

Fölfter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Verhältnisse und Pro- portionen.

§. 205.

Bey dem Vortrage der Lehre von den Verhältni-
 ſen und Proportionen im vierten Abſchnitte konnte bloß
 auf zählbare Größen, und unter dieſen ſelbſt nur auf
 rationale Zahlen, Rückſicht genommen werden, weil es
 uns dort noch an den nöthigen Mitteln fehlte, die Ei-
 genſchaften der Verhältniſſe und Proportionen der
 Größen in derjenigen Allgemeinheit abzuhandeln, wie
 ſie bey vielen andern mathematiſchen Unterſuchungen,
 und ganz vorzüglich bey der Abhandlung der Lehre von
 der Ähnlichkeit der räumlich ausgedehnten Größen in
 der Geometrie vorausgeſetzt werden muß. Bey dieſen
 macht die Irrationalität der Exponenten der Verhält-
 niſſe ganz eigene Schwierigkeiten, welche Euklid im
 fünften Buche ſeiner Elemente mit meiſterhafter Ge-
 ſchicklichkeit vorläufig zu umgehen gewußt hat, um ſie
 hernach im zehnten Buche durch den Aufwand der ganz
 en Kraft ſeines bewunderungswürdigen Tiefſinns voll-
 ſtändig zu heben. Gleichwohl paſſet die eukli- diſche
 Theorie der Verhältniſſe und Proportionen nicht mehr
 für den jezigen Zuſtand der Mathematik, weil ſie, aller
 ihrer Weitläufigkeit und Schwierigkeit ungeachtet, für
 dieſen doch zu eingeſchränkt iſt. Denn einmal wird
 Euklids Theorie theils durch die abgeſonderte Be-

Betrachtung der rationalen und irrationalen Verhältnisse, theils durch die bloß geometrische Behandlung beider so weitläufig und schwierig, daß man sein fünftes und zehntes Buch immer für die dunkelsten und schwersten in den Elementen erklärt hat; zweitens war es ihm doch nicht möglich, solche Irrationalitäten darzustellen, die sich auf Wurzeln von andern Graden, als dem 2ten, 4ten, 8ten u. s. w. beziehen, weil die Wege dazu der Elementargeometrie unzugänglich sind. Der neueren Mathematik hingegen ist es gelungen, in den Wurzelgrößen ein Mittel zu finden, alle incommensurablen Größen vermittlest der symbolischen Construction darzustellen, sie, als Irrationalzahlen unter den Begriff der Zahl zu bringen, und allen arithmetischen Operationen zu unterwerfen; und eben dieses Mittel setzt uns in den Stand, die Theorie der Verhältnisse und Proportionen mit einer unvergleichbar größeren Einfachheit und Leichtigkeit und doch zugleich in der höchsten Allgemeinheit abzuhandeln.

Zu dieser Absicht ist zuerst erforderlich, von einem sorgfältig bestimmten Begriffe des Verhältnisses auszugehen, aus diesem und andern bloß arithmetischen Gründen alsdann hauptsächlich die Sätze des fünften Buchs der Elemente, soweit sie die gleichen Verhältnisse betreffen — denn die Betrachtung der ungleichen Verhältnisse ist der neueren Mathematik entbehrlich — abzuleiten, und mit beständiger Rücksicht auf die Irrationalität der Exponenten zu beweisen.

Auf diesem Wege muß dann freylich eine andere Theorie der Proportionen zu Stande kommen, als diejenige ist, welche man bis jetzt in den mathematischen Schriften der Deutschen — und diese sind sonst anerkannt die gründlichsten — findet, in welchen, einige Ausnahmen abgerechnet, diejenigen von den Alten, welche die Theorie der Proportionen für die Seele der ganzen Mathematik erklärt haben, diese Seele vergeblich suchen dürften.

§. 206.

Das Verhältniß (ratio) einer Größe A zu einer andern B heißt die Art der Bestimmbarkeit

(modus determinabilitatis) der Quantität der einen aus der Quantität der andern. Die Größen A, B heißen Glieder (termini) des Verhältnisses, und zwar heißt diejenige, welche man zuerst setzt, das vorhergehende oder Vorderglied (antecedens) die andere aber das nachfolgende oder Hinterglied (consequens).

Aus diesem Begriffe des Verhältnisses folgt es unmittelbar, daß die beyden Glieder desselben gleichartig, (homogenei) seyn müssen.

§. 207.

Unter den unzählig vielen gedenkbaren Arten, die Quantität einer Größe aus der Quantität einer andern zu bestimmen, sind die einfachsten diejenigen, wobey die Größen selbst ohne eine vorgängige Veränderung unmittelbar mit einander verglichen werden, und die Quantität der einen aus der Quantität der andern dadurch bestimmt wird, daß man angiebt, entweder, um wie viel die eine die andere übertriffe oder von ihr übertroffen werde, oder, wie vielmal die eine die andere enthalte, oder in ihr enthalten sey.

§. 208.

Die Art der Bestimmbarkeit der Quantität einer Größe A aus der Quantität einer andern B, welche durch die Angabe: um wie viel die A die B übertriffe, oder von der B übertroffen werde, bekannt wird, heißt das arithmetische Verhältniß der Größen A und B. Hingegen die Art der Bestimmbarkeit der Quantität einer Größe A aus der Quantität einer andern B, welche durch die Angabe: wie vielmal die A die B enthalte, oder in der B enthalten sey, bekannt wird, heißt das geometrische Verhältniß der Größen A und B.

Mit diesen Namen will man übrigens nicht sagen, daß das eine dieser Verhältnisse der Arithmetik, das andere der Geometrie ausschließlich angehöre. Denn das eine wie das andere hat sowohl bey Zahlen, als bey ausgedehnten Größen Statt, und beyde zu-

sammen bestimmen die Grenzen der Elementarmathematik. Vielmehr haben jene Benennungen ihren Ursprung wahrscheinlich daher, daß das eine dieser Verhältnisse den Gegenstand der ersten Operationen der Arithmetik ausmacht, das andere hingegen vom Euclid's im fünften Buche seiner Elemente zuerst vollständig abgehandelt worden ist.

Die übrigen in der Lehre von den Verhältnissen und Proportionen vorkommenden Benennungen werden hier aus dem vierten Abschnitte als bekannt vorausgesetzt.

§. 209.

Nennt man in einem arithmetischen Verhältnisse das Vorderglied a und die Differenz d , so ist $a - a + d$ ein allgemeiner Ausdruck für jedes arithmetische Verhältniß, und $a - (a + d) = b - (b + d)$ ein allgemeiner Ausdruck für jede arithmetische Proportion. Aus dem letzteren ergibt sich unmittelbar der Hauptsatz des §. 44 von der Gleichheit der arithmetischen Summe der äußeren und mittleren Glieder in der arithmetischen Proportion, da $a + b + d = a + d + b$. Aus diesem aber folgen alsdann wiederum die beyden Sätze des §. 45, nämlich

I. wenn man hat $a - (a + d) = b - x$,
so ist $a + x = a + d + b$ und mithin
 $x = a + d + b - a = b + d$.

II. Wenn man hat $a - x = x - (a + 2d)$,
so ist $2x = 2a + 2d$, und mithin
 $x = \frac{2a + 2d}{2} = a + d$.

§. 210.

Verschiedene neuere, besonders französische, Mathematiker wollen der arithmetischen Proportion den Namen einer Porportion gar nicht zugeschiehen, sondern sie vielmehr Gleichheit der Differenz (égalité de différence) genannt wissen.

