

Zehnter Abschnitt.

Von den Rechnungsarten mit Buchstaben.

§. 141.

Wir sind in mehreren der vorigen Abschnitte, namentlich in dem Abschnitte von den Verhältnissen und Proportionen, in dem von den Quadrat- und Cubizahlen und in dem von den Reihen und Logarithmen in den Fall gekommen, daß uns der Gebrauch gewisser allgemeinerer Zeichen, als unsere Ziffern sind, zum Bedürfnisse ward, um den Beweisen der Sätze diejenige Allgemeinheit zu geben, welche das Wesen einer reinen Vernunftwissenschaft schlechterdings erfordert. Wir haben uns zu dieser Absicht theils der Anfangsbuchstaben der Wörter, womit die Begriffe bezeichnet werden, welche die Hauptbestandtheile unserer Sätze ausmachen, theils der römischen Ziffern I, II, III u. c. als charakteristischer Zeichen bedient, indem wir z. B. das gesuchte Glied einer Proportion durch G, den Exponenten durch E, die Summe einer Reihe durch S, das erste Glied einer Proportion durch I, das dritte durch III; den ersten Theil von einer zweitheiligen Wurzel durch I, den zweyten durch II u. s. w. ausgedrückt haben, und dadurch, daß wir mit diesen Zeichen die Veränderungen der Addition, Subtraction u. s. w. eben so, wie mit den Ziffern selbst, vornahmen, ist es uns gelungen, den Beweisen die erforderliche Allgemeinheit zu verschaffen. Dies ist aber auch alles, was

sich mit diesen Zeichen ausrichten läßt, und weiter reicht ihre Anwendung nicht. Sobald es daher darauf ankommt, vielseitigere Verwickelungen der Größen überhaupt und der räumlich ausgedehnten ins Besondere in Untersuchung zu nehmen, so ist man genöthiget, sich nach noch allgemeineren Zeichen derselben umzusehen, die uns in den Stand setzen können, vermittelst der symbolischen Construction Sätze und Beweise in einer solchen Allgemeinheit abzufassen, wie es dem Geiste und den Bedürfnissen der Wissenschaft gemäß ist.

Eins der einfachsten Beispiele davon geben, unter vielen andern, die oben (S. 115.) erwähnten Aufgaben von den arithmetischen und geometrischen Reihen.

§. 142.

Zu diesem Gebrauche konnte man nun keine schicklicheren Zeichen finden, als die Buchstaben des Alphabets, welche man gegen das Ende des sechzehnten Jahrhunderts dazu gewählt, und seitdem beständig behalten hat.

Die wichtigsten Vorzüge welche den Gebrauch der Buchstaben, als Zeichen der Größen, empfehlen, sind folgende:

1) Ihre große Einfachheit, woran sie den Ziffern nichts nachgeben.

2) Ihre leichte Unterscheidbarkeit, welche sie ebenfalls mit den Ziffern gemein haben.

3) Ihre geringe Anzahl, welche, obgleich sie etwas mehr, wie doppelt so groß, als jene der Ziffern ist, doch gegen die unendliche Mannigfaltigkeit der Größen und der Combinationen von diesen, zu deren Bezeichnung sie zureichen, ganz verschwindet.

4) Ihre alles umfassende Allgemeinheit, vermöge welcher sie

(a) zu Bezeichnung aller Arten von Größen, der zählbaren, wie der räumlich ausgedehnten und dieser wie der intensiven —

(b) zu Bezeichnung aller gedenkbaren Arten der Entstehung und Veränderung der Größen, gleich tauglich sind. So kann z. B. $a + b = f$ jede Summe, $a - b = d$ jede Differenz, $ma = p$ jedes Product, $\frac{a}{n} = q$ jeden Quotienten, a^m jede Potenz, $\sqrt[n]{a}$ jede Wurzel u. s. w. bezeichnen.

5) Ihre gleiche Tauglichkeit zu Bezeichnung der unbekannten und der bekannten Größen, ohne Gefahr, die einen mit den andern zu verwechseln. Diesen wichtigen Vortheil, welcher der Rechnung mit Buchstaben eigenthümlich ist, und von dessen Werthe man sich schon dadurch eine Vorstellung machen kann, wenn man die Menge der Wörter betrachtet, welche erforderlich sind, um die in dem Begriffe des gesuchten Glieds nur bey einer zur zusammengesetzten Regel der Tri gehörigen, Aufgabe vereinigten Merkmale gehörig zu bezeichnen, und der Aufmerksamkeit gegenwärtig zu erhalten, wovon Seite 117 ein Beispiel giebt, hat man durch das einfache Mittel sich zu verschaffen gewußt, daß man zur Regel gemacht hat, zu Bezeichnung der unbekannten Größen nur die Endbuchstaben, zu Bezeichnung der bekannten aber die übrigen Buchstaben des Alphabets vom Anfange an zu gebrauchen.

6) Ihre vorzügliche Tauglichkeit, mehr die gegenseitigen Beziehungen der Größen und die Abhängigkeit der einen von der andern, als deren Quantität, auszudrücken. Dieser unschätzbare Vortheil setzt uns in den Stand eine unzählbare Menge ähnlicher Fälle unter einem einzigen allgemeinen Ausdrucke zusammenzufassen, und auf ihm beruhet hauptsächlich der große Werth und der ausgebreitete Nutzen der Buchstabenformeln.

Als die vereinigte Wirkung aller dieser Vortheile haben wir es anzusehen, daß der Gebrauch der Buchstaben, als Zeichen der Größen, uns die Untersuchung versteckter Wahrheiten ganz unbeschreiblich erleichtert, indem er es uns möglich macht

(a) mehrere lange Sätze, zu deren vollständiger Ausdrückung wir sehr viele Worte nöthig haben würden, durch wenige einfache Zeichen zugleich darzustellen.

(b) den Sinnen, der Einbildungskraft und dem Gedächtnisse ihre Dienste bey den Arbeiten des Geistes so ganz zu erlassen, daß dieser, von ihnen unabhängig, ohne um die Sachen, womit er es eigentlich zu thun hat, sich zu bekümmern, und bloß an die einfachen Zeichen derselben sich haltend, die längsten Schlußreihen mit der größten Schnelligkeit durchlaufen und die verstecktesten Verhältnisse der Größen mit gleicher Leichtigkeit wie die einfachsten enthüllen kann.

Auf solche Art wird der Calcul einer Maschine ähnlich, deren Gebrauch uns der Nothwendigkeit, auf alle einzelnen Theile der Arbeit beständig unsere Aufmerksamkeit zu richten, überhebt, und wenn wir sie nur nach den einmal erlernten Regeln behandeln, uns immer zu einem sichern Resultate führt, ohne daß wir nöthig hätten, uns dessen bewußt zu seyn, was während der Operation vorgeht.

§. 143.

Zu dieser Stufe der Vollkommenheit wurde die Rechnung mit Buchstaben, ausser dem Gebrauche der Zeichen der arithmetischen Operationen, hauptsächlich durch ein gedoppeltes Mittel erhoben, nämlich

- 1) durch die geschickte Verbindung der Ziffern mit den Buchstaben;
- 2) durch Einführung der entgegengesetzten Größen in die Rechnung.

Zu der Wahl dieser beyden Mittel wurde man durch die Unbestimmtheit geleitet, in welcher die Buchstaben-Symbole die Quantität der durch sie ausgedrückten Größen lassen.

