

- Pfd. $33\frac{3}{20}$ preuß. Loth; ein Pfd. in Leipzig $31\frac{19}{20}$; ein Pfd. in Paris $33\frac{1}{2}$; ein Pfd. in London 31; ein Pfd. in Amsterdam $33\frac{4}{5}$ preuß. Loth. Wie verhalten sich berl. Pfund zu den Pfunden dieser angeführten Städte?
- 45) Eine preuß. Landmeile hat 24000 preuß. Fuß; eine franz. Meile (lieue) 13133 preuß. Fuß; eine engl. Meile 5135; eine holländ. Meile 18680; eine italien. Meile 5910; eine russ. Werste 3402; eine span. Meile 13328; eine türk. (Berri) 5323 preuß. Fuß. Wie verhält sich eine preuß. Landmeile zu diesen Meilenmaßen?
- 46) Der natürliche Frostpunkt (bei welchem das Wasser anfängt sich in Eis zu verwandeln) ist bei dem Fahrenheit'schen Thermometer 32 Grad, bei dem Réaumur'schen 0 Grad, bei dem Celsius'schen ebenfalls 0 Grad. Der Siedepunkt (bei welchem das Wasser siedet), ist bei Fahrenheit 212 Grad, bei Réaumur 80 Grad, bei Celsius 100 Grad. Der Abstand des natürlichen Frostpunktes vom Siedepunkt ist also nach Fahrenheit 180 Grad, bei Réaumur 80 Grad, bei Celsius 100 Grad. a) Wie verhalten sich die Thermometergrade nach Fahrenheit, Réaumur (spr. Reomür) und Celsius zu einander?
- 1 Grad F. = ? Grad R. = ? Grad C.
 1 Grad R. = ? Grad F. = ? Grad C.
 1 Grad C. = ? Grad R. = ? Grad F.
- b) Bezeichne diese Verhältnisse in den kleinsten ganzen Zahlen?

Vier und zwanzigster Abschnitt.

XXIV. Einleitung zur Regel-de-Tri.

§. 36.

- 1) Wird die Lehre von den Proportionen auf Verhältnisse des praktischen Lebens angewandt, so entsteht die Regel-de-Tri, d. h. die Regel von drei Sätzen. Es ist oben gezeigt worden, daß zur Bestimmung irgend eines Gliedes einer Proportion die 3 übrigen bekannt sein müssen. Eben so ist es nun in den Rechnungen des praktischen Lebens, welche durch Proportionen ausgeführt werden. Hier müssen 3 Glieder unter gewissen Bedingungen, die gleich nachher näher untersucht werden sollen, gegeben sein, um durch sie das gesuchte vierte Glied zu bestimmen. Daher der Name der Regel von 3 Sätzen oder Regel de-Tri.

- 2) Zuerst bemerke nun, wie oft 4 Thlr. in 12 Thlr., 3 Pf. in 18 Pf., 12 Sgr. in 6 Thlr. preuß., 2 Loth in 8 Loth enthalten sind!

Gib daher reine oder unbenannte Zahlen an, welche sich so verhalten, wie die folgenden Paare benannter Zahlen: 3 Thlr. : 24 Thlr. = . . . ?; eben so 3 Quentchen : 1 Pfd.; 5 Pf. : 10 Sgr.; 7 Pf. : 10 Pf.; 16 Pferde : 3 Pferden; 3 Meilen : 9 Meilen; 8 Ellen : 1 Elle; 4 Arbeiter : 20 Arbeitern; 16 Tage : 1 Monat.

- 3) Ueberlege ferner, daß jeder Proportion, also auch jedem Regel-de-Tri-Satze die Vorstellung zum Grunde liegt, daß das erste Glied in dem zweiten so oft enthalten ist, als das dritte in dem vierten. Das erste Glied muß also in dem zweiten eine gewisse Anzahl Mal enthalten sein; folglich muß das zweite Glied als aus dem ersten entstanden gedacht werden können. Und dies ist nur dann möglich, wenn beide Glieder, erstes und zweites, Dinge einer Art darstellen. In jedem richtigen Regel-de-Tri-Satze müssen im ersten und zweiten, und eben so im dritten und vierten Gliede Dinge einer Art oder gleichartige Größen vorkommen. Dinge ganz verschiedener Art oder ungleichartige Größen können durchaus nicht als auseinander entstanden gedacht, also auch nicht in ein Verhältniß gebracht werden. So können und dürfen z. B. Pfunde nicht mit Thalern oder Groschen, Menschen nicht mit Geld in Verhältniß gebracht werden. Waaren stehen nur im Verhältniß zu Waaren, Geld nur zu Geld, Meilen Weges nur zu Meilen Weges, Arbeiter nur zu Arbeitern, Ellen nur zu Ellen u. s. w.

