

Gesamtergebniß des Zufalls auf die Länge sein wird, sondern auch, welche die äußersten Grenzen der Abweichung von jenem Gesamtergebniß sind, die man gelegentlich als das Resultat einer geringeren Anzahl von Instanzen erwarten darf.

Die Erwägung der letzteren Frage und jede weitere Ausführung der ersteren gehört zu dem, was die Mathematiker die Lehre von den Chancen oder, mit einem anspruchsvollerem Ausdrucke, die Theorie der Wahrscheinlichkeit nennen.

Achtzehntes Capitel.

Von der Berechnung der Chancen.

§. 1. „Die Wahrscheinlichkeit“, sagt Laplace*), „hat zum Theil mit unserer Unkenntniß, zum Theil mit unserer Kenntniß zu thun. Wir wissen, daß von drei oder mehr Ereignissen eines und nur eines eintreten muß; aber es ist nichts vorhanden, was uns dazu führen könnte, irgendeines von ihnen eher als die anderen zu erwarten. In diesem Zustande der Unentschiedenheit können wir uns unmöglich über ihr Eintreffen mit Gewißheit aussprechen. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß nicht gerade irgendeines von diesen Ereignissen, das wir beliebig gewählt haben, stattfinden wird, weil wir mehrere Fälle sehen, die alle gleich gut möglich sind und die sein Eintreten ausschließen, während nur ein einziger es begünstigt.

„Die Lehre von der Wahrscheinlichkeit besteht darin, daß man alle Ereignisse derselben Art auf eine gewisse Anzahl von gleich möglichen Fällen zurückführt, das heißt von solchen, über deren Eintreten wir gleich ungewiß sind, und daß man ferner die Zahl der Fälle bestimmt, die dem Ereignisse, dessen Wahrscheinlichkeit wir zu bestimmen suchen, günstig sind. Das Verhältniß dieser Zahl zu der Zahl aller möglichen Fälle ist das Maß der Wahrscheinlichkeit, ein Bruchtheil, der zu seinem Zähler die Zahl der dem Ereigniß günstigen Fälle und zu seinem Nenner die Zahl aller möglichen Fälle hat“.

Zu einer Wahrscheinlichkeitsrechnung sind daher nach Laplace

*) Essai philosophique sur les probabilités. 5. Pariser Ausg. S. 7.

zwei Dinge erforderlich; wir müssen wissen, daß unter mehreren möglichen Ereignissen irgendeines und nicht mehr als eines gewiß eintreten wird, und wir dürfen nicht wissen und keinen Grund haben zu erwarten, daß es eines von diesen Ereignissen eher als ein anderes sein wird. Man hat behauptet, daß dies nicht die einzigen Erfordernisse sind und daß Laplace bei dieser allgemeinen Auseinandersetzung einen nothwendigen Theil der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitslehre übersehen hat. Damit wir zwei Ereignisse für gleich wahrscheinlich erklären können (so hat man gesagt), ist es nicht genug, daß wir wissen, es müsse eines oder das andere eintreten, und daß wir keinen Grund haben, eines mehr als das andere zu erwarten. Die Erfahrung muß uns gezeigt haben, daß die beiden Ereignisse gleich häufig vorkommen. Warum halten wir es, wenn wir ein Zehnkreuzerstück in die Höhe werfen, für gleich wahrscheinlich, daß wir Kopf oder Adler werfen werden? Weil wir wissen, daß in einer großen Anzahl von Würfen Kopf und Adler ungefähr gleich oft vorkommen, und daß, je öfter wir werfen, wir dieser gleichen Häufigkeit um so näher kommen. Wir können dies, wenn wir wollen, durch wirkliche Versuche wissen, oder durch die Erfahrung, die uns das tägliche Leben bei Ereignissen ähnlicher Art bietet, oder aber auf deductivem Wege, in Folge der Wirkung der Gesetze der Mechanik auf einen symmetrischen Körper, auf den Kräfte einwirken, welche der Größe und der Richtung nach in unbestimmter Weise schwanken. Wir können es mit einem Worte durch spezifische Erfahrung oder auf Grund unserer allgemeinen Naturkenntniß wissen. Aber auf die eine oder die andere Weise müssen wir es wissen, wenn wir berechtigt sein sollen, die beiden Ereignisse gleich wahrscheinlich zu nennen, und wenn wir es nicht wüßten, so würden wir ebenso sehr aufs Geradewohl hin handeln, wenn wir auf gleiche Summen, als wenn wir auf ungleiche wetteten.

Diese Ansicht wurde in der ersten Auflage dieses Werkes vertreten; allein ich habe mich seitdem überzeugt, daß die Lehre von der Wahrscheinlichkeit, wie Laplace und die Mathematiker überhaupt sie auffassen, nicht mit jenem Grundfehler behaftet ist, den ich ihr zugeschrieben hatte.

Wir müssen uns erinnern, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nicht eine Eigenschaft des Ereignisses selbst, sondern nur ein Name für den Grad von Gewißheit ist, mit dem wir oder sonst Jemand es erwarten können. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses für Einen ist etwas anderes als die Wahr-

scheinlichkeit desselben Ereignisses für einen Anderen, oder auch für denselben, nachdem er einen Zuwachs an Wissen erworben hat. Die Wahrscheinlichkeit für mich, daß ein Individuum, von dem ich nichts als den Namen weiß, innerhalb eines Jahres sterben wird, wird dadurch ganz und gar verändert, daß ich im nächsten Augenblicke höre, er befinde sich im letzten Stadium der Schwindsucht. Und doch macht dies keinen Unterschied in dem Ereigniß selbst oder in irgendeiner von den Ursachen, von denen es abhängt. Jedes Ereigniß ist an sich gewiß, nicht wahrscheinlich; wüßten wir alles, so würden wir entweder mit Bestimmtheit wissen, daß es eintreten wird, oder aber mit derselben Bestimmtheit, daß es nicht eintreten wird. Aber seine Wahrscheinlichkeit für uns bedeutet den Grad von Zuversicht in unserer Erwartung, zu dem unser gegenwärtiges Wissen uns berechtigt.

