

Welche Veränderung darf man daher mit den Gliedern eines Verhältnisses vornehmen, ohne daß das Verhältniß selbst sich ändert?

- 19) Dividire die Glieder des Verhältnisses $36 : 360$ nach einander mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 18, 36, 72, 90.
- 20) Auf wie vielfache Weise läßt sich das Verhältniß der Zahlen 12 und 18 in kleineren ganzen Zahlen ausdrücken? Und welches sind die kleinsten ganzen Zahlen, welche dieses Verhältniß bezeichnen.
- 21) Drücke folgende Verhältnisse in den möglich kleinsten ganzen Zahlen aus: $4 : 8$; $12 : 6$; $20 : 40$; $30 : 10$; $24 : 8$; $26 : 14$; $7 : 28$; $15 : 60$; $9 : 3$; $12 : 96$; $36 : 144$; $72 : 3$; $11 : 99$; $100 : 25$; $17 : 136$; $169 : 13$; $39 : 13$.
- 22) Drücke folgende, durch Brüche dargestellte Verhältnisse in den möglich kleinsten ganzen Zahlen aus: $\frac{1}{2} : 1$; $1 : \frac{1}{2}$; $1 : \frac{1}{3}$; $\frac{2}{3} : 1$; $1 : \frac{1}{4}$; $1 : \frac{3}{4}$; $\frac{4}{5} : 1$; $\frac{5}{7} : 1$; $1 : \frac{3}{8}$; $2 : \frac{1}{2}$; $2 : \frac{3}{4}$; $2 : \frac{4}{5}$; $\frac{2}{3} : 4$; $\frac{3}{4} : 5$; $5 : \frac{3}{8}$; $\frac{7}{4} : 2$; $\frac{3}{11} : 5$; $8 : \frac{1}{10}$; $5 : \frac{3}{14}$; $19 : \frac{3}{7}$; $50 : \frac{8}{9}$; $\frac{10}{9} : 15$; $\frac{3}{15} : 20$; $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$; $\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$; $\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$; $\frac{5}{6} : \frac{7}{6}$; $\frac{3}{8} : \frac{11}{8}$; $\frac{4}{11} : \frac{1}{11}$; $\frac{2}{20} : \frac{20}{20}$; $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$; $\frac{4}{5} : 2\frac{1}{2}$; $\frac{8}{9} : \frac{2}{5}$; $\frac{5}{2} : \frac{7}{3}$; $\frac{3}{14} : 1\frac{1}{14}$; $\frac{5}{16} : 3\frac{9}{16}$; $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{4}$; $15\frac{5}{8} : 7\frac{3}{4}$; $\frac{11}{38} : 8\frac{1}{11}$; $15\frac{1}{20} : 3\frac{7}{100}$.

Zwei und zwanzigster Abschnitt.

XXII. Geometrische Proportionen oder Theil-Verhältniß-Gleichungen.

§. 34.

- 1) Verbindest du 2 gleiche Theil-Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen, so hast du eine geometrische Proportion, z. B.

$$2 : 4 = 3 : 6.$$

Du wirst nun gleich folgende Fragen zu beantworten im Stande sein: Wie viele Verhältnisse gehören zu einer Proportion? Was für Verhältnisse?

Wie viele Glieder bilden eine Proportion? Welche wird man äußere und welche innere Glieder der Proportion nennen?

Das wie vierte Glied der Proportionen ist das erste Glied des ersten Verhältnisses? das zweite Glied des ersten Verhältnisses? u. s. w. Das erste Glied des zweiten Verhältnisses ist? u. s. w. Das zweite Glied des zweiten Verhältnisses ist? u. s. w.

Welche Glieder der Proportionen sind in welchen Gliedern derselben gleich oft enthalten? Wie oft ist das dritte Glied im vierten enthalten, wenn das erste Glied im zweiten dreimal enthalten ist?

Nun will ich dir noch ein allgemeines Merkmal angeben, woran du erkennen kannst, ob 4 Zahlen eine geometrische Proportion bilden. Dieses ist jedesmal der Fall, wenn die erste Zahl so oft in einer zweiten enthalten ist, als die dritte in der vierten.

Wären z. B. die Zahlen 2, 10, 3, 15 gegeben, so ist 2 in 10 fünfmal, und 3 in 15 auch fünfmal, also 2 so oft in 10, als 3 in 15 enthalten, man hat also die Proportion $2 : 10 = 3 : 15$.