Da nämlich diese Symbole an sich selbst gar nichts bedeuten, und eben dadurch geschickt sind, jede Größe, die wir wollen, zu bezeichnen, so können wir sie nicht gebrauchen, um auch bestimmte Vielfache oder Theile, bestimmte Potenzen oder Wurzeln der durch sie bezeichneten Größen auszudrücken. Dazu bleiben uns also unsere Ziffern unentbehrlich, und ihr

Gebrauch ist in Ansehung der Potenzen und Wurzeln hier ganz derselbe, wie bey der Rechnung mit bloßen Zahlen, nach §. 94. So bedeutet z. B. a^5 die fünfte Potenz von a ; $\sqrt[3]{z}$ die Cubikwurzel aus z u. s. w. Auch in Ansehung der Vielfachen und Theile der durch Buchstaben ausgedrückten Größen ist der Gebrauch der Ziffern dem ganz ähnlich den man bey den Vielfachen und Theilen der durch Zahlen ausgedrückten Größen von ihnen macht sobald man die Multiplicationen und Divisionen nicht wirklich vornimmt, sondern nur durch die gehörigen Zeichen andeutet, wovon in den vorigen Abschnitten viele Beyspiele vorgekommen sind, und der Unterschied besteht bloß darin, daß man eine Ziffer welche ein Vielfaches oder einen Theil von einer durch Buchstaben ausgedrückten Größe andeutet, der letzteren, weil die Auslassung des Multiplicationszeichens hier keine Irrung veranlassen kann, unmittelbar vorsetzt z. B. $3f$, $\frac{5}{2}p$ u. s. w. (von welcher Art des Gebrauchs auch in §. 117. schon ein Beispiel vorgekommen ist,) und daß eine solche Ziffer hier, auf das mit ihr verbundene Buchstabenzeichen bezogen, ein Coefficiente von diesem genannt wird, statt daß sie dort, auf das Product bezogen, ein Factor des letzteren genannt wurde.

Die Ziffern und Buchstaben, als Zeichen der zählbaren Größen, sind also keineswegs so von einander unterschieden, daß jene der Zahlenrechnung, diese der Buchstabenrechnung ausschließend angehören wie man eben durch diese Benennungen zu glauben leicht verleitet werden könnte, sondern beyde sind gleichmäßig dazu bestimmt, um in Verbindung mit einander bey jeder Rechnungsaufgabe gebraucht zu werden, bey welcher die Bedingungen von der Art sind, daß die Aufgabe ohne Hülfe der Buchstaben entweder gar nicht aufgelöst werden kann, oder daß doch die Rechnung durch Anwendung der Buchstaben leichter oder allgemeiner wird. Die Ziffern sind besondere, die Buchstaben allgemeine Namen der Größen; beyde zusammen machen die Elemente der Rechnungssprache aus. Diese Sprache hat ihre eigenen Regeln, die man aus ihrer Grammatik kennen lernen muß, welcher es zu

kommt, den Gebrauch dieser Elemente zu zeigen, ihre verschiedenen Bedeutungen festzusetzen, und ihre Syntax durch Beispiele zu erläutern. Eben diese Grammatik der Rechnungssprache macht daher den ersten Theil der bisher sehr unschicklich sogenannten Buchstabenrechnung aus. So wenig man die Chemie deswegen in die nasse und trockene eintheilen kann, weil sie bey ihren Untersuchungen über die Körper theils flüssiger Auflösungsmittel, theils des, wie man sich ehemals vorgestellt hat, nicht flüssigen Auflösungsmittels des Feuers sich bedient, eben so wenig kann man die Arithmetik deswegen in die Zahlen- und Buchstaben-Rechenkunst eintheilen, weil sie bey ihren Untersuchungen über die zählbaren Größen theils der Ziffern als besonderer, theils der Buchstaben, als allgemeiner Zeichen jener Größen, sich bedient; und so wenig die Chemie ihre Untersuchungen über die Körper zu einiger Vollständigkeit bringen konnte, wenn sie sich dabey bloß an die Zerlegungen auf dem nassen, oder an die auf dem trockenen Wege halten wollte, eben so wenig könnte die Arithmetik ihre Untersuchungen über die zählbaren Größen zu einiger Vollständigkeit bringen, wenn sie sich dabey ausschließend auf den Gebrauch der Ziffern oder der Buchstaben beschränken wollte. Die möglichen Veränderungsarten der durch Ziffern und Buchstaben ausgedrückten Größen machen also in unzertrennlicher Verbindung mit einander den Gegenstand der Wissenschaft von den Eigenschaften und Verhältnissen der zählbaren Größen aus, welcher man den Namen der Arithmetik füglich lassen kann.

Außerdem sind die Namen der Zahlen- und Buchstaben-Rechenkunst, welche aus Zeiten herühren, wo sie für eine Sammlung auswendig gelernter Regeln und kunstmäßiger Handgriffe nicht übel gewählt waren, einer demonstrativen Wissenschaft, wie unsere Arithmetik jetzt ist, ganz unwürdig.

§. 144.

Die Unbestimmtheit der Buchstabensymbole hat auf gleiche Weise auch zu Einführung der entgegengesetzten

setzten Größen in die Arithmetik einen Anlaß gegeben, welcher der Mathematik der Alten gänzlich fehlte.

Wenn wir z. B. die Differenz der Zahlen 9 und 5 angeben sollen, so werden wir uns nie einfallen lassen, diese durch Neun weniger Fünf auszudrücken, sondern weil wir fünf Einheiten von neun Einheiten wirklich wegnehmen können, und wir wissen, daß wenn wir das thun, vier Einheiten übrig bleiben, so werden wir sagen, die Differenz der Zahlen 9 und 5 sey 4. Sollen wir hingegen die Differenz der zählbaren Größen a und b angeben, so ist dies nicht anders möglich, als dadurch, daß wir diese Differenz bloß vermittelst des Subtractionzeichens andeuten, welches wir zwischen die beyden Größen so setzen, daß die, welche man als die größere ansieht vorangeht, und die kleinere nachfolgt, also $a - b$, wenn a für die größere angenommen wird. Sind nun a und b veränderliche Größen, und a nimmt ab, während b nicht abnimmt, so muß, sobald a kleiner wird, als b die Differenz $a - b$ subtractiv werden. Ein deutliches Beispiel dazu haben wir an dem oben (S. 90.) gefundenen Gesetze, nach welchem bey der Division von Decimalbrüchen der Ort des Decimalzeichens in dem Quotienten bestimmt wird. Setzt man nämlich die Entfernung des Decimalzeichens von der letzten Ziffer des Quotienten $= d$, die Anzahl der Decimalziffern des Divisors $= m$, die des Dividendus $= n$, so läßt sich dieses Gesetz durch die allgemeine Formel ausdrücken $d = m - n$.

Ist nun in einem gegebenen Falle $m = 4$, und $n = 7$, so wird $d = -3$ d. h. die durch die allgemeine Formel vorgeschriebene Subtraction kann nicht ganz vollzogen werden, sondern es bleiben, nachdem man so viele Einheiten des Subtrahendus, als der Minuendus enthält, von dem letzteren abgezogen, noch 3 Einheiten abzuziehen übrig, und der Rest der wirklichen Subtraction der kleineren Zahl m von der größeren n , welcher dem auf die eben beschriebene Art gefundenen der Quantität nach immer gleich ist, erhält also eine Beschaffenheit und Benennung welche der bey Abfassung der Formel angenommenen entgegengesetzt ist; er ist nämlich ein Theil der Größe n und von einerley

Namen und Beschaffenheit mit ihr, statt daß er, nach der bey Abfassung der Formel angenommenen Voraussetzung mit der Größe in einerley Namen und Beschaffenheit haben sollte.

§. 145.

Um nun auf alle Fälle der Anwendung einer richtigen Behandlung dieser subtractiven Größen sich zu versichern muß zuerst der Begriff der entgegengesetzten Größen genauer bestimmt und festgesetzt, und die nächsten Folgen, welche sich daraus ergeben abgeleitet und zusammengestellt werden.