Wenn man dies im Auge behält, so wird man, denke ich, zugeben müssen, daß auch dort, wo wir keine Kenntniß irgendeiner Art besitzen, die unsere Erwartungen leiten kann, außer die, daß das, was geschieht, eine von einer gewissen Anzahl von Möglichkeiten sein muß, wir doch noch vernünftigerweise urtheilen können, daß eine Annahme für uns wahrscheinlicher ist als eine andere, und wenn irgendein praktisches Interesse dabei im Spiele ist, so werden wir am besten thun, jenem Urtheile entsprechend zu handeln.

§. 2. Denken wir, man verlangte von uns, wir sollten eine Kugel aus einem Behältniß nehmen, von dem wir nur wissen, daß es sowohl schwarze als weiße Kugeln und keine von irgendeiner anderen Farbe enthält. Wir wissen, daß die Kugel, die wir wählen werden, entweder eine schwarze oder eine weiße sein wird. Aber wir haben keinen Grund, schwarz eher als weiß oder umgekehrt zu erwarten. Wenn wir in diesem Fall genöthigt sind, eine Wahl zu treffen, und auf die eine oder andere Annahme etwas zu wagen, so wird es, als Sache des Zufalls, vollkommen gleichgültig sein, auf welche wir es wagen, und wir werden genau so handeln, wie wir gehandelt hätten, wenn wir im vorhinein gewußt hätten, daß das Behältniß eine gleiche Zahl von schwarzen und von weißen Kugeln enthält. Allein obgleich unser Verhalten dasselbe wäre, so wäre es doch nicht auf irgendeine Vermuthung gegründet, daß die Kugeln in der That in dieser Weise gleich getheilt sind; denn wir könnten im Gegentheil aus authentischer Quelle wissen, daß das Behältniß neunundneunzig

Kugeln von der einen Farbe und nur eine von der anderen enthält, und doch bleibt, wenn man uns nicht sagt, welche Farbe die eine Kugel und welche die neunundneunzig hat, das Ziehen einer weißen und einer schwarzen Kugel für uns gleich wahrscheinlich; wir haben keinen Grund, an das Eine eher als an das Andere etwas zu setzen; die Wahl zwischen den beiden wird etwas Gleichgültiges sein, mit anderen Worten, es ist eine gleiche Chance.

Aber man denke nun, daß statt zweier Farben drei vorhanden sind, — weiß, schwarz und roth, und daß wir über das Verhältniß ihrer Vertheilung völlig im Unklaren sind. Wir hätten dann keinen Grund, das Eine mehr als das Andere zu erwarten, und wenn wir wetten müßten, so würden wir mit völliger Gleichgültigkeit auf roth, weiß oder schwarz setzen. Aber wäre es uns auch gleichgültig, ob wir für oder gegen eine Farbe, weiß z. B. wetteten? Gewiß nicht. Eben darum, weil schwarz und roth, jedes für sich genommen, gleich wahrscheinlich für uns ist, als weiß, müssen die beiden zusammen genommen doppelt so wahrscheinlich sein. Wir würden in diesem Fall nicht=weiß eher als weiß erwarten, und um so viel mehr, daß wir Eins gegen Zwei daran setzen würden. Allerdings könnten nach allem, was wir wüßten, auch mehr weiße Kugeln als schwarze und rothe zusammengenommen vorhanden sein, und wäre das der Fall, so würden wir unsere Wette, sobald wir mehr davon wüßten, als eine unvortheilhafte erkennen. Aber eben so gut könnten auch nach allem, was wir wüßten, mehr rothe Kugeln als schwarze und weiße oder mehr schwarze als weiße und rothe vorhanden sein, und in diesem Falle würde uns eine Vermehrung unserer Kenntniß lehren, daß unsere Wette vortheilhafter war, als wir gedacht hatten. Im gegenwärtigen Zustande unserer Kenntniß ist eine vernunftgemäße Wahrscheinlichkeit von Zwei zu Eins gegen weiß vorhanden. Kein Verständiger würde eine gleiche Wette zu Gunsten von weiß gegen schwarz und roth wagen, obgleich er es gegen schwarz allein oder gegen roth allein ohne Unklugheit thun könnte.

Die gewöhnliche Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung erscheint daher als haltbar. Auch wenn wir nichts als die Anzahl möglicher und sich wechselseitig ausschließender Fälle kennen, und über ihre verhältnißmäßige Häufigkeit völlig im Dunkeln sind, so können wir Gründe und zahlenmäßig bestimmbare

Gründe haben, einer Voraussetzung eher als einer anderen zu folgen, und dies heißt Wahrscheinlichkeit.

§. 3. Der Grundsatz, nach dem man hier verfährt, ist jedoch einleuchtend genug. Es ist der naheliegende Gedanke, daß, wenn die möglichen Fälle unter verschiedene Arten getheilt sind, unmöglich jede dieser Arten eine Mehrheit des Ganzen ausmachen kann. Im Gegentheil, es muß eine Mehrheit gegen jede Art — höchstens eine ausgenommen — vorhanden sein, und wenn eine Art mehr als ihren Theil im Verhältniß zur Gesamtzahl hat, so müssen die anderen zusammengenommen weniger haben. Geben wir dies zu und nehmen wir an, daß wir keinen Grund zu der Erwartung haben, es werde irgendeine Art eher als die übrigen einen Ueberschuß über den Durchschnitt haben, so folgt daraus, daß wir dies vernünftigerweise von keiner einzigen voraussetzen dürfen, und dies thäten wir, wenn wir zu ihren Gunsten wetteten und somit weniger Chancen erhielten, als im richtigen Verhältniß zu der Gesamtzahl der anderen Arten stünden. Selbst in diesem äußersten Fall der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der ganz und gar nicht auf specieller Erfahrung beruht, ist daher die logische Grundlage des Verfahrens unsere Kenntniß der Gesetze (die Kenntniß, die wir in diesem Zustande eben besitzen), welche die Häufigkeit des Eintretens der verschiedenen Fälle bestimmen; aber in diesem Falle ist die Kenntniß auf das beschränkt, was als allgemein gültig und selbstverständlich weder mit specifischer Erfahrung noch mit Erwägungen, die aus der speciellen Natur des betreffenden Problems entspringen, etwas zu schaffen hat.