So sagt unter andern Lacroix in einer Anmerkung zu der, seiner Ausgabe von Clairaut's Algebra vorgelegten, Arithmetik von Biot S. 187.

„Diese Benennungen (arithmetische und geometrische Proportion) sind sehr fehlerhaft. Das Wort Proportion hat in unserer Sprache einen bestimmten Sinn, welcher den Zahlen, die gleiche Differenzen haben, auf keine Weise zukommt. Außerdem ist die sogenannte geometrische Proportion nicht weniger arithmetisch, als die, welche ausschließend diesen Namen führt. Lagrange hat in seinen, in der Normalchule gehaltenen, Vorlesungen den Sprachgebrauch, in dieser Hinsicht berichtigt, und ich habe seinem Beyspiele gefolgt.“

Wenn ich dagegen, mit aller Achtung für die Verdienste eines Lagrange und Lacroix, erkläre, daß ich eben so wenig diesem Beyspiele folgen, als in dieser unbefugten Aenderung des Sprachgebrauchs eine Berichtigung erkennen kann, so übernehme ich eben damit die Verbindlichkeit den bisherigen Sprachgebrauch zu rechtfertigen. Diese Rechtfertigung läßt sich nun am befriedigendsten aus der ursprünglichen und eigentlichen Bedeutung des Wortes *proportio* führen. Bekanntlich ist dieses Wort späteren Ursprungs und — ein Paar Stellen bey Cicero und Varro ausgenommen, in welchen das griechische *ἀναλογία* dadurch ausgedrückt ist, — bey keinem der älteren römischen Klassiker zu finden. Wohl aber findet man bey vielen von diesen, namentlich bey Cicero, Plinius, Livius, Tacitus, Curtius oft und in mancherley Verbindungen den Ausdruck *pro portione*, welcher immer unserm teutschen nach Maßgabe, oder nach Verhältniß entspricht, z. B. *pro portione multitudinis*, *laboris*, *periculi*, *gradus*, *navatae operae* u. s. w. Offenbar ist also das Wort *proportio* aus *pro portione* ebenso entstanden wie *proconsul* aus *pro consule*, *propraetor* aus *pro praetore* u. a. m.

Da nun der Ausdruck *pro portione* in allen angeführten Beyspielen eine Gleichheit zweyer Verhältnisse andeutet, so muß eben dieses auch die ursprüngliche und eigentliche Bedeutung des Wortes *proportio*

seyn. Daß aber diese Verhältnisse ebenfogut arithmetische, als geometrische seyn können, würde, wenn es nicht vielmehr *à priori* aus dem Begriffe der Sache abaeleitet, als *à posteriori* aus dem Sprachgebrauche bewiesen werden müßte, das einzige bey S. 118 angeführte Beyispiel von dem Preise, welchen Alexander's Soldaten für die Ersteigung von Petra Sogdiana erhielten, zu beweisen völlig hinreichend seyn. Denn dort entsprach deutlich die *portio praemii uno talento, accisi der portioni diminuti periculi proximo cuique relict.*

Außerdem wäre, wenn man auch sonst gar keinen Grund dafür hätte, doch der im neunten Abschnitte gewählte Vortrag der so wichtigen Lehre von den Logarithmen, welchem, zur Belehrung des Anfängers, nach meiner wohl gegründeten Ueberzeugung, vor allen andern der Vorzug zuerkannt werden muß, schon der sprechendste Beweis von der Nützbarkeit und Fruchtbarkeit der bisher zum Grunde gelegten Ansicht und Darstellungsart von den arithmetischen Proportionen und Progressionen und die vollgültigste Rechtfertigung des in dieser Lehre bisher befolgten Sprachgebrauchs.

§. 211.

Wenn von zwey ungleichen Größen A, C die kleinere C etlichemal wiederholt die größere A genau herzubringt, oder eine der größeren gleiche giebt, so sagt man die kleinere C messe die größere A, oder jene sey ein *Maas* von dieser.

Hat die Größe C diese Eigenschaft nicht nur in Ansehung der A, sondern auch in Ansehung einer andern B, so verschieden übrigens die Zahlen seyn mögen, nach welchen die C wiederholt werden muß, um die A und B hervorzubringen, so heißt die C ein gemeinschaftliches *Maas* der beyden A und B.

Eben so heißen die beyden A und B alsdann auch Vielfache von der C, die C aber ein Theil von ihnen.

Im Lateinischen nennt man einen solchen Theil (der etlichemal wiederholt das Ganze selbst giebt) *pars*

aliquota; jeden Theil hingegen der diese Eigenschaft nicht hat, sondern der, etlichmal wiederholt, entweder das Ganze selbst und noch einen Theil von ihm, oder ein Vielfaches des Ganzen giebt, pars aliquanta. Im Deutschen kann man füglich einen Theil der ersten Art durch das Wort Theil ohne Beysatz, einen Theil der andern Art hingegen durch das Wort Theilvielfaches bezeichnen. So sind z. B. 2, 3, 4, 6 Theile der Zahl 12, hingegen 8 ist ein Theilvielfaches von ihr, nämlich das Doppelte ihres dritten Theils 4.

Zwey Größen A, B heißen Gleichvielfache von zwey andern C, D wenn die größere A die kleinere C ebenso oft enthält, als die größere B die kleinere D; und die letzten C, D heißen alsdann gleiche Theile (partes aequae aliquotae) der ersten A, B. Jede Gleichvielfachen solcher gleichen Theile aber heißen gleiche Theilvielfachen (partes aequae aliquantae) der Größen A, B.

§. 212.

Alle Vergleichen der Größen und ihrer Vielfachen, Theile und Theilvielfachen beruhen auf dem folgenden allgemeinen Grundsatz: Von gleichen Größen sind alle Gleichvielfachen gleiche Theile und gleiche Theilvielfachen einander gleich, von ungleichen aber ungleich, nämlich von der größeren größer, und von der kleineren kleiner; und umgekehrt: Größen, deren Gleichvielfachen, gleiche Theile und gleiche Theilvielfachen gleich sind, sind selbst einander gleich; wo aber diese ungleich sind, da sind auch die Größen ungleich, diejenige nämlich ist größer, als die andere, deren gleiche Vielfachen, Theile oder Theilvielfachen größer, als die der andern sind.

§. 213.

Bei dem geometrischen Verhältnisse heißt diejenige ganze oder gebrochene Zahl, welche anzeigt, wievielmals das Hinterglied eines Verhältnisses in seinem Vordergliede enthalten sey, der Exponente des Verhältnisses. Das Verhältniß heißt ein rationales oder irrationales, je nachdem der Exponente eine rationale oder irrationale Zahl ist.

Wenn der Exponente ein Bruch ist, so enthält die größere GröÙe nicht die kleinere selbst, sondern nur einen Theil von ihr.

§. 214.

Aus diesen Erklärungen fließen folgende Sätze:

- I. Daß geometrische Verhältniß zweyer GröÙen A, B wird bestimmt, dadurch daß man den Exponenten desselben angiebt.
- II. Daß Vorderglied A des Verhältnisses $A : B$ erhält man, wenn man das Hinterglied B mit dem Exponenten multiplicirt. Das Hinterglied B aber erhält man, wenn man das Vorderglied A mit dem Exponenten dividirt.
- III. Den Exponenten des geometrischen Verhältnisses $A : B$ findet man, wenn man das Vorderglied A durch das Hinterglied B mißt.