Man nennt aber überhaupt zwey Dinge entgegengesetzt, wenn sie so beschaffen sind, daß das eine von ihnen dasjenige aufhebt, was durch das andere gesetzt ist. Dies kann auf zweyerley Art geschehen, entweder logisch, durch den Widerspruch, oder real, durch Sezung eines positiven Grundes von der Aufhebung des andern.

Die logische Opposition besteht darin, daß von demselben Subjecte einerley Prädicat zugleich bejahet und verneinet wird. Die Folge dieser logischen Verknüpfung ist, wie der Satz des Widerspruchs es aussagt, jedesmal Nichts (*nihilum negativum*, *s. absolutum*, *non — ens*).

Die reale Opposition findet alsdann Statt, wenn zwey Prädicate desselben Subjects einander entgegengesetzt sind, aber nicht durch den Satz des Widerspruchs. Das eine von ihnen hebt alsdann auch dasjenige auf, was durch das andere gesetzt ist, aber die Folge ihrer Vereinigung ist Etwas (*ens*, *cogitabile*) z. B. Bewegkraft mit der Richtung nach Osten und eine gleich große Bestrebung nach Westen widersprechen einander nicht, und sind als Prädicate in demselben Körper zugleich möglich. Die Folge ihrer Vereinigung ist auch wieder Nichts, aber in einem andern Verstande als bey dem Widerspruche; nicht *nihilum negativum*, sondern *nihilum privativum* *s. relativum* = 0. Daß dieses Nichts in anderer Hinsicht Etwas (*cogitabile*) heißen könne, sehen wir deutlich, aus dem Worte welches uns den Zustand bezeich-

net, der die Folge der erwähnten realen Opposition ist, nämlich Ruhe.

Die reale Opposition besteht also in einer solchen Beziehung zweyer bejahenden Prädicate eines Dinges gegen einander, vermöge welcher die Folgen, welche jedes derselben für sich allein gehabt haben würde, durch ihre Vereinigung so aufgehoben werden, daß, wenn beyde der Quantität nach gleich sind, sie einen Zustand hervorbringen, welcher in Ansehung derselben $= 0$ zu setzen ist.

So sind bey der Division von Decimalbrüchen zwey gleichnamige Veränderungen (Vergrößerung und Verkleinerung) des Divisors und Dividendus in Ansehung ihrer Wirkungen auf die Veränderung des Quotienten, wie im §. 90. gezeigt worden ist, entgegengesetzt, und die letztere ist $= 0$, wenn jene beyden gleich viel betragen.

Eben so sind Activschulden und Passivschulden entgegengesetzt, und das Eigenthum des Besitzers ist $= 0$, wenn die Summe der ersten der Summe der letzten gleich ist. Denn eine Activschuld von 100 Rthlr. enthält den Grund zu einer gleichen Einnahme, hingegen eine Passivschuld von 100 Rthlr. enthält den Grund zu einer ebenso großen Ausgabe. Beyde in ihrer Vereinigung enthalten also den Grund zu einer Veränderung in dem Vermögenszustande des Besitzers, welche $= 0$ ist, weil er nun weder etwas einzunehmen, noch etwas auszugeben hat.

Daß hier 0 bloß ein Zeichen des relativen nicht des absoluten Nichts sey, ist daraus deutlich, weil hier die Wirkung der Opposition kein Widerspruch, sondern bloß der Umstand ist, daß eine gewisse Folge nicht eintritt, wie im letzten Falle daß ein gewisses Kapital, im zweyten, daß eine gewisse Veränderung des Quotienten, und im ersten daß eine gewisse Bewegung nicht Statt findet, welches alles sich recht wohl gedenken läßt.

§. 146.

Aus diesem Begriffe der realen Entgegensetzung fließen folgende Sätze:

- I. Die einander widerstreitenden Bestimmungen müssen in demselben Subjecte angetroffen werden. Denn wären sie in verschiedenen Subjecten so entstünde keine wirkliche Entgegensetzung.
- II. Bey einer realen Entgegensetzung kann eine der entgegengesetzten Bestimmungen nicht das contradictorische Gegentheil der andern seyn, denn sonst wäre der Widerstreit logisch, also die Folge davon, nach dem vorigen §. ein Unding.
- III. Es kann eine Bestimmung nicht etwas anderes verneinen, als durch die andere gesetzt ist; denn darin liegt gar keine Entgegensetzung.
- IV. Bey jeder realen Entgegensetzung müssen beyde Prädicate für sich betrachtet positiv, aber so bestimmt seyn, daß bey der Verneinung in demselben Subjecte ihre Folgen sich gegenseitig aufheben. Denn wären beyde an sich negativ, so würde durch keines etwas gesetzt, was durch das andere aufgehoben würde. Wäre nur das eine an sich positiv und das andere an sich negativ, so würde ihre Vereinigung eine Verneinung dessen seyn, was in demselben Subjecte zugleich gesetzt ist, was nach II. unmöglich ist.

§. 147.

In der Mathematik hat man es bloß mit der realen Opposition zu thun. Den Größen, bey welchen diese Statt findet, pflegt man die Beziehungszeichen $+$ und $-$ vorzusetzen, welche mit den Operationszeichen der Addition und Subtraction nicht verwechselt werden dürfen. Denn die Größen, welchen das Zeichen $-$ vorgesetzt ist, führen dieses als Zeichen der Entgegensetzung nur in so fern, als sie mit denen welche das Zeichen $+$ führen, zusammen genommen werden sollen; werden sie aber mit solchen, welchen auch das Zeichen $-$ vorgesetzt ist, in Verbindung gebracht, so fällt alle Entgegensetzung weg, weil diese ein Gegenverhältniß ist, welches nur zwischen $+$ und $-$ angetroffen wird. Da nun die Subtraction ein Aufheben ist, welches erfolgt, wenn entgegengesetzte

Größen zusammen genommen werden, so ist klar, daß bey entgegengesetzten Größen das — allein eigentlich nicht ein Zeichen der Subtraction seyn könne, wie es gemeinlich vorgestellt wird, sondern daß + und — zusammen erst eine Subtraction anzeigen. So bezeichnet z. B. $-4 - 5 = -9$ keine Subtraction, sondern eine wirkliche Vermehrung, welche aus der Aggregation mehrerer gleichartigen Größen entsteht. Dagegen bezeichnet $+9 - 5 = 4$ eine wirkliche Subtraction, indem die Zeichen der Entgegensetzung andeuten, daß die eine Größe in der andern so viel, als sie selbst beträgt, aufhebe. Eben so bedeutet das Zeichen + für sich allein eigentlich keine Addition, sondern nur in so fern, als die Größe, welcher es vorgesetzt ist, mit einer andern, die eben dieses Zeichen führt, soll verbunden werden. Soll sie aber mit einer andern, welche das Zeichen — führt, zusammen genommen werden, so kann dieses nicht anders, als vermittelt der Entgegensetzung geschehen, und da bedeutet dann das Zeichen + eben so gut, wie das Zeichen — eine Subtraction, daß nämlich eine Größe in der andern, so viel, als sie selbst beträgt, aufhebe, wie $-9 + 4 = -5$, oder in dem Beispiele des §. 144, $+4 - 7 = -3$. Ueberhaupt müssen also bey der Rechnung mit entgegengesetzten Größen solche, die einerley Beziehungszeichen haben, schlechthin addirt, diejenigen hingegen, bey welchen diese Zeichen verschieden sind, können nur durch eine Entgegensetzung d. i. vermittelt der Subtraction, zusammen genommen werden.

