \tau.$$

Auf diesem Wege wurde die Dauer der bürgerlichen und der astronomischen Dämmerung berechnet und die Resultate in der unten folgenden Tabelle I für die dort angegebenen Sonnen-deklinationen und geographischen Breiten zusammengestellt.

B.

Um die Dämmerungserscheinungen vollständig beurteilen zu können, sind noch die beiden Fragen zu beantworten: unter welchen Bedingungen erreicht die Dämmerungsdauer a) ihren grössten, b) ihren kleinsten Wert?

a.

Die Dämmerungsdauer hat offenbar dann ihren grössten Wert, wenn die Dämmerung selbst die ganze Nacht hindurch andauert.

Soll das Ende der Abenddämmerung schon der Anfang der Morgendämmerung sein, so muss $t_2 = 12^h = 180^\circ$, also $\frac{1}{2} t_2 = 90^\circ$ betragen; dann wird aber $\sin \frac{1}{2} t_2 = 1$ werden und die in A zur

Berechnung der Dämmerungsdauer aufgestellte Gleichung geht dann in die folgende über:

$$1 = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} [(90^\circ + c) + (\varphi - \delta)] \sin \frac{1}{2} [(90^\circ + c) - (\varphi - \delta)]}{\cos \varphi \cos \delta}}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cos \delta &= \sin \frac{1}{2} [(90^\circ + c) + (\varphi - \delta)] \sin \frac{1}{2} [(90^\circ + c) - (\varphi - \delta)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos (\varphi - \delta) - \cos (90^\circ + c)] \text{ oder} \\ 2 \cos \varphi \cos \delta - \cos (\varphi - \delta) &= -\cos (90^\circ + c) \text{ und hieraus:} \\ \cos (\varphi + \delta) &= \cos [180^\circ - (90^\circ + c)] = \cos (90^\circ - c), \text{ somit} \\ \varphi + \delta &= 90^\circ - c. \end{aligned}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so dauert die Dämmerung die ganze Nacht hindurch, man hat eine sogenannte helle Nacht.

Am 21. Juni erreicht die Deklination der Sonne ihren Maximalwert $+23^\circ 27'$; an diesem einzigen Tage wird in der nördlichen Erdhälfte die astronomische Dämmerung die ganze Nacht hindurch andauern für alle Orte, deren geographische Breite nach obiger Gleichung beträgt:

$$\varphi = 90^\circ - c - \delta = 90^\circ - 18^\circ - 23^\circ 27' = 48^\circ 33'.$$

Dies ist nahezu die geographische Breite von Strassburg; hieraus folgt, dass auf der nördlichen Erdhälfte nur jene Orte helle Nächte haben können, deren geographische Breite grösser als $48^\circ 33'$ ist, dass dagegen für alle Orte zwischen dem Aequator und dem Parallel von $48^\circ 33'$ diese Erscheinung nicht möglich ist.

Aus der obigen Gleichung folgt noch weiter, dass die Zahl der hellen Nächte um so grösser wird, je grösser die geographische Breite eines Ortes ist, da dann auch Deklinationen der Sonne, die weniger als $23^\circ 27'$ betragen, der aufgestellten Gleichung genügen.

Alles hierher Gehörige ist in Tabelle II eingetragen.

b.

Aus dem Dreiecke Pol—Zenith—Sonnenmittelpunkt hat man, wenn der Winkel am Mittelpunkte der Sonne mit p bezeichnet wird:

$$\sin t : \sin p = \sin (90^\circ - h) : \sin (90^\circ - \varphi) \text{ oder}$$

$$1. \sin t \cos \varphi = \sin p \cos h.$$

Es ist ferner nach dem Satze über fünf aufeinanderfolgende Stücke des Dreiecks:

$$\sin(90^\circ - h) \cos p = \sin(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \varphi) - \cos(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \varphi) \cos t \text{ oder}$$

$$2. \cos h \cos p = \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t.$$

Endlich nach dem Kosinussatze für die Seiten:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cos t,$$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos(90^\circ - h) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - h) \sin(90^\circ - \delta) \cos p$$

oder

$$3. \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$4. \sin \varphi = \sin h \sin \delta + \cos h \cos \delta \cos p.$$