Sind daher die Glieder des Verhältnisses Zahlen, so erhält man den Exponenten durch die Division des Vorderglieds mit dem Hintergliede; sind aber die Glieder GröÙen eigener Art (*quantæ sui generis*) so findet eine solche Division nicht Statt, weil der Divisor immer eine Zahl seyn muß.

- IV. Exponenten und Quotienten sind demnach nur in dem Falle einerley, wenn die GröÙen A, B Zahlen sind. Sie sind hingegen in folgenden Rücksichten wesentlich unterschieden:

a) Bey dem Verhältnisse $A : B$ ist die Frage nach dem Multiplicator womit B multiplicirt werden muß, um A zu erhalten; hingegen bey der Division der GröÙe A durch die B ist die Frage nach dem Multiplicandum, das mit B multiplicirt werden muß, um A zu erhalten.

b) Bey dem Verhältnisse $A : B$ müssen nothwendig beyde Glieder gleichartig seyn, hingegen bey der Division der GröÙe A durch die B kann das Dividendum eine GröÙe von jeder andern Art, als der Divisor seyn.

c) Bey dem Verhältnisse $A : B$ kann B jede mit A gleichartige Größe seyn, hingegen bey der Division der Größe A durch die B muß der Divisor B nothwendig eine Zahl seyn.

d) Bey dem Verhältnisse $A : B$ ist der Exponente allemal eine Zahl; hingegen bey der Division der Größe A durch die B ist der Quotient immer mit dem Dividendum gleichartig, und kann also jede Größe seyn.

§. 215.

Da von zwey incommensurablen Größen keine durch die andere sich messen läßt, so passen die Erklärungen §. 208. 213. nur auf commensurable Größen. Um also auch die incommensurablen Größen unter den Begriff des Verhältnisses zu bringen, wie die gewöhnliche Bedeutung dieses Wortes es fordert, muß man die obigen Erklärungen durch Hinzusezung einer neuen Bestimmung erweitern. Dazu führt der folgende Satz.

§. 216.

Wenn A und B incommensurable Größen sind, so wird ihr geometrisches Verhältniß entweder dadurch angegeben, daß man zwey Grenzen angiebt, zwischen welche der Exponente dieses Verhältnisses beständig fällt, und die diesem Exponenten so nahe kommen, daß ihr Unterschied von demselben für nichts zu achten ist, oder dadurch, daß man den rationalen Theil von diesem Exponenten so genau angiebt, daß der weggelassene irrationale Theil für nichts zu achten ist.

Da (§. 214. I.) das geometrische Verhältniß zweyer Größen dadurch angegeben wird, daß man den Exponenten desselben angiebt, dieser aber bey incommensurablen Größen sich nie genau angeben läßt, so kann auch das geometrische Verhältniß zweyer incommensurablen Größen nie genau, sondern bloß durch Näherung, angegeben werden.

Soll aber eine solche näherungsweise ausgedrückte Angabe des Exponenten die Stelle einer völlig genauen

Angabe desselben vertreten können, so muß die Näherung so weit getrieben werden, daß der am Ende zugelassene Fehler für nichts zu achten ist.

Dies erhält man nun auf zweyerley Art.

Erstens dadurch, daß man zwey Grenzen an giebt, zwischen welche der Exponente beständig fällt, und welche diesem Exponenten so nahe kommen, daß ihr Unterschied für nichts zu achten ist.

Denn gesetzt, das Vorderglied A enthalte $\frac{1}{m}$ des Hinterglieds B n mal und überdies noch den Rest R , so daß $A = \frac{n}{m} B + R$, (wo $R < \frac{1}{m} B$) und es sey die Ergänzung des Rests zu dem gebrauchten Maasse, $\frac{1}{m} B - R = S$; so ist auch $S < \frac{1}{m} B$, und $A + S = \frac{n}{m} B + R + S$, oder $A + S = \frac{n+1}{m} B$, also $A = \frac{n+1}{m} B - S$. Demnach ist $A > \frac{n}{m} B$, aber schon $A < \frac{n+1}{m} B$. Diese Brüche sind alsdann die Grenzen von dem Exponenten des Verhältnisses $A : B$; $\frac{n}{m}$ die kleinere, und $\frac{n+1}{m}$ die größere.

Diese Grenzen aber können einander so nahe gebracht werden, daß sie um weniger, als jede gegebene noch so kleine Größe von einander unterschieden sind.

Denn es ist so wohl $R < \frac{1}{m} B$, als $S < \frac{1}{m} B$.

Weil man nun die Zahl m so groß annehmen kann, daß der Bruch $\frac{1}{m}$ kleiner wird, als jeder gegebene noch so kleine Bruch, so kann zugleich R und S kleiner werden, als jede gegebene Zahl. Hat man es aber dahin gebracht, so sind alsdann beide Grenzen von einander selbst, folglich noch vielmehr von dem

zwischen ihnen liegenden Exponenten um weniger, als jeden gegebenen noch so kleinen Bruch unterschieden, welche von beyden also für den Exponenten gesetzt werden mag, so wird nur ein Fehler zugelassen, der für nichts zu achten ist.

Zweitens erhält man es dadurch, daß man den rationalen Theil des Exponenten so genau angiebt, daß der weggelassene irrationale Theil für nichts zu achten ist.

Dies wird zugestanden werden müssen, sobald erwiesen ist, daß der rationale Theil von dem Exponenten des Irrationalverhältnisses $A : B$ größer werden könne, als jede gegebene Zahl, die kleiner ist, als der ganze Exponente dieses Verhältnisses.

Daß Letztere kann aber auf folgende Art gezeigt werden:

Es sey des Irrationalverhältnisses $A : B$ ganzer Exponente $\frac{n}{m}$, und die Zahl $p < \frac{n}{m}$; der rationale Theil des Exponenten sey $\frac{r}{m}$, wo also $n > r$. Da nach der Voraussetzung $p < \frac{n}{m}$, so sey $p + d = \frac{n}{m}$, und man nehme m so groß, daß $\frac{1}{m} < d$ werde.

Wenn man nun gefunden hat $A = \frac{r}{m} B + R$, so daß $R < \frac{1}{m} B$; so ist auch $R < dB$.

Da nun nach der Voraussetzung $A = \frac{n}{m} B$, aber $\frac{n}{m} = p + d$; so ist auch $A = (p + d) B = pB + dB$. Aber nach der Voraussetzung ist auch $A = \frac{r}{m} B + R$;

folglich $pB + dB = \frac{r}{m} B + R$. Da nun, nach dem
Bewiesenen, $R < dB$, so muß $\frac{r}{m} B < pB$ und
mithin $\frac{r}{m} < p$ seyn, was für eine Größe auch B
seyn mag.

Wird also der rationale Theil von dem Exponenten des Irrationalverhältnisses $A : B$ auf die ebengezeigte Art größer gemacht, als jede gegebene Zahl, die kleiner ist, als der ganze Exponente, so wird er dadurch so genau angegeben, daß der weggelassene irrationale Theil für nichts zu achten ist. w. z. e. w.

§. 217.

Das geometrische Verhältniß zweyer Größen wird demnach angegeben, dadurch daß man den Exponenten desselben, oder die Grenzen, oder auch den rationalen Theil des Exponenten angiebt (§. 214. I. 216.)