- 4) Nichts desto weniger aber brauchen die mit einander in Verhältniß gebrachten Größen nicht gleichnamig zu sein, obgleich sie gleichartig sein müssen. Pfunde können zu Loth, Quentchen oder Centnern in Verhältniß gebracht werden, weil die Größen gleicher Art sind. In diesem Falle macht man die ungleichnamigen Größen gleichnamig.

Bringe daher folgende Verhältnisse benannter ungleichnamigen Zahlen auf Verhältnisse in gleichnamigen Zahlen: 1 Loth 2 Qt. : 3 Qt.; 4 Pfd. 6 L. : 3 Pfd. 2 L.; 5 Thlr. 18 Sgr. : 4 Thlr.; 3 Thlr. 25 Sgr. : 8 Thlr. 19 Sgr.; 4 Thlr. 16 Sgr. 3 Pf. : 10 Sgr.; 3 Sgr. 1 Pf. : 5 Thlr. 9 Sgr.; 80 Thlr. 24 Sgr. 11 Pf. : 25 Sgr. 9 Pf.; 3 Ries 2 Buch : 9 Buch; 90° 4' : 24° 7' Decimalmaß.

- 5) Denke darüber nach, ob auch alle vier Glieder einer Proportion gleichartige Größen sein müssen; oder können z. B. Pf. zu Pf. in demselben Verhältniß stehen, wie Thlr. zu Thlr.? Können die 4 Größen 2 Pf. und 6 Pf., 3 Thlr. und 9 Thlr. eine Proportion bilden?

- 6) Offenbar findet dieses aber nur dann statt, wenn die 2 Größen der einen Art in demselben Verhältnisse stehen, wie die 2 Größen der anderen Art. Das Pfund einer Waare koste z. B. 3 Sgr.; so kosten 4 Pfd. derselben Waare auch 4mal 3 Sgr. So oft ich 1 Pfd. kaufe, eben so oft muß ich 3 Sgr. bezahlen.

In demselben Verhältnisse, in welchem die Menge der Pfunde wächst oder abnimmt, in eben demselben Verhältniß nimmt auch die Menge des Geldes zu oder ab, welches ich für die Waare bezahlen muß. Daher bilden 2 Mengen Waare mit den ihnen entsprechenden Preisen eine richtige Proportion.

- 7) Die Aufgabe der vorstehenden Nummer liefert ein Beispiel von 2 Verhältnissen, welche gerade proportionirt sind. Die Pfunde standen in geradem Verhältnisse mit den ihnen entsprechenden Preisen; sie waren gerade proportionirt. 2 Zahlenpaare stehen im geradem Verhältnisse, wenn mit dem Wachsthum des einen Verhältnisses ein Wachsthum des andern Verhältnisses in gleichem Grade, und wenn mit der Abnahme des einen Verhältnisses die Abnahme des andern Verhältnisses in gleichem Grade verbunden ist. Wenn z. B. 2 Menschen in einem Garten 4 Quadratruthen umgraben, so graben 4 Menschen auch 2mal 4 Quadratruthen um, und 1 Mensch gräbt in einem Tage die Hälfte von 4 Quadratruthen um. Also steht hier die Anzahl der Menschen mit der Menge der umgegrabenen Quadratruthen Land in geradem (direktem) Verhältnisse.
- 8) Besinne dich, mit welcher Art Größen folgende in geradem Verhältnisse stehen, so daß mit dem Wachsen oder Abnehmen der einen Art ein Wachsen oder Abnehmen der andern in demselben Verhältnisse verbunden ist:
- | | | |
|----|---|---|
| 1) | Waaren stehen in geradem Verhältnisse mit | ? |
| | Doppelte Menge einer Waare, doppelte | ? |
| | Dreifache " " " dreifache | ? |
| | Halbe " " " halbe | ? |
| 2) | Anzahl der Arbeiter und Größe | ? |
| | Doppelte " " " | ? |
| | Halbe " " " | ? |
| 3) | Schwere der Fracht und | ? |
| | Doppelte " " " | ? |
| | Halbe " " " | ? |
| 4) | Zeit der Arbeit und | ? |
| 5) | Menge der Zinsen | ? |
| 6) | Größe einer Armee | ? |
- 9) Anders aber verhält es sich mit den sogenannten umgekehrten (indirekten) Verhältnissen. Gesezt, daß Gras einer Wiese könne von 4 Menschen in 1 Tage abgemäht werden. Stelle ich nun, unter übrigens gleichen Umständen, anstatt der 4 Menschen 8 Menschen zum Mähen hin, so werden diese 8 nicht einen ganzen, sondern nur einen halben Tag zum Abmähen des Grases nöthig haben. Wenn also hier die Anzahl der Menschen wächst, so nimmt die Länge der Zeit, welche zum Mähen erforderlich ist, ab, und zwar nimmt diese Zeit in demselben Verhältnisse ab, in welchem die Anzahl der Menschen zunimmt.