Da die Dämmerung beginnt, wenn die Sonne eben untergeht und in diesem Augenblicke für den Sonnenmittelpunkt $h = 0$ ist, so gehen für diesen Moment die vier obigen Gleichungen, wenn man in ihnen den Grössen t und p den Index 1 gibt, über in die folgenden:

$$1^*. \sin t_1 \cos \varphi = \sin p_1$$

$$2^*. \cos p_1 = \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t_1$$

$$3^*. 0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_1$$

$$4^*. \sin \varphi = \cos \delta \cos p_1.$$

Die Abenddämmerung endigt, wenn der Mittelpunkt der Sonne c° (18° für die astronomische, 7° für die bürgerliche Dämmerung) unter dem Horizonte steht, wenn also $h = -c^\circ$ ist; die vier ursprünglichen Formeln nehmen dann folgende Gestalt an, wenn man die Grössen t und p mit dem Index 2 versieht:

$$1^{**}. \sin t_2 \cos \varphi = \sin p_2 \cos c$$

$$2^{**}. \cos c \cos p_2 = \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t_2$$

$$3^{**}. - \sin c = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_2$$

$$4^{**}. \sin \varphi = -\sin c \sin \delta + \cos c \cos \delta \cos p_2.$$

t_2 ist der Stundenwinkel beim Ende, t_1 der für den Beginn der Abenddämmerung; die Dauer der Dämmerung ist also gegeben durch $t_2 - t_1$.

Um nun zu entscheiden, ob $t_2 - t_1$ ein Minimum wird, sind die beiden ersten Differentialquotienten dieser Grösse zu bilden, wobei zu beachten ist, dass für einen bestimmten Beobachtungsort die Grössen δ , t_2 , t_1 , p_2 und p_1 die Variabeln, dagegen φ und c konstant sind.

Durch Differentiation der Gleichung 3** erhält man:

$$0 = \sin \varphi \cos \delta \, d\delta - \cos \varphi \cos t_2 \sin \delta \, d\delta - \cos \varphi \cos \delta \sin t_2 \, dt_2$$

und hieraus:

$$\frac{dt_2}{d\delta} = \frac{\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t_2}{\cos \varphi \cos \delta \sin t_2}.$$

Nun ist nach 2**:

$$\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t_2 = \cos c \cos p_2;$$

$$\text{aus 1** ist: } \sin t_2 = -\frac{\sin p_2 \cos c}{\cos \varphi}, \text{ somit wird}$$

$$\frac{dt_2}{d\delta} = \frac{\cos c \cos p_2}{\cos \varphi \cos \delta \cdot \frac{\sin p_2 \cos c}{\cos \varphi}} = \frac{\cotg p_2}{\cos \delta} \dots \dots \dots \text{ I}$$

Durch Differentiation der Gleichung 3* ergibt sich:

$$\frac{dt_1}{d\delta} = \frac{\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t_1}{\cos \varphi \cos \delta \sin t_1};$$

hieraus folgt mit Rücksicht auf 2* und 1*:

$$\frac{dt_1}{d\delta} = \frac{\cos p_1}{\cos \varphi \cos \delta \cdot \frac{\sin p_1}{\cos \delta}} = \frac{\cotg p_1}{\cos \delta} \dots \dots \dots \text{ II.}$$

Aus I und II aber wird:

$$\frac{d(t_2 - t_1)}{d\delta} = \frac{\cotg p_2 - \cotg p_1}{\cos \delta} \dots \dots \dots \text{ III.}$$

Der erste Differentialquotient für die Dämmerungsdauer wird also zu Null, wenn $p_2 = p_1$ ist, das heisst wenn in dem Dreieck Pol—Zenith—Sonnenmittelpunkt die Winkel am Sonnenmittelpunkte beim Beginn und Ende der Dämmerung einander gleich sind.

Durch Differentiation der Gleichung III wird ferner:

$$\frac{d^2(t_2 - t_1)}{d\delta^2} = \frac{1}{\cos^2 \delta} \left[\frac{\cos \delta}{\sin^2 p_1} \cdot \frac{dp_1}{d\delta} - \frac{\cos \delta}{\sin^2 p_2} \cdot \frac{dp_2}{d\delta} + (\cotg p_2 - \cotg p_1) \sin \delta \right].$$

Um die Werte $\frac{dp_1}{d\delta}$ und $\frac{dp_2}{d\delta}$ zu gewinnen, differentiire man die Gleichungen 4* und 4**; es ergibt sich:

$$\frac{dp_1}{d\delta} = -\frac{\cos p_1 \sin \delta}{\sin p_1 \cos \delta} = -\cotg p_1 \operatorname{tg} \delta$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_2}{d\delta} &= -\frac{\sin c \cos \delta}{\cos c \cos \delta \sin p_2} - \frac{\cos c \cos p_2 \sin \delta}{\cos c \cos \delta \sin p_2} \\ &= -\frac{\operatorname{tg} c}{\sin p_2} - \cotg p_2 \operatorname{tg} \delta. \end{aligned}$$