Der Exponente eines jeden geometrischen Verhältnisses kann also durch eine Rationalzahl und mithin durch einen Bruch $\frac{n}{m}$ ausgedrückt werden, bey rationalen Verhältnissen völlig genau, bey irrationalen aber durch eine Näherung, die der erschöpfenden Genauigkeit gleich zu setzen ist.

§. 218.

Zwey geometrische Verhältnisse $A : B, C : D$ heißen gleich, oder vier Größen A, B, C, D geometrisch proportionirt wenn die Exponenten beyder Verhältnisse gleich oder beständig zwischen einerley Grenzen eingeschlossen, oder die rationalen Theile der Exponenten beständig gleich sind, auf was für gleiche Theile der Hinterglieder B, D sie immer bezogen werden mögen.

§. 219.

Wenn $A = B$, so ist

$$\text{I. } A : C = B : C$$

$$\text{II. } C : A = C : B \text{ d. h.}$$

Gleiche Größen haben zu einer Größe und eine Größe hat zu gleichen Größen einerley Verhältniß.

I. Da, nach der Voraussetzung, $A = B$ so ist zugleich $A = \frac{n}{m} C$ und $B = \frac{n}{m} C$; folglich (§. 218.) $A : C = B : C$.

II. Da $A = B$, so ist auch zugleich $C = \frac{m}{n} A$, u.
 $C = \frac{m}{n} B$; folglich $C : A = C : B$ (§. 218.).

§. 220.

Wenn $A : C = B : C$, oder

$$C : A = C : B, \text{ so ist}$$

$$A = B; \text{ d. h.}$$

Größen, die zu einer dritten einerley Verhältniß haben, und solche, zu welchen eine dritte einerley Verhältniß hat, sind einander gleich.

I. Da (u. d. B.) $A : C = B : C$, so ist zugleich $A = \frac{n}{m} C$, und $B = \frac{n}{m} C$; folglich $A = B$.

II. Da $C : A = C : B$ so ist zugleich $C = \frac{m}{n} A$,
 und $C = \frac{m}{n} B$; folglich $\frac{m}{n} A = \frac{m}{n} B$, und mitz
 hin auch $A = B$.

§. 221.

Wenn $A : B = C : D$ und

$$C : D = E : F, \text{ so ist auch}$$

$$A : B = E : F, \text{ d. h.}$$

Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, sind einander selbst gleich.

Denn, wenn des Verhältnisses $A : B$ Exponente oder dessen rationaler Theil $\frac{n}{m}$ ist, so ist, weil (n. d. B.) $A : B = C : D$, auch des Verhältnisses $C : D$, Exponente oder dessen rationaler Theil $\frac{n}{m}$ (§. 218.), und mithin, da (n. d. B.) $C : D = E : F$, auch des Verhältnisses $E : F$ Exponente oder dessen rationaler Theil $\frac{n}{m}$; folglich auch $A : B = E : F$.

§. 222.

Wenn die Quantität einer Größe von der Quantität einer andern so abhängt, daß alle Quantitäten der ersten, die mit gleichen Quantitäten der andern zusammengehören, auch gleich, alle Quantitäten der ersten aber, die mit ungleichen Quantitäten der andern zusammengehören, auch ungleich sind, und zwar so, daß diejenigen Quantitäten der ersten, welche mit größeren Quantitäten der andern zusammengehören auch um ebenso vielmal größer sind, wie vielmal größer die ihnen zugehörigen Quantitäten der andern genommen werden, und daß diejenigen Quantitäten der ersten, welche mit kleineren Quantitäten der andern zusammengehören, auch um ebenso vielmal kleiner sind, wie vielmal kleiner die ihnen zugehörigen Quantitäten der andern genommen werden, und es sind A, B zwey Quantitäten der ersten Größe, welche mit zwey Quantitäten C, D der andern zusammengehören, so ist immer $A : B = C : D$. d. h. so sind jede zwey Quantitäten der ersten Größe den ihnen zugehörigen Quantitäten der andern proportionirt.

Da (n. d. B.) mit Quantitäten der andern Größe, jede $= C$, Quantitäten der ersten, jede $= A$, zusammengehören, so daß mit der Quantität $2C$ der andern die Quantität $2A$ der ersten u. s. w. zusammengehört, so gehört im Allgemeinen mit der Quantität mC der andern die Quantität mA der ersten zusammen.

Ebenso gehört mit der Quantität nD der andern die Quantität nB der ersten zusammen. Da nun (n. d. B.) wenn $ma = nB$, allemal auch $mC = nD$ ist, so hat man immer zugleich $A = \frac{n}{m}B$ und $C = \frac{n}{m}D$; folglich $A : B = C : D$ (§. 218.).

§. 223.

Wenn $A : B = C : D$; so ist je nachdem

$$A \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} B, \text{ auch } C \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} D; \text{ d. h.}$$

Wenn vier Größen proportionirt sind, so ist, je nachdem die erste größer, ebenfogroß, oder kleiner ist, als die zweyte, allemal auch die dritte zugleich größer, ebenfogroß, oder kleiner, als die vierte.

I. Wenn $A = B$ und mithin des Verhältnisses $A : B$ Exponente $= 1$, so ist auch des Verhältnisses $C : D$ Exponente $= 1$ und mithin $C = D$.

II. Wenn $A > B$, so ist, im Falle der Rationalität, der Exponente > 1 , im Falle der Irrationalität aber der rationale Theil des Exponenten $> \frac{n}{n}$, weil (n. d. B.) $A > B$, oder $A > \frac{n}{n}B$; folglich ist auch des Verhältnisses $C : D$ Exponente > 1 oder des Exponenten rationaler Theil $> \frac{n}{n}$, und mithin auch $C > D$.

III. Wenn $A < B$, so ist, im Falle der Rationalität, des Verhältnisses $A : B$ Exponente < 1 , und im Falle der Irrationalität des Exponenten rationaler Theil $< \frac{n}{n}$, weil (n. d. B.) $A < B$, oder $A < \frac{n}{n}B$; folglich ist auch des Verhältnisses $C : D$ Exponente entweder < 1 , oder des Exponenten rationaler Theil $< \frac{n}{n}$ und mithin auch $C < D$.

§. 224

Wenn $A : B = C : D$ so ist, je nachdem $A = mB$,
 oder $A = \frac{1}{m} B$, oder $A = \frac{n}{m} B$, auch $C = mD$,
 oder $C = \frac{1}{m} D$, oder $C = \frac{n}{m} D$, d. h.

Wenn vier Größen proportionirt sind, und die erste ist ein Vielfaches oder ein Theil, oder ein Theilvielfaches von der zweyten, so ist auch die dritte ein Gleichvielfaches, oder ein gleicher Theil, oder ein gleiches Theilvielfaches von der vierten.

Wenn $A : B = C : D$ und es ist $A = mB$, oder $A = \frac{1}{m} B$, oder $A = \frac{n}{m} B$, d. h. wenn des Verhältnisses $A : B$ Exponente m oder $\frac{1}{m}$, oder $\frac{n}{m}$ ist, so ist auch des Verhältnisses $C : D$ Exponente m oder $\frac{1}{m}$, oder $\frac{n}{m}$ und folglich auch $C = mD$, oder $C = \frac{1}{m} D$, oder $C = \frac{n}{m} D$ (§. 218.)

§. 225.

Es ist $mA : A = mB : B$

$$\frac{1}{m} A : A = \frac{1}{m} B : B$$

$$\frac{n}{m} A : A = \frac{n}{m} B : B \quad \text{d. h.}$$

Alle Größen verhalten sich wie ihre Gleichvielfachen, wie ihre gleichen Theile und wie ihre gleichen Theilvielfachen.