Außer in solchen Fällen jedoch, wie es Hazardspiele sind, wo eben unser Zweck Unwissenheit und nicht Kenntniß verlangt, kann ich mir keinen Fall denken, in dem wir uns mit einer derartigen Abschätzung der Chancen zufrieden geben sollten, einer Schätzung, die geradezu auf das Minimum unserer betreffenden Kenntniß gegründet ist. Es ist offenbar, daß bei den farbigen Kugeln ein sehr geringer Grund zur Vermuthung, daß die weißen Kugeln wirklich zahlreicher sind als eine von den beiden anderen Farben, hinreichen würde, um die Gesamtheit unserer in dem früheren Zustande der Indifferenz angestellten Berechnungen als falsch zu erweisen. Er würde uns auf die Stufe einer vorgeschritteneren Kenntniß erheben, auf der die Wahrscheinlichkeiten für uns andere sein würden, als sie vorher waren,

und bei der Abschätzung dieser neuen Wahrscheinlichkeiten hätten wir auf völlig verschiedenen Daten zu fußen, die uns nicht mehr durch ein bloßes Abzählen von Möglichkeiten, sondern durch bestimmte Kenntniß von Thatsachen geliefert wären. Solche Daten zu erhalten, sollte immer unser Bestreben sein, und bei allen Untersuchungen, außer über Gegenstände, die gleich sehr jenseits des Bereiches unserer Mittel der Erkenntniß, wie unseres praktischen Nutzens liegen, können wir derartige Daten gewinnen, wenn nicht gute, so doch solche, die besser sind als gar keine*).

Desgleichen ist es augenfällig, daß, auch wenn die Wahrscheinlichkeiten auf Versuch und Beobachtung gegründet sind, doch eine sehr geringe Vervollkommnung in den Daten durch bessere Beobachtung oder durch genauere Erwägung der speciellen Umstände des Falles von größerem Nutzen ist, als die umsichtigste Anwendung der Rechnung auf Wahrscheinlichkeiten, die auf die Daten in ihrem früheren und mangelhafteren Zustande gegründet sind. Die Vernachlässigung dieser naheliegenden Erwägung hat zu einem Mißbrauch der Wahrscheinlichkeitsrechnung geführt, der sie zu einem wahren Schandfleck der Mathematik gemacht hat. Es genügt, an ihre Anwendung in Bezug auf die Glaubwürdigkeit von Zeugen und die Richtigkeit der Aussprüche von Schwurgerichten zu erinnern. In Betreff der ersten würde der gesunde Menschenverstand lehren, daß es

*) Es scheint mir sogar, daß die Berechnung der Chancen dort, wo keine — weder auf specielle Erfahrung noch auf specielle Folgerung begründete — Daten vorhanden sind, in der ungeheuren Mehrzahl der Fälle schon an der Unmöglichkeit scheitern muß, ein Princip aufzufinden, das als Richtschnur bei der Anlegung der Liste von Möglichkeiten dienen könnte. In dem Fall der farbigen Kugeln fällt uns eine solche Aufzählung nicht schwer, weil wir selbst die Zahl der Möglichkeiten bestimmen. Allein man nehme einen Fall, der den in der Natur vorkommenden ähnlicher ist: statt dreier Farben mögen in dem Verhältnis alle möglichen Farben enthalten sein, wobei wir die vergleichsweise Häufigkeit nicht kennen, mit der verschiedene Farben in den Erzeugnissen der Natur oder der Kunst vorkommen. Wie soll nun die Liste angefertigt werden? Soll jede unterscheidbare Nuance als eine Farbe gelten? Und welches Auge soll in diesem Falle die Entscheidung fällen? Ein gewöhnliches oder ein gebildetes, das Auge eines Malers zum Beispiel? Von der Beantwortung dieser Fragen würde es abhängen, ob die Chancen gegen eine besondere Farbe auf zehn, auf zwanzig oder vielleicht auf hundert gegen eins geschätzt würden. Wüßten wir hingegen erfahrungsmäßig, daß diese Farbe durchschnittlich so und so oft in je hundert oder tausend Fällen vorkommt, so brauchten wir weder von der Häufigkeit noch von der Zahl der anderen Möglichkeiten etwas zu wissen.

unmöglich ist, einen allgemeinen Durchschnitt der Wahrhaftigkeit und der sonstigen Erfordernisse richtiger Zeugenaussagen für die Menschen im Allgemeinen oder für irgendeine Classe derselben aufzustellen. Und selbst wenn es möglich wäre, hieße es die Aufgabe eines Durchschnitts verkennen, wenn man ihn für solch einen Zweck verwenden wollte. Durchschnitte können allerdings Jene, deren Interessen auf dem Spiele stehen, vor einem Irrthum in Betreff des Gesamtergebnisses großer Massen von Fällen bewahren; allein sie sind von unendlich geringem Werth als Grundlage unserer Erwartung in Betreff irgendeines individuellen Falles, es wäre denn der Fall einer von jenen, bei denen die große Mehrzahl vom Durchschnitt nicht weit abweicht. In dem Fall eines Zeugen würden verständige Menschen es vorziehen, ihre Schlüsse aus dem Grad von Uebereinstimmung in seinen Angaben, seinem Verhalten im Kreuzverhör und dem Verhältniß zu ziehen, in dem der Fall selbst zu seinen Interessen, seinen Vorurtheilen und seiner geistigen Befähigung steht, statt einen so rohen Maßstab anzuwenden (selbst wenn es möglich wäre ihn zu bewahrheiten), wie es das Verhältniß zwischen der Anzahl von richtigen und unrichtigen Angaben ist, die er muthmaßlicher Weise im Laufe seines Lebens machen wird.

Ebenso sind einige Mathematiker im Hinblick auf Schwur- oder andere Gerichte von dem Satze ausgegangen, es sei eine, wenigstens geringe, Wahrscheinlichkeit dafür vorhanden, daß das Urtheil jedes einzelnen Richters oder Geschwornen eher richtig als unrichtig sein werde, und sie haben daraus geschlossen, die Wahrscheinlichkeit eines ungerechten Urtheils werde in dem Maße verringert, als die Zahl der daran beteiligten Personen größer werde. Man brauchte daher die Zahl der Richter nur hinlänglich zu vermehren, um einen gerechten Urtheilsspruch beinahe außer Zweifel zu stellen. Ich will nicht auf die Veränderung in der moralischen Stellung des Richters hinweisen, die man dabei völlig übersieht: auf die Vernichtung ihres Gefühls persönlicher Verantwortlichkeit und die Abschwächung ihres Berufseifers, was doch beides die natürliche Folge der Vervielfältigung ihrer Zahl wäre. Ich will nur auf den Trugschluß aufmerksam machen, der darin liegt, daß man aus einem umfassenden Durchschnitt auf Fälle schließt, die nothwendigerweise von jedem Durchschnitt weit abweichen. Es mag wahr sein, daß in allen Fällen zusammengenommen die Meinung eines jeden Richters öfter richtig als unrichtig sein wird; allein man darf nicht vergessen,