Demnach dienen die Zeichen + und — als Beziehungszeichen, in der Mathematik nur, um die Größen zu unterscheiden, die einander entgegengesetzt sind, d. i. die einander bey der Zusammenetzung ganz oder zum Theil aufheben, damit man einmal dieses Gegenverhältniß daraus erkennen, und zweytens, nachdem man die kleinere von der größeren abgezogen hat, wissen könne, zu welcher von beyden das Resultat als ein Theil gehöre.

Dieser Gebrauch der Beziehungszeichen läßt sich gut erläutern durch das Beispiel eines Schiffs, das in verschiedenen Theilen seines Wegs von entgegengesetz-

setzen Winden getrieben wird. Gesezt, z. B. ein Schiff reise von Portugall nach Brasilien; man bezeichne die Meilen welche es mit dem Morgenwinde zurücklegt, mit $+$, die, durch welche es von dem Abendwinde getrieben wird, mit $-$, und es habe in sieben Tagen zurückgelegt $+ 12 - 3 + 7 - 5 + 8$ Meilen, so ist es in dieser Zeit in der That um 19 Meilen nach Westen gekommen. Bezeichnete man hingegen den Gang mit dem Ostwinde durch $-$ und die Fahrt mit dem Westwinde durch $+$, so erhielte man zwar der Quantität nach das nämliche Resultat, aber der Beziehung nach wäre es dem vorigen entgegengesetzt, und dieses gäbe das Zeichen $-$, mit welchem es jetzt erschiene, zu erkennen.

§. 148.

Dieses alles vorausgesetzt kann man die Frage: „was denn eigentlich eine negative Größe sey?“ nicht anders als auf folgende Art beantworten: keine Größe ist, an sich selbst betrachtet, negativ; in Ansehung einer andern aber heißt eine Größe negativ, wiefern sie mit dieser nicht anders, als durch Entgegensezung kann zusammengekommen werden, so nämlich, daß jede in der andern, so viel, als sie selbst beträgt, aufhebt. Da vermöge dieses Gegenverhältnisses die Größen, bey welchen dasselbe Statt findet, gegenseitig von einander gleich viel aufheben (§. 144), so kann man eigentlich und genau genommen keine von beyden schlechthin negativ nennen, sondern man muß vielmehr sagen, daß von zwey solchen Größen z. B. $+a$ und $-a$ jede die negative der andern sey. Da indessen, wenn man nur von der einen derselben, die man als negativ betrachtet, zu sprechen hat, die Bestimmung: in Ansehung der ihr entgegengesetzten, immer leicht hinzugebracht werden kann, so hat man sich in der Mathematik verstatet, die Größen, welchen das Zeichen $-$ vorgesetzt ist, schlechthin negativ zu nennen, jedoch unter der Einschränkung, daß man die eben erwähnte Bestimmung jedesmal wirklich hinzu denke. Weit entfernt also Größen eigener Art von einer besondern inneren Beschaffenheit zu bezeichnen, soll diese Benennung lediglich jenes Gegenverhältniß andeuten, vermöge dessen die so

bezeichneten Größen mit andern gleichartigen, die das Zeichen $+$ führen, in einer realen Entgegensetzung zusammengenommen werden müssen.

Demnach kann man Schulden negatives Vermögen, Ausgabe negative Einnahme, Fallen negatives Steigen, Zurückgehen negatives Vorwärtsgen nennen, indem man durch diese Ausdrücke selbst zu erkennen giebt, daß die hier als negativ betrachteten und so benannten Größen nicht bloße Negationen der entgegengesetzten, sondern positive Gründe der Verminderung dieser seyen. Da hier alles bloß auf das Gegenverhältniß ankommt, so könnte man Kapitalien eben so gut negative Schulden, als diese negative Kapitalien u. s. w. nennen. Es ist aber doch schicklicher, demjenigen, worauf in jedem Falle die Absicht oder die Aufmerksamkeit vorzüglich gerichtet ist, den Namen des negativen vorzusetzen, wenn man sein reales Gegenheil bezeichnen will, obgleich in dem Gegenverhältnisse selbst kein Unterschied liegt, welcher den Grund dazu enthielte, sondern bloß in der Beziehung welche das Resultat dieses Gegenverhältnisses auf die Absicht der Vergleichung beyder entgegengesetzten Größen hat.

§. 149.

Aus den in den beyden vorigen §. §. festgesetzten Begriffen der entgegengesetzten Größen überhaupt und der negativen ins Besondere ergeben sich verschiedene Folgerungen, welche wir, wegen ihrer Wichtigkeit für die Methode, diese Größen in Rechnungen zu behandeln, hier zusammenstellen wollen.

- I. Das Gegenverhältniß zweyer entgegengesetzten Größen erkennt man jedesmal aus den Beziehungszeichen $+$ und $-$.
- II. Daß diese Beziehungszeichen zugleich die Operationszeichen der Addition und Subtraction sind, das kann bey der Rechnung mit entgegengesetzten Größen keine Irrung veranlassen, weil die reale Opposition dieser Größen eben darin besteht, daß, bey der Vereinigung beyder, jede von der

ändern so viel allshebt, als sie selbst setzt, und es daher in so fern immer verstatet ist, die eine von ihnen als *additiv* und die andere, in Ansehung dieser, als *subtractiv* zu betrachten.

III. Das Resultat der Vereinigung zweyer gleichen Größen mit entgegengesetzten Beziehungszeichen, wie $+a - a$, ist immer $= 0$.

IV. Jede Größe bleibt unverändert, wenn man ihr irgend eine andere Größe mit beyden entgegengesetzten Zeichen zusetzt, z. B. $x + a - a = x + 0 = x$.

V. Entgegengesetzte Größen mit einerley Zeichen sind schlechthin zu addiren. Hingegen solche mit verschiedenen Zeichen können nur durch Subtraction zusammen genommen werden.

VI. Das Resultat einer solchen Subtraction hat als Theil der größeren von beyden entgegengesetzten Größen mit dieser gleiche Beschaffenheit und Benennung.

VII. Positive und negative Größen dürfen daher mit additiven und subtractiven nicht schlechthin verwechselt werden.

VIII. Beyde entgegengesetzte Größen, die negative wie die positive, sind eigentlich an sich betrachtet positiv, und jede ist nur die negative der andern.

IX. Die Frage: ob die bey der Rechnung mit entgegengesetzten Größen zum Grunde gelegte Einheit positiv oder negativ sey? fällt demnach von selbst weg.

X. Man muß nie eine negative Größe, als solche, für sich allein, sondern immer nur in Beziehung auf die ihr entgegengesetzte positive betrachten.

XI. Alle Regeln für die Rechnung mit entgegengesetzten Größen müssen aus den einfachen Sätzen I — VI. abgeleitet, und es muß dabey alles auf die

Begriffe von Summen und Differenzen zurückgeführt werden.

XII. Die Frage: was für Resultate man erhalte, wenn man eine positive oder negative Größe durch eine negative, oder eine negative durch eine positive multiplicirt oder dividirt? muß man daher auch nie anders, als so zu beantworten suchen, daß man die Antwort aus der Multiplication und Division von Summen und Differenzen folgert.

XIII. Der Satz: eine negative Größe ist weniger als Nichts, hat seine Richtigkeit sobald man die Bestimmung hinzudenkt: von der ihr entgegengesetzten positiven.

XIV. Man kann daher einen negativen Rest wie $-3a$, theils um sich von diesem oder jenem Rechnungsfalle bestimmte Rechenenschaft zu geben, theils um sich die Vorstellung von dem uneigentlich sogenannten Uebergange der Größen aus dem positiven Zustande durch 0 in den negativen zu erläutern, auch so ausdrücken: $0 - 3a$; indem man dadurch zu erkennen giebt, daß, nachdem man von der vorhanden gewesenenen Quantität der Größe a soviel weggenommen, bis Nichts von ihr übrig blieb, doch noch das Dreyfache derselben hätte weggenommen werden sollen, welches man also, da nichts mehr übrig sey, wovon es weggenommen werden könnte, bloß durch das Zeichen $-$ anzudeuten sich begnügen müsse. Dies und nichts anders hat man sich unter dem erwähnten Uebergange, vorzustellen. Deutliche Beispiele davon geben, außer dem in §. 144. erläuterten Falle, die arithmetische Reihe in §. 125 und 127, und die Logarithmen aller achten Brüche §. 132.