Der beyden Verhältnisse $mA : A$ und $mB : B$ Exponente ist m ; der beyden Verhältnisse $\frac{1}{m} A : A$ und $\frac{1}{m} B : B$ Exponente ist $\frac{1}{m}$, und der beyden Verhält-

nisse $\frac{n}{m} A : A$ und $\frac{n}{m} B : B$ Exponente ist $\frac{n}{m}$; folglich sind die Verhältnisse gleich (§. 218.).

§. 226.

Wenn $A : B = C : D$, so ist auch invertendo $B : A = D : C$ d. h.

Wenn vier Größen proportionirt sind, so sind sie auch umgekehrt proportionirt.

Da (u. d. V.) $A : B = C : D$, so ist immer zugleich $A = \frac{n}{m} B$ und $C = \frac{n}{m} D$; folglich auch zugleich

$mA = nB$ und $mC = nD$, und mithin $B = \frac{m}{n} A$,

und $D = \frac{m}{n} C$; also die Exponenten der Verhältnisse $B : A$ und $D : C$ oder deren rationale Theile, folglich auch die Verhältnisse selbst (§. 218.) einander gleich, und mithin $B : A = D : C$.

§. 227.

Wenn die Quantität einer Größe von der Quantität einer andern so abhängt, daß alle Quantitäten der ersten, die mit gleichen Quantitäten der andern zusammengehören auch gleich, alle Quantitäten der ersten aber, die mit ungleichen Quantitäten der andern zusammengehören, auch ungleich sind, aber so, daß diejenigen Quantitäten der ersten, welche mit größeren Quantitäten der andern zusammengehören, um ebensovielfach größer sind, wie vielmal größer die ihnen zugehörigen Quantitäten der andern genommen werden, und daß diejenigen Quantitäten der ersten, welche mit kleineren Quantitäten der andern zusammengehören, um ebensovielfach kleiner sind, wie vielmal kleiner die ihnen zugehörigen Quantitäten der andern genommen werden, und es sind A, B zwey Quantitäten der ersten Größe, die mit zwey Quantitäten der andern C, D zusammengehören, so ist immer $A : B = D : C$, d. h. so sind jede zwey Quantitäten der einen Größe den ihnen zu-

gehörigen Quantitäten der andern umgekehrt proportionirt.

Da (n. d. B.) mit Quantitäten der andern Größe, jede $= C$, Quantitäten der ersten Größe, jede $= A$ so zusammengehören, daß mit der Quantität $2C$ der andern die Quantität $\frac{1}{2} A$ der ersten, u. s. w. zusammengehört, so gehört im Allgemeinen mit der Quantität mC der andern die Quantität $\frac{1}{m} A$ der ersten zusammen. Eben so gehört mit der Quantität nD der andern die Quantität $\frac{1}{n} B$ der ersten zusammen. Da nun (n. d. B.) wenn $\frac{1}{m} A = \frac{1}{n} B$, allemal auch $mC = nD$ ist, so hat man folglich immer zugleich $B = \frac{n}{m} A$ und $C = \frac{n}{m} D$; folglich (§. 218.) $B : A = C : D$; und mithin auch invertendo $A : B = D : C$ (§. 226.).

§. 228.

Wenn $A : B = C : D$; so ist auch permutando $A : C = B : D$; d. h.

Wenn vier Größen proportionirt sind, so sind sie auch verwechselt proportionirt.

Da (n. d. B.) $A : B = C : D$, so ist zugleich $A = \frac{n}{m} B$ und $C = \frac{n}{m} D$. Nun ist $\frac{n}{m} B : \frac{n}{m} D = B : D$ (§. 225.); folglich auch $A : C = B : D$.

§. 229.

Wenn $A : B = C : D$ und $B : E = D : F$, so ist auch ordinatio et ex aequo $A : E = C : F$; d. h.

Wenn Größen, so viel ihrer seyn mögen, paarweise einander so proportionirt sind, daß immer das Hinterglied des einen Verhältnisses das Vorderglied

des nächstfolgenden ist, so verhält sich das erste Vorderglied zum letzten Hintergliede auf der einen wie auf der andern Seite.

Da (n. d. B.) $A : B = C : D$, so ist zugleich $A = \frac{n}{m} B$, und $C = \frac{n}{m} D$; und da $B : E = D : F$, so ist zugleich $B = \frac{p}{q} E$, und $D = \frac{p}{q} F$; folglich zugleich $A = \frac{np}{mq} E$, und $C = \frac{np}{mq} F$; mithin auch $A : E = C : F$ (§. 218.)

§. 230.

Wenn $A : B = E : F$ und $B : C = D : E$, so ist auch perturbate et ex aequo $A : C = D : F$, d. h.

Wenn sechs Größen so proportionirt sind, daß die erste zur zweyten sich verhält wie die fünfte zur sechsten, und außerdem die zweite zur dritten, wie die vierte zur fünften, so verhält sich auch die erste zur dritten, wie die vierte zur sechsten.

Da $A : B = E : F$, so ist zugleich $A = \frac{n}{m} B$ u. $E = \frac{n}{m} F$; und da $B : C = D : E$, so ist zugleich $B = \frac{p}{q} C$, und $D = \frac{p}{q} E$; folglich zugleich $A = \frac{np}{mq} C$, und $D = \frac{np}{mq} F$, mithin auch $A : C = D : F$ (§. 218.).

§. 231.

Wenn $A : B = C : D$ und $A > B$, folglich auch $C > D$ (§. 223), so ist auch dividendo

$$A - B : \left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} = C - D : \left\{ \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \right\}, \text{ d. h.}$$

Wenn vier Größen proportionirt sind, so verhält sich auch der Ueberschuß des Vorderglieds über das Hinterglied zu ebendemselben Vordergliede oder Hintergliede auf der einen wie auf der andern Seite.

Da $A : B = C : D$; so ist immer zugleich $A = \frac{n}{m} B$ und $C = \frac{n}{m} D$, (wo, im Falle der Rationalität, $n > m$, im Falle der Irrationalität aber n nicht $< m$ seyn muß) aber auch zugleich $A - B = \frac{n-m}{m} B$,

und $C - D = \frac{n-m}{m} D$, folglich die Exponenten der Verhältnisse $A - B : B$ und $C - D : D$ oder deren rationale Theile einander gleich, und mithin auch die Verhältnisse selbst (§. 218.), also $A - B : B = C - D : D$.

Da nun (n. d. B.) $A : B = C : D$, folglich auch $B : A = D : C$ (§. 226.), so ist auch *ex aequo* $A - B : A = C - D : C$ (§. 229.)

§. 232.

Wenn $A : B = C : D$, so ist auch *componendo*

$$A + B : \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = C + D : \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix}, \text{ d. h.}$$

Wenn vier Größen proportionirt sind, so verhält sich auch die Summe des Vorderglieds und Hinterglieds zu eben demselben Vordergliede oder Hintergliede auf der einen wie auf der andern Seite

Nach der Voraussetzung und §. 218. ist zugleich $A = \frac{n}{m} B$ und $C = \frac{n}{m} D$, mithin auch zugleich $A + B = \left(\frac{n}{m} + 1\right) B = \frac{n+m}{m} B$, und $C + D = \left(\frac{n}{m} + 1\right) D = \frac{n+m}{m} D$; folglich $A + B : B = C + D : D$ (§. 218.).