daß in allen nicht ganz einfachen Fällen, in allen Fällen, in denen wirklich viel darauf ankommt, wie der Gerichtshof beschaffen ist, der Satz sich wahrscheinlich umkehren ließe. Und davon abgesehen wird die Ursache des Irrthums, sie mag nun in der verwickelten Natur des Falles oder in einem gewöhnlichen Vorurtheil oder Fehlschluß liegen, höchst wahrscheinlich, wenn sie auf einen Richter wirken würde, auch auf alle anderen oder wenigstens auf die Mehrheit in derselben Weise wirken und somit eine irrige Entscheidung statt einer richtigen um so wahrscheinlicher machen, je größer die Zahl der Richter ist.

Dies sind nur Proben von Irrthümern, wie sie häufig von Männern begangen werden, die sich mit den schwierigen algebraischen Formeln für die Abschätzung von Chancen unter verwickelten Voraussetzungen vertraut gemacht haben und es nun vorziehen, mittelst dieser Formeln zu berechnen, welche die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses für einen in der Sache nur halb Unterrichteten ist, statt sich nach den erforderlichen Mitteln umzusehen, um sich besser zu unterrichten. Ehe man die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf irgendeine wissenschaftliche Aufgabe anwendet, muß der Grund zur Schätzung der Chancen dadurch gelegt sein, daß man das höchste erreichbare Maß positiver Kenntniß erwirbt. Diese Kenntniß hat Bezug auf die vergleichsweise Häufigkeit, mit der die verschiedenen Ereignisse thatsächlich auftreten. Für die Zwecke dieses Werkes ist daher die Annahme statthast, daß Urtheile über die Wahrscheinlichkeit einer Thatsache bestimmter Art auf unserer Kenntniß des Verhältnisses zwischen den Fällen beruhen, in denen Thatsachen dieser Art vorkommen, und jenen, in denen sie nicht vorkommen, — eine Kenntniß, die entweder durch specifische Versuche gewonnen oder aus unserer Bekanntschaft sowohl mit den Ursachen, welche die fragliche Thatsache hervorzubringen, wie mit jenen, die sie zu verhindern streben, abgeleitet ist.

Eine derartige Berechnung der Chancen ist auf eine Induction gegründet, und damit sie berechtigt sei, muß die Induction eine triftige sein. Sie ist nicht weniger eine Induction, wenn sie gleich beweist, nicht daß das Ereigniß in allen Fällen einer gegebenen Art, sondern daß es nur in so und so vielen unter einer gegebenen Zahl von Fällen eintritt. Der Bruch, der Mathematikern zur Bezeichnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses dient, drückt das Verhältniß dieser zwei Zahlen aus, die ermittelte Proportion zwischen der Zahl von Fällen, in denen das

Ereigniß eintritt, und der Gesamtzahl aller Fälle, sowohl jener, in denen es eintritt, als derjenigen, in denen es nicht eintritt. Wenn wir Kopf und Adler spielen, so bilden Würfe die betreffende Art von Fällen, und die Wahrscheinlichkeit für Kopf ist gleich ein halb, weil, wenn wir oft genug werfen, etwa ein Mal unter zwei Würfeln Kopf geworfen wird. Im Würfelspiel ist die Wahrscheinlichkeit für Aß ein sechstel, nicht einfach darum, weil es sechs mögliche Würfe gibt, von denen Aß einer ist und weil wir keinen Grund wissen, weshalb das eine eher als das andere vorkommen sollte (obschon ich die Triftigkeit dieser Grundes in Ermangelung eines besseren anerkannt habe), sondern weil wir thatsächlich, entweder durch Schlüsse oder durch Erfahrung, wissen, daß in hundert oder in einer Million von Würfeln Aß ungefähr den sechsten Theil dieser Zahl oder ein Mal unter sechs Malen geworfen wird.

§. 4. Ich sage „entweder durch Schlüsse oder durch Erfahrung“, worunter ich spezifische Erfahrung verstehe. Allein bei der Schätzung von Wahrscheinlichkeiten ist es nicht gleichgültig, aus welcher dieser beiden Quellen unsere Ueberzeugung geschöpft ist. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, bloß nach seiner erfahrungsmäßigen Häufigkeit in der Vergangenheit berechnet, bietet eine minder sichere Grundlage für die Praxis, als seine Wahrscheinlichkeit, wie sie sich aus einer gleich genauen Kenntniß der Häufigkeit des Auftretens seiner Ursachen ergibt.

Die Verallgemeinerung, die dahin geht, daß ein Ereigniß in zehn unter je hundert Fällen einer gegebenen Art eintritt, ist eine ebenso wahrhafte Induction, als wenn die Verallgemeinerung dahin gelautet hätte, daß es in allen Fällen eintritt. Allein wenn wir diesen Satz durch ein bloßes Zusammenzählen der wirklichen erfahrungsmäßigen Instanzen und durch die Gegenüberstellung der Zahl von Fällen, in denen A anwesend war, und der Zahl von Fällen, in denen es abwesend war, gewinnen, so ruht unser Verfahren nur auf der Uebereinstimmungsmethode, und der Satz hat nur die Stärke eines empirischen Gesetzes. Wir können einen Schritt darüber hinaus thun, wenn es uns gelingt, zu den Ursachen, auf denen das Eintreten oder Nicht-eintreten von A abhängt, aufzusteigen und die vergleichsweise Häufigkeit der dem Phänomen günstigen und ungünstigen Ursachen abzuschätzen. Dies sind Daten einer höheren Ordnung, welche das aus der bloßen Zahlenzusammenstellung der be-