Ist z. B. das Verhältniß der Menschen = 4 : 8, so ist das ihnen entsprechende Verhältniß der Zeit = 1 : $\frac{1}{2}$. Hier ist offenbar jenes Verhältniß 4 : 8 nicht gleich diesem 1 : $\frac{1}{2}$, weil

jenes das Verhältniß des Einfachen zum Doppelten, dieses aber das Verhältniß des Doppelten zum Einfachen ist. Will ich nun 2 gleiche Verhältnisse haben, so muß ich die Glieder des Einen dieser Verhältnisse mit einander verwechseln, indem sich 4 : 8 nicht wie 1 : $\frac{1}{2}$, sondern wie $\frac{1}{2}$: 1, und 1 : $\frac{1}{2}$ nicht wie 4 : 8, sondern wie 8 : 4 verhält. Man muß also in diesem Falle, um ein Verhältniß zu erhalten, welches dem andern gleich ist, die Glieder des einen Verhältnisses umkehren, das erste Glied zum zweiten und das zweite zum ersten machen. In unserm obigen Beispiele verhalten sich 4 Arbeiter zu 8 Arbeitern nicht wie die, den 4 Arbeitern entsprechende Zahl, zu der Zahl der 8 Arbeiter, sondern umgekehrt, wie die Zahl der 8 Arbeiter zu der Zahl der 4 Arbeiter. Das Verhältniß der Zeit ist also umgekehrt dem Verhältnisse der Menge der Arbeiter gleich, oder die Zeiten sind den Arbeitern umgekehrt proportionirt.

- 10) Aus den vorhergehenden Beispielen wirst du gelernt haben, was man unter Verhältnissen versteht, welche gerade und welche umgekehrt einander proportionirt sind. Wenn mit dem Wachsthum des einen Verhältnisses eine Abnahme des andern in demselben Grade verbunden ist, so ist das Verhältniß jener Größen nicht gleich dem Verhältniß dieser in gerader Ordnung, sondern in umgekehrter Ordnung. Man sagt alsdann: die 4 Größen sind in umgekehrter Ordnung proportionirt. Man nennt die Regel-de-Tri, in welcher Verhältnisse zusammengestellt werden, die in gerader Ordnung proportionirt sind, die gerade Regel-de-Tri, und diejenige, in welcher Verhältnisse, die in umgekehrter Ordnung proportionirt sind, gleich gestellt werden, die umgekehrte Regel-de-Tri. Du wirst nun wohl mit diesen, nicht recht passenden Ausdrücken richtige Vorstellungen verbinden. Vergiß daher nicht, daß zu einer Proportion nur gleiche Verhältnisse gebraucht werden können!

Suche nun aus dem praktischen Leben Verhältnisse, von welchem das eine umgekehrt werden muß, damit es dem andern gleich werde, oder in welchem mit dem Wachstume des einen Verhältnisses eine Abnahme des andern in demselben Grade verbunden ist!