Da ferner (n. d. B.) $A : B = C : D$, so ist auch umgekehrt $B : A = D : C$ (§. 226.), und mithin ex aequo $A + B : A = C + D : C$ (§. 229.).

§. 233.

Wenn $A : B = C : D$ und es ist $A > B$, folglich auch $C > D$ (§. 223.); so ist auch convertendo $A : A - B = C : C - D$ d. h.

Wenn vier Größen proportionirt sind, so verhält sich auch das Vorderglied zum Ueberschusse des Vorderglieds über das Hinterglied auf der einen wie auf der andern Seite; oder:

Wenn vier Größen proportionirt sind, so sind sie auch wiederkehrend proportionirt.

Da (n. d. B.) $A : B = C : D$, so ist zugleich $A = \frac{n}{m} B$ und $C = \frac{n}{m} D$, oder es ist zugleich $B = \frac{m}{n} A$, und $D = \frac{m}{n} C$, (wo wiederum im Falle der Rationalität $n > m$, im Falle der Irrationalität aber n nicht $< m$ seyn muß) aber auch zugleich $A - B = \left(1 - \frac{m}{n}\right) A = \frac{n-m}{n} A$, u. $C - D = \left(1 - \frac{m}{n}\right) C = \frac{n-m}{n} C$; folglich ist $A - B : A = C - D : C$ und mithin auch umgekehrt $A : A - B = C : C - D$ (§. 226.).

§. 234.

Wenn $A : B = C : D = E : F = G : H$ u. c. so ist auch antecedentes et consequentes summando

$$A + C + E + G : B + D + F + H = A : B, \text{ d. h.}$$

Wenn Größen, soviel ihrer seyn mögen, proportionirt sind, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wie eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder.

Wenn $A : B = C : D = E : F = G : H$ u. u.
 so ist auch zugleich $A = \frac{n}{m} B$, $C = \frac{n}{m} D$, $E = \frac{n}{m} F$,
 $G = \frac{n}{m} H$ u. u. (§. 218), und mithin $A + C + E + G + u.$
 $= \frac{n}{m} (B + D + F + H + u.)$ (§. 218.); folglich
 $A + C + E + G + u. : B + D + F + H + u.$
 $= A : B$ (§. 218.).

Da eben diese Schlüsse auf gleiche Art Statt finden, wie groß oder wie klein immer die Zahl der zusammen genommenen Vorderglieder und Hinterglieder seyn mag; so ist damit zugleich der Satz bewiesen, daß jede beliebige Zahl (n) von Vordergliedern zu der gleich großen Zahl von Hintergliedern sich verhalte, wie eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder.

§. 235.

Wenn $A : B = C : D$, so ist auch antecedentes et consequentes differentiando

$$A - C : B - D = A : B, \text{ d. h.}$$

Wenn vier Größen proportionirt sind, so verhält sich auch die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu einem Hintergliede.

Wenn $A : B = C : D$, so ist auch

$$A : C = B : D \text{ (§. 228.) folglich}$$

$$\text{auch } A - C : A = B - D : B \text{ (§. 231.)}$$

$$\text{und } A - C : B - D = A : B \text{ (§. 228.).}$$

§. 236.

Wenn $A : B = C : D$, so ist auch

$$pA : B = pC : D$$

$$A : qB = C : qD$$

$$pA : qB = pC : qD \text{ d. h.}$$

Wenn vier Größen proportionirt sind, so haben auch jede Gleichvielfache der ersten und dritten zur zweyten und vierten, ferner die erste und dritte zu je-

den Gleichvielfachen der zweyten und vierten, und endlich jede Gleichvielfache der ersten und dritten zu jedem andern Gleichvielfachen der zweyten und vierten einerley Verhältniß.

Da $A : B = C : D$, so ist zugleich $A = \frac{n}{m} B$,
 und $C = \frac{n}{m} D$; folglich auch zugleich $pA = \frac{pn}{m} B$, und
 $pC = \frac{pn}{m} D$; $A = \frac{n}{qm} qB$, und $C = \frac{n}{qm} qD$; end-
 lich $pA = \frac{pn}{qm} qB$ und $pC = \frac{pn}{qm} qD$. Demnach sind
 die Exponenten der Verhältnisse $pA : B$ und $pC : D$,
 $A : qB$ und $C : qD$, $pA : qB$ und $pC : qD$ oder der
 reu rationale Theile einander gleich, nämlich $\frac{pn}{m}$,
 $\frac{n}{qm}$, $\frac{pn}{qm}$, und mithin sind auch die Verhältnisse selbst
 einander gleich (§. 218.).

Dies ist zugleich der allgemeine Beweis von §. 50, VI.

§. 237.

Wenn $A : B = C : D$ so ist auch

$$\frac{I}{m} A : B = \frac{I}{m} C : D$$

$$A : \frac{I}{n} B = C : \frac{I}{n} D$$

$$\frac{I}{m} A : \frac{I}{n} B = \frac{I}{m} C : \frac{I}{n} D, \text{ d. h.}$$

Wenn vier Größen proportionirt sind, so haben auch jede gleiche Theile der ersten und dritten zur zweyten und vierten, ferner die erste und dritte zu jedem gleichen Theilen der zweyten und vierten, und endlich jede gleichen Theile der ersten und dritten, zu jedem andern gleichen Theilen der zweyten und vierten einerley Verhältniß.

I. Wenn $A : B = C : D$, so ist auch
 $A : C = B : D$ (§. 228.)

Nun ist aber $\frac{1}{m} A : \frac{1}{m} C = A : C$ (§. 225.)

folglich $\frac{1}{m} A : \frac{1}{m} C = B : D$ (§. 221.)

u. verwechselt $\frac{1}{m} A : B = \frac{1}{m} C : D$ (§. 226.)

II. Wenn $A : B = C : D$, so ist auch
 $A : C = B : D$ (§. 228.)

Nun ist aber $B : D = \frac{1}{n} B : \frac{1}{n} D$ (§. 225.)

folglich $A : C = \frac{1}{n} B : \frac{1}{n} D$ (§. 221.)

und verwechselt $A : \frac{1}{n} B = C : \frac{1}{n} D$ (§. 226.)

III. Wenn $A : B = C : D$, so ist auch
 $A : C = B : D$ (§. 228.);

Nun ist aber $\frac{1}{m} A : \frac{1}{m} C = A : C$ (§. 225.)

folglich $\frac{1}{m} A : \frac{1}{m} C = B : D$ (§. 221.)

Es ist aber auch $B : D = \frac{1}{n} B : \frac{1}{n} D$ (§. 225.)

folglich $\frac{1}{m} A : \frac{1}{m} C = \frac{1}{n} B : \frac{1}{n} D$ (§. 221.)

u. verwechselt $\frac{1}{m} A : \frac{1}{n} B = \frac{1}{m} C : \frac{1}{n} D$ (§. 226.)

Dies ist zugleich der allgemeine Beweis von
 §. 50. VII.

Daß der Satz ebenso allgemein gelte, wenn man
 in dem Ausdrucke desselben überall statt: gleiche
 Theile setzt: gleiche Theilvielfachen, ist aus
 dem vorigen §. für sich selbst klar.

§. 238.

Wenn $m : n = p : q$ so ist auch

$$mA : nA = pB : qB \text{ d. h.}$$

Hier zählbare Größen sind proportionirt, wenn ihre Coefficienten es sind.