jahenden und verneinenden Instanzen gewonnene empirische. Gesetz entweder berichtigen oder bekräftigen werden, und in dem einen wie dem anderen Falle werden wir ein richtigeres Maß für die Wahrscheinlichkeit gewinnen, als jene bloße Zahlenzusammenstellung uns bieten konnte. Man hat mit Recht darauf hingewiesen, daß bei der Art von Beispielen, die man bei diesem Gegenstande zumeist gebraucht, dem Fall von Kugeln in einem Behältniß, die Abschätzung der Wahrscheinlichkeiten von ursächlichen Gründen getragen wird, die stärker sind als die spezifische Erfahrung. „Wenn sich in einem Behältniß neun schwarze Kugeln und eine weiße befindet, warum erwarten wir neun Mal so stark (mit anderen Worten, neun Mal so oft, da Häufigkeit hier das Maß der Stärke unserer Erwartung ist) eine schwarze Kugel zu ziehen als eine weiße? Augenscheinlich darum, weil die örtlichen Bedingungen dem ersteren Ereigniß neun Mal so günstig sind, denn die Hand kann auf neun Stellen treffen und einer schwarzen Kugel begegnen, während sie nur auf eine Stelle treffen und eine weiße finden kann; genau aus demselben Grund, weshalb wir nicht darauf rechnen, einen Freund aus einem Gewühl herauszufinden, da unsere Begegnung an viele und schwierige Bedingungen geknüpft ist. Dies würde natürlich nicht in derselben Ausdehnung gelten, wenn die weißen Kugeln von geringerer Größe wären als die schwarzen, und desgleichen würde die Wahrscheinlichkeit nicht dieselbe bleiben, denn die größere Kugel hätte weit mehr Aussicht der Hand zu begegnen*)."

Es ist in der That einleuchtend, daß, sobald wir einmal die Ursächlichkeit als ein durchgängig allgemeines Gesetz anerkannt haben, wir auch jede Erwartung künftiger Ereignisse vernunftgemäßer Weise nur darauf gründen können. Für Jeden, der da glaubt, daß jedes Ereigniß von Ursachen abhängt, ist die Thatsache, daß etwas ein Mal geschehen ist, ein Grund es wieder zu erwarten, einfach darum, weil dies beweist, daß eine seiner Erzeugung adäquate Ursache vorhanden ist oder eventuell vorhanden sein wird**). Die bloße Häufigkeit des bestimmten Er-

*) Prospective Review, Februarheft 1850.

**) „Wäre dem nicht so, warum sänden wir die Wahrscheinlichkeit durch die erste Instanz um so viel mehr als durch jede folgende gesteigert? Warum sonst, als weil die erste Instanz uns die Möglichkeit des Ereignisses (eine demselben adäquate Ursache) ergibt, während jeder weitere Fall uns nur die Häufigkeit der erforderlichen Bedingungen ergibt? Sieht man

eignisses kann, so lange jede Muthmaßung in Betreff seiner Ursache aus dem Spiele bleibt, nur zu einer Inductio per enumerationem simplicem Anlaß geben, und die daraus abgeleiteten precären Schlüsse müssen sofort das Feld räumen und vom Schauplatz verschwinden, sobald das Causal-Princip denselben betritt. Ungeachtet dieser abstracten Vorzüge einer auf die Kenntniß der Ursachen gegründeten Schätzung der Wahrscheinlichkeit ist es doch eine Thatsache, daß in fast all den Fällen, in denen sich die Chancen mit hinreichender Bestimmtheit abschätzen lassen, um einer numerischen Darstellung einen praktischen Werth zu verleihen, die Zahlendaten nicht aus der Erkenntniß der Ursachen, sondern aus der Erfahrung des täglichen Lebens geschöpft sind. Die Wahrscheinlichkeiten für die Erhaltung des Lebens in verschiedenen Altersstufen oder in verschiedenen Klimaten, die Wahrscheinlichkeiten für die Genesung von einer bestimmten Krankheit, die Chancen für die Geburt männlicher oder weiblicher Kinder, für die Zerstörung von Häusern oder anderen Eigenthums durch Feuer, für das Untergehen eines Schiffes auf einer bestimmten Fahrt u. s. w. werden aus den Todtenregistern, den Hospitalberichten, den Matrikelverzeichnissen, Schiffbruchslisten u. s. w. gewonnen,

von jeder Bezugnahme auf eine Ursache ab, so verliert das Wort Möglichkeit seine Bedeutung; und doch ist es einleuchtend, daß wir das Ereigniß vor seinem Eintreffen für unmöglich gehalten, das heißt, geglaubt haben konnten, daß in der Welt keine Naturkraft vorhanden ist, die im Stande ist, es zu erzeugen. . . . Nach dem ersten Eintreffen, welches mithin für die ganze Wahrscheinlichkeit wichtiger ist, als irgendein anderer einzelner Fall (weil es die Möglichkeit beweist), wird die Anzahl der Fälle wichtig als ein Maßstab für die Stärke oder die Ausdehnung der Ursache und ihre Unabhängigkeit von irgendeiner bestimmten Zeitepoche. Nehmen wir z. B. einen ungeheuren Sprung und suchen wir die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, mit der er eine gewisse Zahl von Malen nach einander gelingen wird. Die erste Instanz als diejenige, die seine (vorher zweifelhafte) Möglichkeit beweist, ist von der größten Wichtigkeit; aber jeder folgende Sprung zeigt immer mehr, daß die Kraft uns, und zwar in erheblichem Maße und mit Sicherheit, zu Gebote steht und steigert somit die Wahrscheinlichkeit; und Niemand würde hier daran denken, von einem Falle geradezu auf den nächsten zu schließen, ohne auf die Naturkraft zurückzugehen, die jeder Sprung dargethan hat. Ist es daher nicht augenscheinlich, daß wir niemals“ (sagen wir lieber, daß wir nicht auf einer vorgerückten Stufe unserer Kenntniß) „unmittelbar von dem Eintreffen eines Ereignisses auf die Wahrscheinlichkeit seines Wiedereintreffens schließen, sondern daß wir auf die Ursache Bezug nehmen, und die vergangenen Fälle als eine Anzeige, die uns auf die Ursache hinweist, und die Ursache als unseren Wegweiser für die Zukunft betrachten.“

das heißt, aus der erfahrungsmäßigen Häufigkeit nicht der Ursachen, sondern der Wirkungen. Der Grund liegt darin, daß sich bei all diesen Classen von Thatsachen die Ursachen der unmittelbaren Beobachtung entweder gar nicht, oder nicht mit der erforderlichen Genauigkeit zugänglich machen lassen, und wir keine Mittel besitzen, über ihre Häufigkeit anders als durch das empirische Gesetz zu urtheilen, welches die Häufigkeit der Wirkungen uns an die Hand gibt. Der Schluß beruht darum nicht weniger lediglich auf dem Causalprincip. Wir schließen von einer Wirkung auf eine gleichartige Wirkung, indem wir durch die Ursache hindurchgehen. Wenn der Actuar eines Versicherungsbureaus aus seinen Tabellen schließt, daß unter hundert gegenwärtig lebenden Personen von einem bestimmten Alter fünf im Durchschnitt das Alter von siebenzig Jahren erreichen werden, so ist sein Schluß berechtigt; nicht einfach darum, weil dies die Zahl der Menschen ist, die in der Vergangenheit siebenzig Jahre alt geworden sind, sondern weil die Thatsache, daß sie so alt geworden sind, beweist, daß dies das Verhältniß ist, welches an diesem Ort und zu dieser Zeit zwischen den Ursachen besteht, die das Leben bis zum Alter von siebenzig Jahren zu verlängern und jenen, die es zu einem früheren Ende zu bringen streben*).