XV. Von allen Schwierigkeiten, welche manche in der Lehre von den entgegengesetzten Größen theils zu finden geglaubt, theils wirklich hineingebracht haben, ist der Grund, außer dem Umstande, daß man es oft verkehrter Weise unternommen hat, die negativen Größen für sich allein zu betrach-

ten, einzig darin zu suchen, daß man die Sprache des gemeinen Lebens mit der Rechnungssprache ungeschickt verbunden oder vermischt und die eine in die andere unrichtig übersetzt hat. Dergleichen Fehler zu vermeiden lehrt die Syntaxe der Rechnungssprache.

§. 150.

Zu den Rechnungsarten mit Buchstaben hat man noch folgende Sätze nöthig, die sich aus den bisher angestellten Betrachtungen über die Ausdrückung der zählbaren Größen durch Buchstaben und Beziehungszeichen leicht ableiten lassen.

I. Alle Größen, die durch einerley Buchstaben ausgedrückt sind, müssen als gleichartige oder gleichnamige, solche hingegen, die durch verschiedene Buchstaben bezeichnet sind, als ungleichartige oder ungleichnamige angesehen werden.

II. Alle Ausdrücke, deren Theile ohne die Zeichen $+$, $-$ mit einander verbunden sind, wie $2a$,

$6pq$, $\frac{3xy}{2}$, $\frac{4ab}{2}$ heißen einfache; diejenigen hingegen,

bey welchen die Verbindung, ihrer Theile vermittlest dieser Zeichen angedeutet ist, wie $6a$

$- 9b$; $5p + 2q - 3x$; $4ab - 6xy + 3z$, heißen zusammengesetzte (polynomische), und zwar zweytheilige (binomische) wenn sie aus zwey, dreytheilige (trinomische) wenn sie aus drey Theilen bestehen.

III. Sollen mit zusammengesetzten Ausdrücken die Veränderungen der Subtraction und Multiplication vorgenommen werden, so pflegt man sie in Parenthesen einzuschließen, und den Subtrahendus und Multiplicator hinter die Parenthese, oder den letzteren auch wohl vor dieselbe zu setzen.

Z. B. $(6a + 7b - 9c) - (2a + b)$ bezeichnet die Differenz der Größen $6a + 7b - 9c$ und

$2a + b$; $(p + 2pq + q)(p - q)$ das Pro-

duct der Größen $p + 2pq + q$ und $p - q$.

Eben so verfährt man bey Bezeichnung der Division zusammengesetzter Ausdrücke, wenn man sich dazu des, sonst eigentlich zu Bezeichnung des Verhältnisses bestimmten, Zeichens bedient. 3. B. (25ac — 30 ad + 10cd) : (5a — d).

IV. Da (nach §. 149. VIII.) beyde entgegengesetzte Größen an sich betrachtet eigentlich positiv sind, so hat man nicht eher Veranlassung auf ihr Gegenverhältniß die Aufmerksamkeit zu richten, als bis der Fall vorkommt, da sie in einer realen Opposition zusammen genommen werden sollen. Daher ist jede Größe, welcher kein Beziehungszeichen vorgesetzt ist, als positiv anzusehen.

V. Die Ziffer 1 wird, weil sie bey der Multiplication nichts ändert, so wohl als Coefficiente wie als Exponente weggelassen, wenn man nicht einen besondern Grund hat, sie in der einen oder andern Eigenschaft auszudrücken.

VI. Eine vieltheilige Größe welche mehrere Potenzen von einerley Buchstaben enthält, wird nach diesem Buchstaben geordnet, wenn man ihre Glieder so aufeinander folgen läßt, daß die Exponenten der Potenzen vom ersten gegen das letzte zu wachsen oder abnehmen. 3. B. der Ausdruck: $x + p x + q x + r$ ist nach den abnehmenden Potenzen von x geordnet. Kommt dabey einerley Potenz in mehreren Glieder vor, so werden diese zusammen nur als ein Glied betrachtet.

§. 151.

Einfache gleichnamige Größen werden addirt indem man ihre Coefficienten addirt, wo alsdann die Summe immer wieder eine einfache Größe wird. 3. B.

3a	6d ²	11xy	13pq ²	22nz ³
5a	6d ²	17xy	31pq ²	15nz ³
<u>4a</u>	<u>3d²</u>	<u>21xy</u>	<u>8pq²</u>	<u>7nz³</u>
12a	18d ²	49xy	52pq ²	44nz ³
			Σ ₂	

Sind hingegen die zu addirenden Größen ungleichnamig, so kann man die vorzunehmende Addition derselben bloß durch Dazwischenetzung des Zeichens + anzeigen, und der Ausdruck der Summe wird alsdann immer eine polynomische Größe z. B.

$$\begin{array}{r} 7a \\ 15b \\ \hline 7a+15b \end{array} \quad \begin{array}{r} 19p \\ 23q \\ \hline 19p+23q \end{array} \quad \begin{array}{r} 36x \\ 54z \\ \hline 36x+54z \end{array}$$

§. 152.

Einfache gleichnamige Größen werden von einander abgezogen indem man den Coefficienten der kleineren von dem Coefficienten der größeren abzieht, wo alsdann die Differenz immer wieder eine einfache Größe wird; z. B.

$$\begin{array}{r} 7a \\ a \\ \hline 6a \end{array} \quad \begin{array}{r} 13bd \\ 9bd \\ \hline 4bd \end{array} \quad \begin{array}{r} 27pq \\ 19pq \\ \hline 8pq \end{array} \quad \begin{array}{r} 36xyz \\ 16xyz \\ \hline 20xyz \end{array}$$

Sind hingegen die zu subtrahirenden Größen ungleichnamig, so kann man die vorzunehmende Subtraction bloß vermittelst des Zeichens — anzeigen, und der Ausdruck der Differenz wird alsdann immer eine polynomische Größe z. B.

$$\begin{array}{r} 5a \\ 7b \\ \hline 5a-7b \end{array} \quad \begin{array}{r} 13cd \\ 8gh \\ \hline 13cd-8gh \end{array} \quad \begin{array}{r} 11mn \\ 6pq \\ \hline 11mn-6pq \end{array}$$

§. 153.

Um eine einfache Größe mit einer andern ähnlichen zu multipliciren, mache man das Product der Coefficienten beyder und schreibe diesem zur rechten

Seite die Buchstaben welche beyde zusammen enthalten z. B.

$\begin{array}{r} 5ab \\ 3a \\ \hline 15aab. \end{array}$	$\begin{array}{r} 6bc \\ 4c \\ \hline 24bcc \end{array}$	$\begin{array}{r} 8kmn \\ 2pq \\ \hline 16kmnpq \end{array}$	$\begin{array}{r} 7ry \\ 5xz \\ \hline 35rxyz \end{array}$
	$\begin{array}{r} 16fgh \\ 2 \\ \hline 32fgh \end{array}$	$\begin{array}{r} 25acd \\ 4 \\ \hline 100acd \end{array}$	

§. 154.

Um eine Größe mit einer andern einfachen zu dividiren beantworte man sich jedesmal die Frage: welche Größe ist so beschaffen, daß sie, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus zum Producte giebt? Denn eben diese ist der Quotiente, wie aus den Begriffen der Division folgt z. B.