Da $m : n = mA : nA$ (§. 218.) und

$m : n = p : q$ (u. d. B.), so ist auch

$$mA : nA = p : q \text{ (§. 221.).}$$

Es ist aber $p : q = pB : qB$ (§. 218.) folglich auch

$$mA : nA = pB : qB \text{ (§. 221.).}$$

§. 239.

Wenn $A : B = C : D$, und

$m : n = p : q$, so ist auch

$$mA : nB = pC : qD \text{ d. h.}$$

Wenn man zwey Proportionen hat, wovon wenigstens die eine aus bloßen Zahlen besteht, und man multiplicirt die Glieder der einen mit den gleichnamigen Gliedern der andern, so geben die Producte eine neue Proportion.

Denn wenn $A : B = C : D$, so ist auch

$$pA : qB = pC : qD \text{ (§. 236.)}$$

Da nun $m : n = p : q$ (u. d. B.)

so ist auch $mA : nB = pA : qB$ (§. 238.)

$$\text{folglich } mA : nB = pC : qD \text{ (§. 221.).}$$

§. 240.

Aus dem Satze des vorigen §. ergeben sich nachfolgende zwey neue Sätze:

I. Wenn $c : m = n : r$, so ist auch

$$c : m = n : r, \text{ d. h.}$$

Wenn vier Zahlen proportionirt sind, so sind auch ihre Potenzen von gleichem Grade proportionirt.

Denn wenn $c : m = n : r$, so ist auch

$$cc : mm = nn : rr, \text{ und ebenso } ccc : mmm = nnn : rrr;$$

(§. 239.) also im Allgemeinen $c : m = n : r$.

II. Wenn $c : m = n : r$, so ist auch

$$c : m = n : r, \text{ d. h.}$$

Wenn vier Potenzen von gleichem Grade proportionirt sind, so sind auch ihre Wurzeln proportionirt.

Denn es sey $c : m = n : x$, so ist auch

$$c^e : m^e = n^e : x^e, (I.); \text{ folglich } x^e = \frac{mn^e}{c^e}; \text{ Da nun}$$

$$(n. d. B.) c^e : m^e = n^e : r^e, \text{ so ist auch } r^e = \frac{mn^e}{c^e}$$

$$(\S. 48. I.), \text{ Demnach } x^e = r^e; \text{ und folglich auch } \sqrt[e]{x} = \sqrt[e]{r}, \text{ d. h. } x = r.$$

§. 241.

Wenn $A : B = C : D$ und

$m : n = p : q$, so ist auch

$$\frac{A}{m} : \frac{B}{n} = \frac{C}{p} : \frac{D}{q}, \text{ d. h.}$$

Wenn man zwey Proportionen hat, wovon wenigstens die eine aus bloßen Zahlen besteht, und man dividirt die Glieder der einen durch die gleichnamigen Glieder der andern, so geben die Quotienten eine neue Proportion.

Denn wenn $m : n = p : q$, so ist auch

$$n : m = q : p (\S. 226.)$$

$$\text{folglich } \frac{n}{m} = \frac{q}{p} (\S. 218. 214. III.)$$

Da nun $A : B = C : D$ (n. d. B.) so ist auch

$$A : C = B : D (\S. 228.) \text{ folglich auch } \frac{n}{m} A : \frac{n}{m} C$$

$$= B : D (\S. 225. 221.) \text{ Da nun } \frac{n}{m} = \frac{q}{p} (\text{n. d. Bew.})$$

$$\text{so ist auch } \frac{n}{m} A : \frac{q}{p} C = B : D.$$

Werden nun hier die beyden Vorderglieder mit n , und die beyden Hinterglieder mit q dividirt, was nach $\S. 237.$ erlaubt ist, so erhält man

$$\frac{I}{m} A : \frac{I}{p} C = \frac{I}{n} B : \frac{I}{q} D, \text{ oder verwechselt}$$

$$\frac{I}{m} A : \frac{I}{n} B = \frac{I}{p} C : \frac{I}{q} D \quad (\S. 228.)$$

$$d. h. \quad \frac{A}{m} : \frac{B}{n} = \frac{C}{p} : \frac{D}{q}.$$

§. 242.

Wenn $A : B = p : q$ so ist
 $qA = pB$, und umgekehrt

Wenn $qA = pB$ so ist
 $A : B = p : q$ d. h.

Wenn zwey geometrische Verhältnisse, wovon das eine aus Zahlen besteht einander gleich sind, so ist das Product der beyden äußeren Glieder dem Producte der beyden mittleren gleich; und umgekehrt: Wenn die Glieder zweyer geometrischen Verhältnisse so beschaffen sind, daß das Product der beyden äußeren dem Producte der beyden mittleren gleich ist, so sind die beyden Verhältnisse einander gleich oder die Glieder in einer geometrischen Proportion.

I. Wenn $A : B = p : q$ so ist

$$A = \frac{n}{m} B, \text{ und } p = \frac{n}{m} q \quad (\S. 218.)$$

$$\text{folglich } qA = \frac{nq}{m} B, \text{ und}$$

$$pB = \frac{nq}{m} B$$

$$\text{und mithin } qA = pB$$

II. Wenn $qA = pB$, so ist

$$A = \frac{p}{q} B$$

$$\text{Nun ist } A : B = \frac{p}{q} A : \frac{p}{q} B \quad (\S. 225.)$$

$$\text{also } A : B = \frac{p}{q} A : A$$

$$\text{oder } A : B = \frac{p}{q} : 1$$

$$\text{also } A : B = p : q \quad (\S. 236.)$$

§. 243.

Wenn bloß von zählbaren Größen die Rede ist, so ist $ma : a = mb : b$ ein allgemeiner Ausdruck für jede geometrische Proportion. Aus diesem ergibt sich unmittelbar der Hauptsatz des §. 47. von der Gleichheit der Producte der äußeren und mittleren Glieder in der geometrischen Proportion, da $mab = amb$.

Aus dem letzteren aber folgen alsdann wiederum die beyden Sätze des §. 48, nämlich

$$\begin{aligned} \text{I. wenn man hat } a : ma &= b : x, \text{ so ist} \\ ax &= mab, \text{ und mithin} \\ x &= \frac{mab}{a} = mb. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. Wenn man hat } a : x &= x : ma, \text{ so ist} \\ x^2 &= ma^2 \text{ und mithin} \\ x &= \sqrt{ma^2} = \sqrt{m} \sqrt{a^2} = ma. \end{aligned}$$

§. 244.

Um zu drey zählbaren Größen mA , nA und pB die vierte geometrische Proportionalgröße xB zu finden, suche man zu den Zahlen m , n und p die vierte geometrische Proportionalzahl $x = \frac{np}{m}$ (§. 48. I.), so ist diese die Zahl der gesuchten vierten Proportionalgröße d. h. es ist $xB = \frac{np}{m} B$.

$$\begin{aligned} \text{Denn da } m : n &= p : x, \text{ so ist} \\ mA : nA &= pB : xB \text{ (§. 238.).} \end{aligned}$$

§. 245.

Um zwischen zwey gleichartigen zählbaren Größen mA und pA die mittlere geometrische Proportionalgröße nA zu finden, suche man zwischen den Zahlen m und p die mittlere geometrische Proportionalzahl $n = \sqrt{mp}$ (§. 48. II.), so ist diese die Zahl der gesuchten mittleren Proportionalgröße, d. h. es ist $nA = A\sqrt{mp}$.

Denn da $m : n = n : p$, so ist
 $mA : nA = nA : pA$ (§. 238.)

folglich $mp^2 = nA^2$, und mithin
 $nA = A \sqrt{mp}$.