- 1) Für dieselbe Arbeit steht die Menge der Arbeiter, welche zur Vollendung derselben angestellt werden müssen, im umgekehrten Verhältnisse mit ?
 Doppelte Zahl der Arbeiter, halbe ?
 Halbe doppelte ?
 2) Für denselben Preis des Brotes: ?
 Der Preis des Kornes und das Gewicht des Brotes ?
 Doppelter " " " ?
 Halber " " " ?
 3) Bei derselben Geldmenge: ?
 die Größe der Fracht und ?
 Zwiefache " " " ?
 Halbe " " " ?

- 4) Bei derselben Menge Proviant:
 Die Menge der Truppen in einer Festung und ?
 5) Für dasselbe Kleid:
 die Länge des Zeuges ?
 6) Bei demselben Flächenraum:
 die Länge der Fläche ?
 7) Für dieselben Zinsen:
 die Größe der Kapitalien ?
 11) Merke ferner, daß es zur Bildung einer Proportion nicht hin-
 reicht, wenn ich gefunden habe, daß mit dem Wachsthum des
 einen Verhältnisses ein Wachsthum oder eine Abnahme des an-
 dern verbunden sei. Wenn nicht zugleich bestimmt ist, daß das
 Wachsthum oder die Abnahme in ganz gleichen Verhältniß-
 sen geschieht, so darf ich mich zu keiner Proportion verleiten
 lassen.

Beispiel. Aus einem Fasse laufen in einer Stunde 10 An-
 ker Wasser, wie viel Anker laufen in 6 Stunden heraus.

Obgleich es richtig ist, daß in 6 Stunden mehr Wasser her-
 ausläuft, als in 1 Stunde, so ist hier doch nicht das Verhältniß
 der Stunden dem Verhältnisse der herausfließenden Wassermengen
 gleich, weder gerade, noch viel weniger umgekehrt, weil die Schnel-
 ligkeit des herauslaufenden Wassers abnimmt, wenn das Faß
 nicht stets gleich voll gehalten wird.

Was hältst du von folgenden Aufgaben?

Die Fläche einer Scheibe, welche 6 Fuß im Durchmesser hat,
 ist 38 Quadratfuß groß; wie groß ist die Fläche einer Scheibe,
 deren Durchmesser 3 Fuß lang ist?

Eine Bleifugel fällt in der ersten Sekunde durch einen Raum
 von 15 Fuß; durch welchen Raum fällt sie in 2 Sekunden?

- 12) Du wirst leicht begreifen, daß in jeder Aufgabe, also auch in jeder
 Regel-de-Tri-Aufgabe, irgend eine Größe unbekannt ist. Da
 diese unbekannte Größe in der Regel-de-Tri durch Proportions-
 rechnung gefunden werden soll, so muß, weil die beiden Glieder
 eines Verhältnisses gleichartige Größen sein müssen, eine
 zweite Größe bekannt sein, welche mit der gesuchten gleichartig
 ist. Denn die unbekannte Größe soll aus irgend einer abgeleitet,
 aus irgend einer entstanden gedacht werden. Und jede Größe
 kann nur aus einer ihr gleichartigen entstanden gedacht werden.
 Die unbekannte gesuchte Größe bringe ich mit der gegebenen
 gleichartigen in Verhältniß. Nun kommt es darauf an, daß ich in
 der Aufgabe ein Verhältniß entdecke, welches dem gesuchten gleich
 ist, und aus bekannten Zahlen besteht. Alsdann setze ich das ge-
 suchte Verhältniß dem gegebenen, ihm als gleich erkannten, gleich,
 und suche das unbekannte Glied nach den obigen Regeln. Hängt
 das unbekannte Verhältniß von einem einzigen Verhältniß ab, so
 gehört eine solche Aufgabe zur einfachen Regel-de-Tri; haben
 aber mehrere Verhältnisse auf das gesuchte Einfluß, so gehört die
 Aufgabe zur zusammengesetzten Regel-de-Tri. Hier haben
 wir es zunächst nur mit der einfachen Regel-de-Tri zu thun.

13) Damit du nun die Regel-de-Tri-Exempel in der üblichen Weise ansehen und ausrechnen lernst, so wollen wir einige Aufgaben vornehmen.

1) Ein Pfund kostet 6 Sgr.; wie viel kosten 8 Pfd.?