$2ac) 26abcd \} 13bd;$	$4xz) 32xyz \} 8y;$
$5mn) 45mnp \} 9p;$	$7gr) 56grs \} 8s;$
$4bd) 16ad \} \begin{array}{l} 4a \\ \hline b \end{array};$	$2nq) 12np \} \begin{array}{l} 6p \\ \hline q \end{array};$
$3) 21xyz \} 7xyz;$	$8) 56ghk \} 7ghk.$

§. 155.

Sollen vieltheilige Größen addirt werden, so schreibe man sie so an, daß durchaus gleichnamige Glieder unter einander zu stehen kommen, alsdann ziehe man einen Strich unter ihnen weg. Endlich addire man diejenigen, welche einerley Zeichen haben, unter denen aber, welche verschiedene Zeichen haben, ziehe man die kleinern von den größeren ab, und setze dem Reste das Zeichen der größeren vor (§. 149. V.). Ist aber ein Glied nur einmal vorhanden, so wird es bloß mit seinem Zeichen herunter gesetzt z. B.

$$\begin{array}{r}
25ab - 13cd + 8fg + 11hk \\
7ab - 5cd - 15fg + 3hk \\
4ab - 2cd + 10fg - 26hk \\
\hline
36ab - 20cd + 3fg - 12hk \\
\\
13mn + 9pq - 7rs - 10xyz \\
- 21mn - 4pq + 15rs - 6xyz \\
- 5mn - 9pq + 18rs - 15xyz \\
\hline
- 13mn - 4pq + 26rs - xyz \\
\\
9ab^2 + 11acd - 15bdf + 7np^2 \\
3ab^2 - 2acd + 2bdf - 12np^2 \\
\hline
12ab^2 - 10acd + 5bdf - 5np^2 \\
15ab^2 - 3cd^2 + 9hk^3 - 7emn^2 \\
5ab^2 + 2cd^2 - 16hk^3 + 7emn^2 + 10fgh \\
\hline
20ab^2 - cd^2 - 7hk^3 + 10fgh
\end{array}$$

§. 156.

Eine Größe wird von einer andern abgezogen, wenn man sie mit dem entgegengesetzten Zeichen zu dieser hinzusetzt.

Soll z. B. von der Größe m die n abgezogen werden, so ist die Differenz $m - n$.

Denn man kann die m ausdrücken durch $m + n - n$ (§. 149.); nimmt man also davon die n , d. h. $+ n$ weg, so bleibt übrig $m - n$; nimmt man hingegen die $- n$ weg, so bleibt übrig $m + n$.

§. 157.

Sollen vieltheilige Größen von einander abgezogen werden, so schreibe man die abzuziehende unter die andere so, daß durchaus gleichnamige Glieder unter einander zu stehen kommen und ziehe einen Strich unter ihnen weg. Hierauf verwandle man die Zeichen aller Glieder der abzuziehenden Größe in die entgegengesetzten; endlich addire man sie mit diesen veränderten Zeichen zu den darüber stehenden nach §. 155, und wenn ein Glied nur in einer Reihe vorhanden ist, so setze man solches mit seinem zugehörigen Zeichen unverändert herunter; alsdann ist die so erhaltene Summe, nach dem vorigen §. der gesuchten Differenz gleich z. B.

$$\begin{array}{r} 27ax - 31ay + 56xy + 17az - 9xz \\ 16ax - 5ay + 19xy + 12az - 3xz \\ \hline - \quad + \quad - \quad - \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11ax - 26ay + 37xy + 5az - 6xz \\ -7a^2b - 18cd^2 + 3ad^3 - ad^4 + 17be - 9df^2 \\ -13ab^2 + 2cd^3 - 17ad^3 * + 37be - 12df^3 \\ \hline + \quad - \quad + \quad - \quad + \end{array}$$

$$6ab^2 - 20cd^2 + 20ad^3 - ad^4 - 20be + 3df^2$$

$$\begin{array}{r} 51mp^2 + 34pq^2 - 23mq^3 \\ 16mp^2 + 34pq^2 - 15mq^3 \\ \hline - \quad - \quad + \end{array}$$

$$51mp^2 - 16mp^2 - 23mq^3 + 15mq^3$$

$$81xy - 76xz - 64xz^2 + 48xy^2 - 11z^2$$

$$\begin{array}{r} 66xy - 76xz + 8xz^2 - 2xz^2 - 11z^2 \\ \hline - \quad + \quad - \quad + \quad + \end{array}$$

$$15xy - 72xz + 50xy + 10z^2$$

§. 158.

Um die Regeln der Multiplication und Division zusammengesetzter Größen aus sichern Gründen ableiten zu können, müssen noch folgende Sätze vorausgeschickt werden.

- I. Die Summe zweyer Größen wird durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man jede von ihnen durch sie multiplicirt und die Producte addirt.
D. i. $(a + b) \times n = a \times n + b \times n = na + nb$.

Denn, wenn man die Summe $a + b = f$ setzt, so ist $a + b + a + b = f + f$ d. i. $2a + 2b = 2f = 2(a + b)$. Eben daher ist $2a + 2b + a + b = 2f + f$, d. i. $3a + 3b = 3f = 3(a + b)$. Eben so ist $4a + 4b = 4(a + b)$; $5a + 5b = 5(a + b)$ u. s. w. also ist im Allgemeinen $na + nb = n(a + b)$ d. i. $a \times n + b \times n = (a + b)n$.

- II. Die Differenz zweyer Größen wird durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man jede von ihnen durch sie multiplicirt, und das kleinere Product vom größeren abzieht; d. i. $(a - b)n = a \times n - b \times n = na - nb$.

Denn, wenn man die Differenz $a - b = d$ setzt, so ist $(a - b) \times n = d \times n$. Da nun aus der Voraussetzung, daß $a - b = d$, folgt $a = d + b$, so ist auch $a \times n = (d + b) \times n$ und da $(d + b)n = dn + bn$ (I.); so ist auch $an = dn + bn$, folglich $an - bn = dn$. Nun war vorher $(a - b)n = dn$; folglich ist auch $(a - b)n = an - bn$.

- III. Eine Größe wird durch die Summe zweyer ganzen Zahlen multiplicirt, wenn man sie durch jede einzelne multiplicirt und die Producte addirt, d. i. $a \times (m + n) = a \times m + a \times n = ma + na$.

Dies folgt aus I. weil bey Bildung eines jeden Productes die Ordnung der Factoren willkürlich ist, d. i. weil immer $a \times m = m \times a$.

IV. Eine GröÙe wird durch die Differenz zweyer ganzen Zahlen multiplicirt, wenn man sie durch jede einzelne multiplicirt, und das kleinere Product vom gröÙeren abzieht, d. i. $a \times (m - n) = a \times m - a \times n = ma - na$.

Dies folgt ebenso aus II. Man kann es aber auch besonders so beweisen:

Um a durch $m - n$ zu multipliciren muß man zuerst das Product aus a durch m machen, dieses ist ma . Allein dieses Product ist offenbar zu groß; denn man hätte a nicht mit der ganzen Zahl m , sondern mit der um n verminderten Zahl m multipliciren sollen. Demnach ist in dem Producte ma die Zahl n so vielmal zu viel enthalten, wie vielmal die Zahl m darin enthalten ist. Nun giebt aber die Zahl a an, wie vielmal in dem Producte ma die Zahl m enthalten sey; folglich muß man n von demselben amal abziehen, um es richtig zu erhalten, und das Product wird also $ma - na$.

V. Die Differenz zweyer ganzen Zahlen wird durch eine andere Differenz solcher Zahlen multiplicirt, wenn man die eine Differenz mit dem Minuendus der andern multiplicirt, und von diesem Producte dasjenige abzieht, was die Multiplication der ersten mit dem Subtrahendus der andern giebt; d. i. $(a - b) \times (m - n) = m \times (a - b) - n \times (a - b) = ma - mb - na + nb$.