*) Der zuletzt angeführte Schriftsteller bemerkt, daß die Abschätzung von Chancen durch bloße Vergleichung der Zahl von Fällen, in denen das Ereigniß eintritt, mit jenen, in denen es nicht eintritt, „in der Regel ganz irrig sein würde“ und „nicht die richtige Lehre von der Wahrscheinlichkeit ist.“ Es ist wenigstens diejenige, welche die Grundlage des Versicherungswesens und all der Berechnungen von Chancen im täglichen Leben bildet, welche die Erfahrung in so reichem Maße bestätigt. Der Recensent verwirft die Lehre aus dem Grunde, weil sie „ein Ereigniß, das bisher nie ausgeblieben ist, für gewiß halten würde, was unendlich weit von der Wahrheit entfernt ist, auch bei einer sehr großen Zahl von constanten Erfolgen.“ Dies ist nicht ein Fehler einer bestimmten Theorie, sondern jeder Theorie von der Wahrscheinlichkeit. Kein Grundsatz für die Abschätzung von Chancen kann für einen solchen Fall ausreichen, wie ihn der Recensent im Auge hat. Wenn ein Ereigniß bei einer Anzahl von Versuchen, die groß genug war, um den Zufall auszuschließen, kein einziges Mal ausgeblieben ist, so besitzt es wirklich die Gewißheit, die ein empirisches Gesetz gewähren kann; es ist gewiß, solange dieselbe Collocation von Ursachen fortbesteht, die während der Beobachtungen bestanden hat. Bleibt es jemals aus, so geschieht dies in Folge irgendeiner Veränderung in jener Collocation. Nun kann uns aber keine Wahrscheinlichkeitslehre in den Stand setzen, die künftige Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses aus der Vergangenheit zu erschließen, wenn die das Ereigniß beeinflussenden Ursachen mittlerweile eine Veränderung erfahren haben.

§. 5. Es ist nicht schwer, aus den eben dargelegten Grundsätzen den Beweis für einen weiteren Lehrsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung herzuleiten. Derselbe liegt ihrer Anwendung auf Untersuchungen zu Grunde, die den Zweck haben, das Eintreffen eines gegebenen Ereignisses oder die Wirklichkeit einer individuellen Thatsache festzustellen. Die Merkmale oder Beweisgründe, durch die man eine Thatsache darthut, sind gewöhnlich einige von ihren Folgen und die Untersuchung dreht sich darum zu ermitteln, welche Ursache eine gegebene Wirkung am wahrscheinlichsten hervorgebracht haben mag. Der Lehrsatz, der sich auf solche Forschungen anwenden läßt, ist der sechste Grundsatz im *Essai philosophique sur les probabilités* von Laplace, den er das Grundprincip jenes Zweiges der Analyse von Chancen nennt, der sich damit beschäftigt, von Ereignissen zu ihren Ursachen aufzusteigen*).

Es sei eine Wirkung gegeben, deren Grund wir zu entdecken haben, und es gebe mehrere Ursachen, die sie hervorgebracht haben könnten, von deren Anwesenheit in dem bestimmten Falle aber nichts bekannt ist; dann wird die Wahrscheinlichkeit, daß die Wirkung von irgendeiner dieser Ursachen hervorgebracht wurde, so groß sein, wie die vorherbestehende Wahrscheinlichkeit der Ursache, multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit, daß die Ursache, wenn sie vorhanden war, die gegebene Wirkung hervorgebracht hätte.

M sei die Wirkung, und A, B zwei Ursachen, von denen sie erzeugt sein kann. Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu finden, daß sie von der einen und nicht von der anderen hervorgebracht wurde, untersuche man, welche von ihnen am wahrscheinlichsten vorhanden gewesen sein wird, und welche, wenn sie vorhanden war, die Wirkung M am wahrscheinlichsten hervorgebracht hat; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist das Product dieser beiden Wahrscheinlichkeiten.

Erster Fall. Es seien die Ursachen in der zweiten Hinsicht beide gleich; wir nehmen an, daß A sowohl als B, wenn es vorhanden war, mit gleicher Wahrscheinlichkeit (oder gleicher Gewißheit) M hervorgebracht haben wird; aber es sei an sich

*) S. 18—19. Der Lehrsatz wird von Laplace nicht in genau denselben Ausdrücken ausgesprochen, in denen ich ihn dargestellt habe, aber diese Verschiedenheit berührt, wie sich leicht darthun läßt, nicht den Gehalt des Satzes.

zweimal so wahrscheinlich, daß A, als daß B vorhanden war, das heißt, es sei eine zweimal so gewöhnliche Erscheinung. Dann ist es zweimal so wahrscheinlich, daß sie in diesem Falle vorhanden und die Ursache war, die M erzeugte.

Denn da A in der Natur zweimal so oft vorkommt als B, so war A unter je 300 Fällen, in denen das eine oder das andere vorhanden war, 200 mal vorhanden und B nur 100 mal. Aber entweder A oder B muß überall dort vorhanden gewesen sein, wo M entstand; daher war unter 300 Malen, in denen M erzeugt ward, A 200 mal die erzeugende Ursache, B nur 100 mal, das heißt, sie stehen in dem Verhältniß von 2 zu 1. So ist denn, wenn die Ursachen in ihrer Fähigkeit, die Wirkung hervorzubringen, sich gleichstehen, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die eine oder die andere sie wirklich hervorbrachte, gleich dem Verhältniß der vorherbestehenden Wahrscheinlichkeiten ihres Vorhandenseins.