Angenommen, der Preis der 8 Pfd. sei gleich x Sgr., so ist das gesuchte Verhältniß = 6 Sgr. zu x Sgr. Ich sehe ein, daß die Mengen der Waare in geradem Verhältnisse stehen mit den Preisen, daß die doppelte Menge der Pfunde auch die doppelte Menge der Sgr. hervorbringt u. s. w., im Allgemeinen: daß ich so oft 6 Sgr. bezahlen muß, so oft ich ein Pfund kaufe, daß also 6 Sgr. so oft in x Sgr. enthalten sein müssen, so oft 1 Pfd. in 8 Pfd. enthalten ist. Diese Vorstellung berechtigt mich zu dem Ansätze: 1 Pfd. : 8 Pfd. = 6 Sgr. : x Sgr., worin die 6 Sgr. dem 1 Pfd. und die x Sgr. den 8 Pfd. entsprechen. Will ich nun das x dadurch finden, daß ich die mittleren Glieder der Proportion mit einander multiplicire, und durch das erste Glied dividire, so muß das erste Verhältniß 1 Pfd. : 8 Pfd. als ein Verhältniß in unbenannten Zahlen, also = 1 : 8 angesehen werden, weil es keinen Sinn hat, 6 Sgr. mit 8 Pfd. zu multipliciren. Ich multiplicire hier 6 Sgr. mit der unbenannten Zahl 8; so erhalte ich 8mal 6 Sgr. = 48 Sgr. Diese durch 1 getheilt, gibt 48 Sgr. Also ist $x = 48$ Sgr.

2) Zum Abschreiben eines Aufsatzes gebrauche ich 4 Tage, wenn ich täglich 12 Stunden schreibe; in wie viel Tagen würde ich fertig werden, wenn ich täglich nur 8 Stunden schreibe? Angenommen in x Tagen. Man pflegt das unbekannte Glied der gesuchten Proportion in die vierte Stelle zu setzen. Dies geschehe.

1.	2.	3.	4. Stelle.
			x Tage.

Welche Größe kommt nun in die dritte Stelle? Offenbar diejenige, welche mit dem x gleichartig ist, also vier Tage; das gesuchte Verhältniß heißt also: 4 T. : x Tagen. Nun überlege ich, daß mit der Abnahme der täglichen Stunden, Zunahme der Anzahl der Tage, und zwar beides in gleichem Grade, verbunden sein muß. Schreibe ich nur halb so viel Stunden an jedem Tage, so werde ich doppelt so viel Tage zu schreiben haben. Das Verhältniß von 4 T. : x T. ist also offenbar ein steigendes. Zu den 4 Tagen gehören 12 Stunden, zu x Tagen 8 Stunden; 12 St. : 8 St. ist aber ein fallendes Verhältniß. Da ich erkannt habe, daß jenes in demselben Grade zunimmt, worin dieses abnimmt, so muß ich, um ein gleiches Verhältniß zu erhalten, das letzte umkehren. Und meine Proportion heißt dann:

$$8 \text{ St.} : 12 \text{ St.} = 4 \text{ T.} : x \text{ T.}$$

$$\text{oder } 2 : 12 = 1 : x$$

$$x = 12/2$$

$$x = 6 \text{ Tage.}$$

14) Setze also immer gleich vom Anfang an die zu suchende Größe in die vierte Stelle, die ihr gleichartige in die dritte Stelle; und

nun überlege, ob dieses Verhältniß mit einem bekannten Verhältniß in demselben oder im umgekehrten Verhältniß ab- oder zunimmt, und bestimme darnach die Stelle der beiden übrigen, einander gleichartigen Größen!

Zusatz. Nun soll noch an einigen Beispielen gezeigt werden wie man nicht bloß im Kopfe (das weiß der aufmerksame Schüler längst aus Erfahrung und durch die Ausrechnung früherer Aufgaben), sondern auch auf der Tafel alle nachfolgenden Beispiele ohne den Gebrauch der Verhältniß- und Proportionsrechnungen auflösen und ausrechnen kann. Man muß nur überall seinen Verstand gebrauchen und mit besonnener Ueberlegung zu Werke gehen! Zugleich ist es sehr rathsam die schriftliche Aufstellung der Bedingungen oder der gegebenen Zahlen so zu wählen, daß man in der leichtesten Weise die zusammengehörigen Zahlen mit einander vergleichen kann. Alles dieses leistet die **Zweifel-Rechnung**, wie Einige sie genannt haben.