Desgleichen entstehen durch die 4 Zahlen 4, 12, 8, 24, die Proportionen:

$$4 : 12 = 8 : 24$$

$$4 : 8 = 12 : 24$$

$$12 : 4 = 24 : 8$$

$$12 : 24 = 4 : 8$$

$$8 : 4 = 24 : 12$$

$$8 : 24 = 4 : 12$$

$$24 : 8 = 12 : 4$$

$$24 : 12 = 8 : 4$$

2) Bilde aus folgenden Zahlen alle möglichen Proportionen: 3, 15, 6, 30.

3) Desgleichen aus den Zahlen $\frac{1}{2}$, 4, 3, 24.

4) Bist du nun wohl im Stande, irgend ein Glied, z. B. das vierte unbekannte Glied (x) einer Proportion zu finden? Wie groß ist x in der Proportion: $2 : 4 = 6 : x$? Denke daran, daß das erste Glied der Proportion eben so oft in dem zweiten enthalten ist, als das dritte in dem vierten.

5) Suche das unbekannte Glied folgender Proportionen:

$$1) 1 : 2 = 2 : x$$

$$2) 2 : 4 = 5 : x$$

$$3) 6 : 3 = 4 : x$$

$$4) 12 : 8 = 6 : x$$

$$5) 9 : 3 = 24 : x$$

$$6) 7 : 21 = 11 : x$$

$$7) 16 : 4 = 100 : x$$

$$8) 8 : 10 = 20 : x$$

$$9) 2 : 3 = 5 : x$$

$$10) 4 : 7 = 8 : x$$

$$11) 12 : 5 = 13 : x$$

$$12) 25 : 15 = 14 : x$$

$$13) \frac{1}{2} : 1 = 5 : x$$

$$14) 7 : 3\frac{1}{2} = 50 : x$$

$$15) \frac{2}{3} : 4 = \frac{3}{4} : x$$

$$16) \frac{4}{5} : 9\frac{3}{5} = 2 : x$$

$$17) 16 : \frac{3}{8} = 10\frac{1}{2} : x$$

$$18) \frac{4}{5} : \frac{2}{3} = 8 : x$$

$$19) \frac{2}{9} : 7 = \frac{11}{9} : x$$

$$20) 4\frac{1}{2} : 5\frac{3}{8} = \frac{1}{2} : x$$

$$21) \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} : x$$

$$22) \frac{6}{4} : 5 = 7\frac{1}{5} : x$$

$$23) \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{6}{7} : x$$

$$24) \frac{3}{10} : \frac{7}{20} = \frac{3}{11} : x$$

6) Wie groß ist das unbekannte Glied in folgenden Proportionen:

$$1) 3 : 9 = x : 9$$

$$2) 4 : 12 = x : 15$$

$$3) 8 : x = 20 : 30$$

$$4) 90 : x = 5 : 10$$

$$5) x : 33 = 5 : 15$$

$$6) x : \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} : 10\frac{1}{2}$$

$$7) \frac{1}{2} : 3 = x : 63$$

$$8) \frac{4}{5} : x = 16 : 80$$

$$9) x : 3 = 1 : 10$$

$$10) x : 21 = 2 : \frac{1}{8}$$

$$11) 21 : x = 7 : 18$$

$$12) 12 : 2 = x : 1000$$

- 7) Wenn du in der Proportion

$$2 : 4 = 6 : 12$$

die äußern Glieder 2 und 12, und dann die innern Glieder 4 und 6 mit einander multiplicirst; welche Producte erhältst du?

Thue dasselbe in folgenden Proportionen:

$$1 : 3 = 6 : 18$$

$$8 : 2 = 12 : 3$$

$$4 : \frac{1}{2} = 16 : 2$$

Welchen Schluß ziehest du daraus?

- 8) Ueberlege nun, woher es kommt, daß in jeder geometrischen Proportion das Product der äußern Glieder gleich ist dem Product der innern Glieder!

Um dir dieses zu erleichtern, setze ich zwei ganz gleiche Proportionen hin, deren Glieder in der zweiten und vierten Stelle nur verschieden ausgedrückt sind:

$$2 : 6 = 4 : 12$$

$$2 : 3 \times 2 = 4 : 3 \times 4$$

Nun ist $2 \times (3 \times 4) = (3 \times 2) \times 4$; folglich ic. 31 =

- 9) Dies gibt uns ein Mittel an die Hand noch auf eine andere Weise irgend ein unbekanntes Glied einer Proportion zu finden. Wenn sich verhält

$$3 : 6 = 4 : x$$

$$\text{so ist } 3 \cdot x = 6 \cdot 4$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6 \cdot 4}{3}$$

$$x = 8.$$

$$\text{also } 3 : 6 = 4 : 8.$$

Drücke in Worten die Regel aus, nach welcher man das unbekannte vierte Glied in einer Proportion finden kann!