Denn, um das Product aus $a - b$ durch $m - n$ zu machen, muß man zuerst $a - b$ mit m multipliciren. Dadurch erhält man zum Producte $ma - mb$ (II.) welches aber offenbar zu groß ist, weil man die Differenz $a - b$ nicht mit der ganzen Zahl m , sondern mit der um n verminderten Zahl m hätte multipliciren sollen. In dem Producte $ma - mb$ ist also die Zahl n eben so vielmal zuviel enthalten, wie vielmal die Zahl m darin enthalten ist. Nun ist es aber die Differenz $a - b$ welche hier angiebt, wie vielmal in dem Producte $ma - mb$ die Zahl m enthalten sey; folglich muß man, um das gesammte Product richtig zu erhalten, von dem zuerst gefundenen $ma - mb$ die Zahl n ,

$a - b$ mal genommen, abziehen; d. h. man muß abziehen $na - nb$. Dies geschieht aber nach dem vorigen §. indem man $- na + nb$ addirt.

Folglich ist $(a - b) \times (m - n) = m \times (a - b) - n \times (a - b) = ma - mb - na + nb$.

VI. Aus IV. folgt

$$1) + a \times + m = + ma;$$

$$2) + a \times - n = - na;$$

Aus V hingegen folgt

$$1) - b \times + m = - mb;$$

$$2) - b \times - n = + nb.$$

Setzt man überall den Multiplicator $= a$ dem Multiplicandus $= m$, so erhält man die Regeln

$$1) + a \times + m = + ma$$

$$2) + a \times - m = - ma$$

$$3) - a \times + m = - ma$$

$$4) - a \times - m = + ma$$

Diese Regeln lassen sich leicht in eine zusammenfassen, und in Worten kurz so ausdrücken:

Einerley Zeichen der Factoren geben dem Producte das positive, verschiedene — das negative Zeichen.

In Beziehung auf die Beweise der Sätze IV und V ist es zwar verstatet, zum Behufe der Praxis sich so auszudrücken; übrigens behalten die Bemerkungen der §. §. 149. 150, daß man nie eine negative Größe für sich allein betrachten müsse, gleichwohl ihre Richtigkeit.

VII. Die Regel der Zeichen bey der Multiplication (V. 1) — 4)) kann man noch kürzer so beweisen

1) Es sey zu multipliciren $a - a$ durch m , so sieht man, daß das Product $= 0$ werden muß, weil der Multiplicandus $= 0$ ist. Da nun das erste Glied dieses Products $= + ma$ ist, so muß das zweyte, um

jenes aufzuheben, nothwendig $= -ma$ werden, und mithin ist $-a \times +m = -ma$.

2) Es sey zu multipliciren $a - a$ durch $m - m$. Das Product muß auch hier $= 0$ werden, weil jeder der Factoren $= 0$ ist. Nun ist der erste Theil dieses Products $+ma - ma = 0$ nach 1); von dem zweyten Theile desselben aber ist das erste Glied $+a \times -m$, oder $-m \times +a = -ma$ nach 1); soll also dieses durch das zweyte Glied aufgehoben werden, wie es seyn muß, damit das gesammte Product $= 0$ wird, so muß dieses zweyte Glied $+ma$ seyn. Demnach ist $+a \times -m = -ma$ und $-a \times -m = +ma$.

VIII. Die Regel der Zeichen bey der Division läßt sich aus der für die Multiplication gefundenen (VI.) ableiten, wenn man sich nur des Satzes erinnert, der aus dem Begriffe der Division folgt, daß das Product aus dem Divisor in den Quotienten den Dividentus, sowohl in Absicht auf die Quantität, als in Absicht auf die Verbindungszeichen, wiederherstellen muß.

Demnach ist klar, daß

$$1) \frac{+ma}{+m} = +a$$

$$2) \frac{+ma}{-m} = -a$$

$$3) \frac{-ma}{+m} = -a$$

$$4) \frac{-ma}{-m} = +a$$

Einerley Zeichen des Divisors und Dividentus geben also dem Quotienten das positive, verschiedene — das negative Zeichen.

Auch hier gilt die in VI. beygebrachte Bemerkung auf gleiche Weise.

Die Multiplication zusammengesetzter Größen löset sich in Ansehung der Coefficienten und der Buchstaben ganz auf die Multiplication einfacher Größen zurückführen, nur daß hier noch die Rücksicht auf die Zeichen der Glieder hinzukommen muß.

Sollen also zwey vieltheilige Größen mit einander multiplicirt werden, so schreibe man sie unter einander und ziehe unter ihnen einen Strich. Hierauf mache man die Producte aus allen Theilen des Multiplikators in alle Theile des Multiplicandus in Ansehung der Coefficienten und Buchstaben nach §. 153. in Ansehung der Zeichen nach §. 158. VI. Endlich addire man diese Partialproducte so, daß man überall die Reductionen vornimmt, welche, wo sie sich anbringen lassen, erforderlich sind, um der Summe den kürzesten Ausdruck zu geben, so ist diese Summe das gesuchte Product. 3. B.

$$\begin{array}{r} 5a + 6b - 9c + 2d \\ 2a + 5b - c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10a^2 + 12ab - 18ac + 4ad \\ + 25ab + 30b^2 - 45bc + 10bd \\ - 5ac - 6bc + 9c^2 - 2cd \end{array}$$

$$10a^2 + 37ab - 23ac + 30b^2 + 4ad - 51bc + 10bd + 9c^2 - 2cd$$

$$\begin{array}{r} 3m - 6n - 8p + 5q \\ 2m - 4p + 3q \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6m^2 - 12mn - 16pm + 10qm \\ - 12pm + 24pn + 32p^2 - 20pq \\ + 9qm - 18qn - 24pq + 15q^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6m^2 - 12mn - 28pm + 24pn + 19qm + 32p^2 - 18qn - 44pq \\ + 15q^2 \end{array}$$

$$3a + 5b + 3c + d$$

$$- 2a - 3b + 6$$

$$- 6a^2 - 10ab - 6ac - 2ad$$

$$- 9ab - 15b^2 - 9bc - 3bd$$

$$+ 18a + 30b + 18c + 6d$$

$$18a + 30b + 18c + 6d - 6a^2 - 19ab - 6ac - 15b^2 - 2ad$$

$$- 9bc - 3bd$$

$$2ax - 4by + 6cz$$

$$3x - 5z$$

$$6ax^2 - 12bxy + 18cxz$$

$$- 10axz + 20byz - 30cz^2$$

$$6ax^2 - 12bxy + 18cxz - 10axz + 20byz - 30cz^2$$

$$9m - 7n - 5q$$

$$4m + 2n - q$$

$$36m^2 - 28mn - 20mq$$

$$+ 18mn - 14n^2 - 10nq$$

$$- 9mq + 7nq + 5q^2$$

$$36m^2 - 10mn - 29mq - 14n^2 - 3nq + 5q^2$$

$$a + b$$

$$a + b$$

$$a^2 + ab$$

$$+ ab + b^2$$

$a^2 + 2ab + b^2$ eine allgemeine Formel für das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3 \end{array}$$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ eine allgemeine Formel für den Cubus einer zweytheiligen Wurzel.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 + ab \\ - ab - b^2 \end{array}$$

$a^2 - b^2$ eine allgemeine Formel für das Product aus der Summe zweyer Größen in ihre Differenz.

$$\begin{array}{r} 2m + 1 \\ 2m \end{array}$$

$4mn + 2n$ eine allgemeine Formel für das Product aus zwey geraden Zahlen und für jenes aus einer ungeraden Zahl in eine gerade.

$$\begin{array}{r} 2m + 1 \\ 2n + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4mn + 2n \\ + 2m + 1 \end{array}$$

$4mn + 2m + 2n + 1$ eine allgemeine Formel für das Product aus zwey ungeraden Zahlen.