1) 3 Ellen Tuch kosten 36 Thlr.; was kosten 16 Ellen?

a. Art der Aufstellung nach dem **Zweifel**:

$$\begin{array}{rcl} 3 \text{ Ellen} & & 36 \text{ Thlr.} \\ 16 = & & ? \end{array}$$

b. Ausrechnung:

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ Elle} & & \frac{36}{3} = 12 \text{ Thlr.} \\ 16 \text{ „} & & 16 \times 12 = 192 \text{ „} \end{array}$$

2) 8 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 5 Tagen; in wie viel Tagen kommen 7 Arbeiter damit zu Stande?

a. 8 Arbeiter 5 Tage

$$\begin{array}{rcl} 7 \text{ „} & & ? \end{array}$$

b. 1 Arbeiter $8 \times 5 = 40$ Tage

$$\begin{array}{rcl} 7 \text{ „} & & \frac{40}{8} = 5 \frac{1}{2} \text{ „} \end{array}$$

In Aufgabe 1. sind gerade, in Aufgabe 2. umgekehrte Verhältnisse enthalten. Dieser Unterschied kommt bei dem **Ansatz** nicht in Anschlag; wohl aber bei der **Ausrechnung**. Bei dem Gebrauch der Proportionen ist es umgekehrt; die Art der Verhältnisse bedingt den **Ansatz**, die **Ausrechnung** ist aber immer dieselbe. Bei der **Dreisatz-Rechnung** geht also das Nachdenken dem **Ansatz** vorher und das (sogenannte) mechanische Rechnen folgt; bei der **Zweifel-Rechnung** ist der **Ansatz** immer derselbe, setzt also keine besondere Aufmerksamkeit voraus; aber bei der **Ausrechnung** muß das Nachdenken recht wach sein.

In beiden Beispielen wurde zuerst nach der **Einheit** gefragt, oder (wie man zu sagen pflegt) die Aufgabe auf die **Einheit** reducirt. Dieses macht die **Ausrechnung** weitläufig, ist auch gar nicht nöthig. Zugleich erhellet leicht, daß das Vorkommen der Brüche keinen Unterschied begründet. Man muß nur Acht geben.

Noch ein Beispiel.

3. $\frac{3}{4}$ ℓ . kosten $\frac{7}{8}$ Thlr.; was kosten $5\frac{1}{6}$ ℓ .?

a. $\frac{3}{4}$ ℓ . $\frac{7}{8}$ Thlr.
 $5\frac{1}{6}$ „ ? „

b. $\frac{1}{4}$ ℓ . $\frac{7}{8}$ Thlr.
 $3 \cdot 8$

$4 \cdot 7$

$3 \cdot 8$ „

$4 \cdot 7$

$6 \cdot 3 \cdot 8$ „

$31 \cdot 4 \cdot 7$

$6 \cdot 3 \cdot 8$ „ u. s. w.

Kürzer:

$\frac{3}{4}$ ℓ . $\frac{7}{8}$ Thlr.

$5\frac{1}{6}$ „ ?

$4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7$

1 ℓ . = $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$ ℓ . also $\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{8}$ Thlr.

$31 \cdot 4 \cdot 7$

$6 \cdot 3 \cdot 8$ u. s. w.

Längere Übung führt den aufmerksamen Schüler auf Abkürzungen und Vortheile. Einem Solchen braucht man nicht Alles vorzumachen. Die Hauptsache ist nicht die Form, also weder der Dreisatz noch der Zweisatz, sondern das Nachdenken und die dadurch gewonnene Einsicht. Ueberall also zuerst Verständniß, dann Übung. „Eins muß durch das Andere gedeihen und reifen.“

Fünf und zwanzigster Abschnitt.

XXV. Regel-de-Tri.

§. 37.

A. Die sogenannte Regel-de-Tri.

- 1) Wie viel kosten 15 Ellen Band, wenn 3 ℓ 50 Sgr. bezahlt werden?
- 2) Wie theuer sind 21 Ellen Feinwand, wie viel für $1\frac{1}{2}$ Thlr. verkauft werden?