- 10) Suche nach dieser Regel das unbekannte Glied in folgenden Proportionen:

$$1) 10 : 5 = 20 : x$$

$$2) 7 : 1 = 49 : x$$

$$3) 36 : 30 = 6 : x$$

$$4) 90 : 100 = 5 : x$$

$$5) 47 : 13 = 85 : x$$

$$6) 32 : 114 = 4 : x$$

$$7) 16 : 488 = 50 : x$$

$$8) 30 : 100 = x : 84$$

$$9) 12 : x = 40 : 400$$

$$10) x : 390 = 84 : 672$$

$$11) \frac{2}{3} : 40 = 5 : x$$

$$12) 11\frac{1}{2} : 50 = 3\frac{3}{4} : x$$

- 11) Du hast oben gesehen, welche Veränderungen man mit den Gliedern eines Verhältnisses durch Multiplication und Division der Glieder vornehmen darf, ohne dadurch das Verhältniß zu ändern. Dies gibt uns ein Mittel an die Hand, aus dem ersten und zweiten Gliede einer Proportion das in Brüchen bezeichnete Verhältniß durch ganze Zahlen darzustellen, indem wir das Verhältniß in ganzen Zahlen ausdrücken. Thue dies in folgenden Proportionen:

Eisen?

$$1) \frac{1}{2} : 3 = 4 : x$$

$$2) \frac{2}{3} : 8 = 5 : x$$

$$3) \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = 9 : x$$

$$4) \frac{4}{5} : \frac{7}{11} = 5 : x$$

$$5) 2\frac{1}{2} : 3\frac{3}{5} = 7 : x$$

$$6) 8\frac{3}{4} : \frac{7}{6} = 11 : x$$

- 12) Auch ist dir bekannt, daß das Product der äußern Glieder jeder geometrischen Proportion dem Producte der innern Glieder gleich ist. Woran kann man daher die Richtigkeit einer Proportion erkennen?

Wenn die vier Zahlen 3, 12, 4, 16 in der Ordnung wie sie hier aufgeführt sind, in Proportion stehen sollten, so muß $3 \cdot 16 = 12 \cdot 4$ sein. Da dies der Fall ist, so verhält sich wirklich

$$3 : 12 = 4 : 16.$$

Suche nach diesem Merkmale in welcher Ordnung folgende vier Zahlen proportionirt sind:

$$2, 12, 6, 36; 4, 15, 2, 30; 7, 20, 40, 3\frac{1}{2}; 3 \cdot 30 = 2 \cdot 45 \\ 4 \cdot 8 = 16 \cdot 2; 36 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot 6; 11 \cdot 4 = 2 \cdot 22; 9 \cdot x = 6 \cdot 6; 2 \cdot 25 = 5 \cdot x; 10 \cdot 8 = 40 \cdot x; 5 \cdot 10 = 2\frac{1}{2} \cdot 20; \\ \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{5}{6} \cdot 4.$$

- 13) Aus dem Vorstehenden folgt, daß jede Proportion richtig ist, wenn das Product der äußern Glieder gleich ist dem Producte der innern Glieder. Du wirst daher nun auch den Grund angeben können, warum man das erste und dritte Glied einer Proportion mit derselben Zahl multipliciren oder dividiren darf, ohne daß die Zahlen aufhören, eine richtige Proportion zu bilden.

Z. B. Aus $1 : 6 = \frac{2}{3} : 4$ entsteht:

$$3 \cdot 1 : 6 = 2 : 4$$

$$\text{Denn } 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$$

- 14) Verändere die folgenden Proportionen so, daß kein Bruch in irgend einem Gliede vorkommt:

$$1) 4 : 9 = \frac{2}{5} : x$$

$$2) \frac{2}{5} : 8 = \frac{1}{4} : x$$

$$3) \frac{4}{7} : \frac{1}{2} = 8 : x$$

$$4) \frac{5}{10} : \frac{3}{4} = \frac{2}{6} : x$$

$$5) \frac{3}{4} : 1\frac{1}{3} = 4\frac{2}{7} : x$$

$$6) 1\frac{3}{5} : 7\frac{5}{8} = 11\frac{2}{10} : x$$

$$7) 4\frac{3}{4} : 1\frac{5}{9} = 7\frac{3}{11} : x$$

$$8) \frac{7}{9} : \frac{8}{11} = \frac{15}{22} : x$$

Practisch ausgeführt sieht ein Exempel so aus:

$$4\frac{1}{2} : 2\frac{3}{4} = \frac{5}{8} : x, \text{ mit 8 multiplicirt.}$$

$$36 : 22 = \frac{5}{9} : x$$