Zweiter Fall. Kehren wir die letzte Voraussetzung um und nehmen wir an, daß die Ursachen gleich häufig sind, daß ihr Vorhandensein gleich wahrscheinlich ist, daß es aber nicht gleich wahrscheinlich ist, daß sie, wenn sie vorhanden waren, M hervorbrachten; daß in drei Fällen, in denen A auftritt, es die Wirkung zweimal hervorbringt, während B sie in drei Fällen nur einmal hervorruft. Da die beiden Ursachen gleich häufig vorkommen, so ist in je sechs Malen, in denen eines oder das andere vorhanden ist, A dreimal und B dreimal vorhanden, A bringt unter seinen drei Malen M zweimal, B unter seinen drei Malen M einmal hervor. So wird M in allen sechs Fällen nur dreimal hervorgebracht; aber von diesen drei Malen wird es zweimal durch A, und nur einmal durch B hervorgebracht. Demzufolge stehen, wenn die vorherbestehenden Wahrscheinlichkeiten für das Vorhandensein der Ursachen gleich sind, die Chancen dafür, daß die Wirkung von ihnen hervorgebracht wurde, in dem Verhältniß der Wahrscheinlichkeiten, daß eine jede, wenn sie vorhanden war, die Ursache hervorgebracht hätte.

Dritter Fall. Der dritte Fall, derjenige, in dem die Ursachen in beiden Puncten verschieden sind, ist schon durch das vorangehende gelöst. Denn, wenn eine Größe von zwei andern Größen in der Weise abhängt, daß sie, wenn die eine von ihnen constant bleibt, der anderen proportional ist, so muß sie nothwendig dem Product der beiden Größen proportional sein, da das Product die einzige Function der beiden ist, die diesem Gesetz der Variation gehorcht. Darum ist die Wahrscheinlichkeit,

daß M von einer oder der anderen Ursache hervorgebracht wurde, gleich der vorherbestehenden Wahrscheinlichkeit der Existenz der Ursache, multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit, daß sie, wenn sie existirte, M hervorgebracht hätte — was zu beweisen war.

Oder wir können den dritten Fall ebenso beweisen, wie wir den ersten und den zweiten bewiesen. Es sei A doppelt so häufig als B; und es sei auch ungleich wahrscheinlich, daß sie, wenn sie vorhanden sind, M hervorbringen werden: A bringe es zweimal unter vier Malen, B dreimal unter vier Malen hervor. Die vorherbestehende Wahrscheinlichkeit von A verhält sich zu der von B wie 2 zu 1; die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß sie M hervorbringen, verhalten sich wie 2 zu 3; das Product dieser Verhältnisse ist das Verhältniß von 4 zu 3, und dies wird das Verhältniß der Wahrscheinlichkeiten dafür sein, daß A oder B in dem gegebenen Falle die erzeugende Ursache war. Denn da A zweimal so häufig ist als B, so wird unter zwölf Fällen, in denen das eine oder das andere vorhanden ist, A in 8 und B in 4 Fällen vorhanden sein. Aber unter seinen 8 Fällen bringt A der Voraussetzung nach M nur in 4 Fällen hervor, während B unter seinen vier Fällen M in 3 hervorbringt. M wird daher überhaupt in sieben unter den zwölf Fällen hervorgebracht; aber in vieren von diesen ist es die Wirkung von A, in dreien von B; daher verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten für seine Erzeugung durch A und durch B wie 4 zu 3, und lassen sich durch die Brüche $\frac{4}{7}$ und $\frac{3}{7}$ ausdrücken, — was zu beweisen war.

§. 6. Es erübrigt noch, das Verhältniß der Wahrscheinlichkeitslehre zu dem eigenthümlichen Problem zu untersuchen, das uns im vorangehenden Abschnitte beschäftigte. Es fragt sich, wie man Verbindungen, die nur zufällig sind, von jenen zu unterscheiden hat, die aus irgendeinem Gesetz entspringen, von jenen, in denen die Thatfachen, die einander begleiten oder auf einander folgen, irgendwie auf ursächlichem Wege mit einander verknüpft sind.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet uns die Mittel, um, wenn wir die Durchschnittszahl von Verbindungen kennen, die wir bei zwei nur zufällig verknüpften Erscheinungen zu erwarten haben, zu bestimmen, wie oft eine gegebene Abweichung von jenem Durchschnitt durch Zufall eintreten kann. Wenn die Wahrscheinlichkeit irgendeiner zufälligen Verbindung an sich be-

betrachtet $\frac{1}{m}$ beträgt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieselbe Verbindung n Male nach einander wiederholt werden wird gleich $\frac{1}{m^n}$. Bei einem Würfelwurfe z. B. ist die Wahrscheinlichkeit für Aß $\frac{1}{6}$; die Wahrscheinlichkeit, daß Aß zweimal nach einander geworfen wird, ist gleich 1 getheilt durch das Quadrat von 6 oder $\frac{1}{36}$. Denn Aß wird im ersten Wurf ein Mal unter sechsen, oder sechs Mal in sechs und dreißig Malen geworfen; und unter diesen sechs Malen wird, wenn der Würfel noch einmal geworfen wird, Aß nur einmal geworfen, was im Ganzen einmal in sechs und dreißig Würfeln macht. Die Chance für denselben Wurf dreimal nacheinander beträgt vermöge eines ähnlichen Schlusses $\frac{1}{6^3}$ oder $\frac{1}{216}$: das heißt, das Ereigniß wird in einem großen Durchschnitt nur einmal unter zwei hundert sechs-
zehn Würfeln eintreffen.

Wir besitzen somit einen Maßstab, nach dem wir die Wahrscheinlichkeit schätzen können, daß irgendeine gegebene Reihe von Coincidenzen die Wirkung des Zufalls ist; vorausgesetzt, daß wir die Wahrscheinlichkeit einer einzigen Coincidenz richtig abschätzen können. Könnten wir nun einen gleich bestimmten Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit gewinnen, daß dieselbe Reihe von Coincidenzen aus ursächlichen Gründen entspringt, so brauchten wir bloß die Zahlen miteinander zu vergleichen. Dies ist jedoch nur selten ausführbar. Wir wollen sehen, wie weit wir uns praktisch der erforderlichen Genauigkeit nähern können.