Diese Werte nun in den Ausdruck für den zweiten Differentialquotienten der Dämmerungsdauer gesetzt, gibt:

$$\frac{d^2(t_2 - t_1)}{d\delta^2} = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos \delta \sin^3 p_2} - \frac{\sin \delta}{\cos^2 \delta} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin^2 p_1} \right) \cotg p_1 - \left(1 + \frac{1}{\sin^2 p_2} \right) \cotg p_2 \right].$$

Für $p_2 = p_1$ wird somit:

$$\frac{d^2(t_2 - t_1)}{d\delta^2} = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos \delta \sin^3 p_2} \dots \dots \dots \text{IV.}$$

Da $\operatorname{tg} c$, $\cos \delta$ und $\sin^3 p_2$ unter allen Umständen positive Grössen sind (das negative Vorzeichen von c ist in den Gleichungen 1** — 4** schon berücksichtigt), wird also der zweite Differentialquotient der Dämmerungsdauer eine positive Grösse, die Dämmerungsdauer selbst also ein Minimum, wenn $p_2 = p_1$ ist.

Um nun die Deklination der Sonne zu finden, bei welcher für einen Ort von der geographischen Breite φ das Minimum der Dämmerungsdauer eintritt, bestimme man aus 4* den Wert für $\cos p_1$ und aus 4** den für $\cos p_2$; es findet sich:

$$\cos p_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta} \quad \cos p_2 = \frac{\sin \varphi + \sin c \sin \delta}{\cos c \cos \delta}.$$

Da für das Minimum $p_1 = p_2$, also auch $\cos p_1 = \cos p_2$ ist, so hat man die Gleichung:

$$\sin \varphi = \frac{\sin \varphi + \sin c \sin \delta}{\cos c} \text{ und hieraus:}$$

$$\sin \delta = - \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \dots \dots \dots \text{V.}$$

Ist δ bestimmt, so kann auch die Zeit, zu welcher das Minimum der Dämmerungsdauer eintritt, als bekannt angesehen werden.

Es erübrigt noch, einen Ausdruck aufzustellen, mit Hilfe dessen die Dauer der kürzesten Dämmerung berechnet werden kann.

Es ist aus:

$$1^{**}: \sin t_2 = \frac{\sin p_2 \cos c}{\cos \varphi}$$

$$2^{**}: \cos t_2 = \frac{\cos \delta \sin \varphi - \cos c \cos p_2}{\sin \delta \cos \varphi}$$

$$1^*: \sin t_1 = \frac{\sin p_1}{\cos \varphi}$$

$$2^*: \cos t_1 = \frac{\cos \delta \sin \varphi - \cos p_1}{\sin \delta \cos \varphi}$$

Mit diesen Werten erhält man in Rücksicht darauf, dass $p_2 = p_1$ ist:

$$\cos(t_2 - t_1) = [\cos^2 \delta \sin^2 \varphi - \cos c \cos \delta \sin \varphi \cos p_1 - \cos \delta \sin \varphi \cos p_1 + \cos c \cos^2 p_1] : \sin^2 \delta \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 p_1 \cos c}{\cos^2 \varphi}.$$

Nach 4* ist $\cos p_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}$, also

$$\sin^2 p_1 = \frac{\cos^2 \delta - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \delta}.$$

Werden diese Werte in der Gleichung für $\cos(t_2 - t_1)$ substituiert, so wird nach einfacher Rechnung:

$$\cos(t_2 - t_1) = \frac{\cos c - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

und hieraus endlich findet sich:

$$\sin \frac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \varphi} \dots \dots \dots \text{VI.}$$

Tabelle III enthält die nach Gleichung VI berechnete Dauer der kürzesten Dämmerung unter Angabe des Datums, an welchem sie für die dort angegebenen geographischen Breiten eintritt.

Tabelle I.
Dauer der Dämmerung.

a = astronomisch; b = bürgerlich.

1. $\delta = -23^\circ 27'$ (21. Dezember).

φ	a	b	φ	a	b	φ	a	b
	h m	h m		h m	h m		h m	h m
0°	1 19	0 31	35°	1 35	0 38	70°	5 12	2 38
5	1 19	0 31	40	1 43	0 41	75	4 46	
10	1 19	0 31	45	1 53	0 46	80	3 55	
15	1 20	0 32	50	2 6	0 52	84	1 41	
20	1 23	0 33	55	2 26	1 2			
25	1 26	0 34	60	2 57	1 19			
30	1 30	0 36	65	4 3	2 2			

Für $\varphi = 84^\circ 33'$ steht die Sonne bei ihrer oberen Kulmination 18° unter dem Horizonte; für diese und alle höheren Breiten gibt