§. 246.

Wenn $A : B = m : n$; so ist

$$\begin{array}{lll} B : C = p : q; & A : C = mp : nq; \\ C : D = r : s; & A : D = mpr : nqs; \\ \text{u.} & \text{u.} & \text{u.} \end{array}$$

d. h.

Wenn das Verhältniß zweyer Größen aus Zahlenverhältnissen zusammengesetzt ist, so verhält sich die erste zur zweyten wie das Product aller Vorderglieder zum Producte aller Hinterglieder in den einfachen Zahlenverhältnissen.

Denn da $nA = mB$ und $qB = pC$ (§. 242.) so ist $A = \frac{m}{n} B$ und $C = \frac{q}{p} B$; folglich $A : C = \frac{m}{n} B : \frac{q}{p} B = \frac{m}{n} : \frac{q}{p} = mp : nq$ (§. 236.). Da nun ferner $C : D = r : s$ (u. d. B.) so ist auch $A : D = mpr : nqs$ (u. d. Bew.)

Und so kann man weiter auf jedes folgende Verhältniß fortschließen, wie groß auch immer die Menge der einzelnen Zahlenverhältnisse seyn mag.

§. 247.

Aus dem Satze des vorigen §. fließen folgende zwey neue Sätze:

I. Wenn $A : B = m : n$; so ist

$$\begin{array}{lll} B : C = m : n; & A : C = \frac{m^2}{m} : \frac{n^2}{n}; \\ C : D = m : n; & A : D = \frac{m^3}{m} : \frac{n^3}{n}. \\ \text{u.} & \text{u.} \end{array}$$

d. h.

Wenn zwey Größen im zweymal höheren Verhältnisse zweyer Zahlen stehen, so verhalten sie sich wie die Quadrate, und wenn sie in dreyimal höherem Verhältnisse zweyer Zahlen stehen, so verhalten sie sich wie die Würfel dieser Zahlen, u. s. w.

II. Wenn $m : n = \left\{ \begin{matrix} A : B \\ A : B \end{matrix} \right\}$, so ist

$$A : B = \sqrt{m} : \sqrt{n};$$

Wenn $m : n = \left\{ \begin{matrix} A : B \\ A : B \\ A : B \end{matrix} \right\}$, so ist

$$A : B = \sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n}, \text{ d. h.}$$

1c. 1c.

Wenn zwey Größen im zweymal niedrigeren Verhältnisse zweyer Zahlen stehen, so verhalten sie sich wie die Quadratwurzeln, und wenn sie im dreyimal niedrigeren Verhältnisse zweyer Zahlen stehen, so verhalten sie sich wie die Cubikwurzeln dieser Zahlen u. s. w.

Denn wenn $m : n = \left\{ \begin{matrix} A : B \\ A : B \end{matrix} \right\}$, so sey

$$A : B = p : q; \text{ und es ist } m : n = \left\{ \begin{matrix} p : q \\ p : q \end{matrix} \right\} = p^2 : q^2 \text{ (I.)}$$

folglich $p : q = \sqrt{m} : \sqrt{n}$ (§. 240. II.) und mithin auch $A : B = \sqrt{m} : \sqrt{n}$ (§. 221.).

Ist aber $m : n = \left\{ \begin{matrix} A : B \\ A : B \\ A : B \end{matrix} \right\}$, und man setzt

$$\text{wiederum } A : B = p : q, \text{ so ist } m : n = p^3 : q^3 \text{ (I.)};$$

$$\text{folglich } p : q = \sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n} \text{ (§. 240. II.)}$$

$$\text{und mithin auch } A : B = \sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n} \text{ (§. 221.).}$$

§. 248.

Mit dieser Theorie der Proportionen kann man nun sicher durch die ganze Mathematik und alle ihre

Anwendungen ausreichen, während diejenigen, welche sich erlauben Sätze, die bloß für Zahlenverhältnisse aus der Division ihrer Glieder hergeleitet sind, in der besondern und gemischten Mathematik auf Verhältnisse von besonderen Größen anzuwenden, dieses Verfahren mit nichts zu rechtfertigen wissen.

Zwar ist es, nach der Meinung gewisser Schriftsteller noch sehr problematisch, ob auch durch die vollständige und genaueste Auseinandersetzung der Proportionstheorie der Wissenschaft oder ihren Schülern überall nur ein Dienst erwiesen werden könne. Verschiedene neuere, besonders französische, Mathematiker glauben nämlich diese Theorie unter die bloßen Schaustücke im Zeughause der Wissenschaft verweisen zu können. So sagt z. B. Lacroix in seinen Anmerkungen zu Clairaut's Algebra (II. Th. S. 331): „Diese Theorie ist bloß dazu erfunden um „Größen dadurch zu entdecken, daß man sie mit andern vergleicht. Man hat seit langer Zeit die lateinischen Namen beybehalten, welche die verschiedenen „Veränderungen und Verwandlungen bezeichnen, die „eine Proportion leiden kann. Man fängt heut zu „Tage an, das Gedächtniß derer, welche die Mathematik studiren nicht mehr damit zu belasten; und das „ganze Gerüste der Proportionen würde unnütz seyn „wenn man die entsprechenden Gleichungen an ihre „Stelle setzte, welches, wie ich glaube, den Methoden „mehr Gleichförmigkeit und den Begriffen mehr Genauigkeit geben würde.“

Daß die Proportionstheorie dazu dient, um unbekannte Größen dadurch zu finden, daß man sie mit andern bekannten, vergleicht, wird ihr doch wohl nicht zum Vorwurfe gereichen sollen.

Daß man die lateinischen Namen der zulässigen Veränderungsarten der Proportionen, aus dem Zeitalter, da die Lehrbücher der Mathematik wie der übrigen Wissenschaften lateinisch geschrieben wurden, bisher beybehalten hat, daran hat man sehr wohl gethan, weil diese Namen gut gewählt sind, und die Sachen, bey der größten Kürze, genau und deutlich bezeichnen.

Daß von einem Kopfe, dem diese wenigen Namen schon zur Last fallen, für die Wissenschaften gar nichts zu erwarten sey, bedarf wohl keines Beweises.

Daß man aber heut zu Tage doch die Studirenden mit denselben zu verschonen anfängt, das hat leider! seinen guten Grund darin, daß kaum der zehnte noch soviel Latein auf die Universität mitbringt, als nöthig ist, um jene Namen nur zu verstehen. Ja es wird in Kurzem noch so weit kommen, daß man den teutschen Lehrbüchern der Mathematik, in welchen mit Buchstaben gerechnet wird, aus demselben Grunde das lateinische Alphabeth wird vorsetzen müssen, aus welchem Lacroix dem seinigen das griechische vorzusetzen für nöthig hielt.

Was aus den übrigen Theilen der Mathematik, was besonders aus der Geometrie werden soll, wenn man überall nur calculiren will, dies zu versuchen überlasse ich denen, welche ebenso, wie Lacroix, in die Gleichungen verliebt sind.

Ich hingegen halte es für meine Pflicht, meinen Schülern, bey jeder sich darbietenden Gelegenheit, die Ueberzeugung zu verschaffen, daß die Alten Recht gehabt haben, wenn sie sagten, die Proportions-theorie sey die Seele der Mathematik, und daß besonders der Elementarmathematik mit dieser Theorie das allgemeinste, fruchtbarste und schönste Erfindungsmittel würde entrisen werden.