Die Frage fällt unter den sechsten Grundsatz von Laplace, den wir soeben bewiesen haben. Die gegebene Thatsache, das heißt, die Reihe von Coincidenzen kann einer zufälligen Vereinigung von Ursachen oder einem Naturgesetz ihren Ursprung verdanken. Die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß die Thatsache in der einen oder anderen Weise entstand, verhalten sich so, wie ihre vorgängige Wahrscheinlichkeit, multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit, daß sie, wenn sie vorhanden waren, die Wirkung erzeugen würden. Aber die bestimmte Combination von zufälligen Umständen, wenn sie einträte, oder das Naturgesetz, wenn es wirklich bestände, würde die Reihe von Coincidenzen mit Gewißheit hervorbringen. Die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß die Coincidenzen durch die eine oder die andere von den beiden Ursachen erzeugt wurden, verhalten sich, wie die vorherbestehenden Wahr-

scheinlichkeiten für die Existenz der Ursachen. Die eine von diesen, die vorherbestehende Wahrscheinlichkeit der Combination von bloß zufälligen Umständen, die eine gegebene Wirkung hervorbringen würde, ist eine Größe, die sich abschätzen läßt. Die vorherbestehende Wahrscheinlichkeit der andern Voraussetzung mag eine mehr oder weniger genaue Schätzung je nach der Natur des Falles zulassen.

In einigen Fällen muß das Zusammentreffen, wenn es überhaupt die Wirkung eines ursächlichen Gesetzes sein soll, die Wirkung eines bekannten Gesetzes sein; wie die Aufeinanderfolge von Alzen, wenn sie nicht zufällig ist, die Folge der Beschwerung der Würfel sein muß. In solchen Fällen mögen wir über die vorherbestehende Wahrscheinlichkeit eines solchen Umstandes aus dem Charakter der betreffenden Personen oder anderen ähnlichen Gründen eine Vermuthung schöpfen können; aber es wäre unmöglich, diese Wahrscheinlichkeit mit irgendeiner Art von numerischer Genauigkeit abzuschätzen. Da jedoch die Gegenwahrscheinlichkeit, die des zufälligen Ursprunges des Zusammentreffens, mit jedem neuen Versuche rasch zusammenschwindet, so gelangen wir bald zu dem Punkte, wo die Chance der Fälschung der Würfel, so gering sie an sich sein mag, größer sein muß, als die eines zufälligen Zusammentreffens. Und aus diesem Grunde kann man in der Regel ohne viel Bedenken zu einer praktischen Entscheidung gelangen, sobald es nur in unserer Macht liegt, den Versuch zu wiederholen.

Wenn jedoch das Zusammentreffen ein derartiges ist, welches sich nicht durch irgendeine bekannte Ursachen erklären läßt, und der Zusammenhang zwischen den beiden Erscheinungen, wenn er auf ursächlichem Wege entstand, die Wirkung irgendeines bisher unbekannten Naturgesetzes sein muß (der Fall, den wir im vorigen Capitel im Auge hatten), dann mag zwar die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Zusammentreffens noch immer eine Abschätzung zulassen, aber es ist einleuchtend, daß die entgegengesetzte Voraussetzung, das Dasein eines unentdeckten Naturgesetzes nicht einmal eine annähernde Schätzung gestattet. Um die für einen solchen Fall erforderlichen Daten zu besitzen, müßten wir wissen, ein wie großer Theil aller einzelnen in der Natur vorkommenden Successionen oder Coexistenzen die Wirkung von Gesetzen und ein wie großer Theil derselben bloß zufälliger Art ist. Da es auf der Hand liegt, daß wir über dies Verhältniß keine irgend annehmbare Vermuthung aufstellen, viel weniger sie in Zahlen

ausdrücken können, so können wir keine irgend genaue Abschätzung der einander gegenüberstehenden Wahrscheinlichkeiten unternehmen. Aber des Einen sind wir gewiß, daß die Entdeckung eines unbekannten Naturgesetzes — einer früher nicht erkannten Regelmäßigkeit in der Verknüpfung von Erscheinungen — kein ungewöhnliches Ereigniß ist. Wenn daher die Zahl von Fällen, in denen eine Coincidenz wahrgenommen wird, außer und über diejenigen, die im Durchschnitt aus der bloßen Vereinigung günstiger Chancen hervorgehen würde, von der Art ist, daß ein so großes Quantum bloß zufälliger Coincidenzen ein außerordentlich ungewöhnliches Ereigniß wäre; so haben wir Grund daraus zu schließen, daß die Coincidenz die Wirkung eines ursächlichen Verhältnisses ist, und (mit Vorbehalt nachträglicher Berichtigung durch weitere Erfahrung) sie für ein empirisches Gesetz zu halten. Weiter können wir in Bezug auf Genauigkeit nicht gehen; und in den meisten Fällen ist auch eine größere Genauigkeit für die Lösung irgendeines praktischen Zweifels nicht erforderlich *).

Neunzehntes Capitel.

Von der Ausdehnung abgeleiteter Gesetze auf angrenzende Fälle.

§. 1. Wir haben häufig Gelegenheit gehabt, auf die geringere Allgemeinheit abgeleiteter Gesetze im Vergleich zu den letzten Gesetzen, aus denen sie herkommen, aufmerksam zu machen. Dieser Mangel, der nicht nur den Umfang der Sätze selbst, sondern auch den Grad ihrer Gewißheit innerhalb jenes Umfangs berührt, tritt am augenfälligsten bei jenen Gleichförmig-

*) Wer die vielen anziehenden Fragen, die sich an diesen Gegenstand knüpfen, eingehender behandelt zu sehen wünscht, den kann ich jetzt auf ein neueres Werk verweisen: „The Logic of Chance“ von Herrn Venn (Fellow des Caius-College in Cambridge). Es ist dies eine der gedankenreichsten und gründlichsten von all den Schriften, die in dem Gesamtbereich der Logik und Beweislehre seit einer langen Reihe von Jahren in England wie im Auslande erschienen sind. Einige darin enthaltene kritische Bemerkungen waren mir bei der Durchsicht der entsprechenden Abschnitte von großem Nutzen. In einigen Punkten kann ich den Ansichten des Herrn Venn nicht beipflichten. Welche diese sind, das braucht keinem Leser jenes Werkes gesagt zu werden, der gleichzeitig ein Leser dieses Buches ist.