§. 160.

Die Division zusammengesetzter Größen wird auf eine ähnliche Art wie bey bestimmten Zahlen bewerkstelliget.

Sollen also vieitheilige Größen durch einander dividirt werden, so ordne man den Divisor und Dividendus nach einerley Buchstaben. Hierauf dividire man den höchsten Theil des Divisors, in Ansehung der Coefficienten und Buchstaben nach §. 154, in Ansehung der Zeichen nach §. 158. VIII. so findet man den höchsten Theil des Quotienten. Mit diesem multiplicire man den ganzen Divisor, das erhaltene Product ziehe man von dem Dividendus ab, nach §. 157, so bleibt ein Rest. Mit diesem verfare man wieder ebenso wie vorher mit dem ganzen Dividendus, so erhält man den zweyten Theil des Quotienten und, nachdem man dessen Product in den ganzen Divisor vom ersten Reste abgezogen, den zweyten Rest. Diesen hat man wieder ebenso, wie den ersten, zu behandeln, und dies Verfahren so lange fortzusetzen, bis entweder die Division aufgeht, oder wenigstens kein Glied des Dividendus mehr übrig ist, in welches man noch dividiren könnte. 3. B.

$$3a - 2b) 15a^2 - 10ab + 9ad - 6bd \mid 5a + 3d$$

$$15a^2 - 10ab$$

$$\begin{array}{r} \hline \quad + 9ad - 6bd \\ \quad + 9ad - 6bd \\ \hline \quad \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2ab - 4ac + ad) 6ab^2 - 22abc + 7abd + 20ac^2 - 13acd + 2ad^2 \\ 3ab - 5ac + 2ad \quad 6ab^2 - 12abc + 3abd \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline - 10abc + 4abd + 20ac^2 - 13acd \\ - 10abc + 20ac^2 - 5acd \\ \hline \quad \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad + 4abd - 8acd + 2ad^2 \\ \quad + 4abd - 8acd + 2ad^2 \\ \hline \quad \end{array}$$

[illegible]

[illegible]

$$\begin{array}{r} 3n - 2p) \overset{2}{15n} - 10np + 9nq - 6pq \rfloor 5n + 3q \\ \underline{15n - 10np} \\ + 9nq - 6pq \\ + 9nq - 6pq \\ \underline{ +} \end{array}$$

$$2a - 4b + c - 8) 6a^2 - 22ab + 15ac + 20b^2 - 26a - 29bc + 44b + 6c^2 - 49c + 8(3a - 5b + 6c - 1$$

$$6a^2 - 12ab + 3ac - 24a$$

$$- + - +$$

$$0 - 10ab + 12ac + 20b^2 - 2a - 29bc + 44b$$

$$- 10ab + 20b^2 - 5bc + 40b$$

$$+ - + -$$

$$0 + 12ac - 2a - 24bc + 4b + 6c^2 - 49c$$

$$+ 12ac - 24bc + 6c^2 - 48c$$

$$- + - +$$

$$0 - 2a + 4b - c + 8$$

$$- 2a + 4b - c + 8$$

$$+ - + -$$

$$0 - - 0$$

$$7b + 2c - 6d) \quad 35ab + 21b^2 + 10ac - 57bc - 3oad + 10bd - 18c^2 + 6cd - 24d^2 \quad 5a + 3b - 9c + 4d$$

$$35ab + 10ac - 3oad$$

$$- \quad - \quad - \quad +$$

$$0 \quad + 21b^2 - 57bc + 10bd$$

$$+ 21b^2 + 6bc - 18bd$$

$$- \quad - \quad - \quad +$$

$$0 \quad - \quad 63bc + 28bd - 18c^2 + 62cd$$

$$- \quad 63bc - 18c^2 + 54cd$$

$$+ \quad + \quad - \quad -$$

$$0 \quad + 28bd + 8cd - 24d^2$$

$$+ 28bd + 8cd - 24d^2$$

$$- \quad - \quad - \quad +$$

$$0 \quad 0 \quad - \quad 0$$

§. 161.

Wenn eine solche Division nicht aufgeht, so muß der am Ende übrig bleibende Rest dem Quotienten eben so, wie bey der Division bestimmter Zahlen, in der Gestalt eines Bruchs angehängt werden. Weil man aber durch einen solchen gemischten Ausdruck des Quotienten in keiner Hinsicht etwas gewinnen kann, so pflegt man in diesem Falle die Division vielmehr bloß anzuzeigen. Um jedoch auch alsdann die Rechnung, durch Vereinfachung der Ausdrücke, so weit, als es sich thun läßt, abzukürzen, sucht man den Divisor und Dividendus in ihre Factoren zu zerlegen, was man durch öftere Uebungen in der Multiplication und Division leicht zu einer gewissen Fertigkeit bringen kann. Findet man dann, daß beyde einen oder etliche Factoren mit einander gemein haben, so können diese nach §. 31, gegen einander weggelassen werden. 3. B.

$$\frac{ax - a}{3bx - 3b} = \frac{a(x - 1)}{3b(x - 1)} = \frac{a}{3b}$$

$$\frac{my + y^2}{2ny - py} = \frac{(m + y)y}{(2n - p)y} = \frac{m + y}{2n - p}$$

Weitere Beispiele solcher Zerlegungen.

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1).$$

$$6ab^2 - 12abc - 3ab = 3ab(2b - 4c - 1).$$

$$p^2 - q^2 = p^2 + pq - pq - q^2 = p(p + q) - q(p + q) \\ = (p + q)(p - q).$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n = n(n^2 - 3n + 2) = n(n^2 - n - 2n + 2) \\ = n[n(n - 1) - 2(n - 1)] = n(n - 1)(n - 2).$$

$$2n^3 + 3mn^2 + 3mn - 2n = n(2n^2 + 3mn + 3m - 2) \\ = n(2n^2 - 2 + 3mn + 3m) \\ = n[2(n^2 - 1) + 3m(n + 1)] \\ = n[2(n + 1)(n - 1) + 3m(n + 1)] \\ = n(n + 1)(3m + 2n - 2).$$

$$\begin{aligned}
n^2 - m^2 - n + m &= n^2 - mn - m^2 - n + mn + m \\
&= (n-m)(n-1) + m(n-m) = (n-m)(m+n-1). \\
2mn - 3n^2 + nr - 2m + 3n - r &= (2m - 3n + r + 3)n \\
&\quad - (2m + r) = (2m - 3n + r)(n-1). \\
m^3 - mn^2 - m^2 + m - 2mn^2 + 2mn + n - 1 &= \\
(m^2 - mn - m + 1 - 2n^2 + 2n)m - (1-n) &= \\
(m^2 - 2mn + 1)(m + n - 1).
\end{aligned}$$

§. 162.

Bei solchen Zerlegungen kommt man oft in den Fall, von folgenden zwey Sätzen, die übrigens auch ausserdem noch zu manchen Absichten dienlich sind, nützlichen Gebrauch zu machen.

- I. In jedem zusammengesetzten Ausdrucke, von der Art, wie die sämtlichen Factoren eines Products, der Zähler und Nenner eines Bruchs und die beyden Seiten einer Gleichung darstellen, ist es erlaubt, alle vorhandenen Zeichen in die entgegengesetzten zu verwandeln.

Dies folgt aus §. 149. II.

$$3. B. (x+1)(x-1) = (1-x) \times (-x-1) = x^2 - 1$$

$$\frac{3ax - x^2}{2n + 1} = \frac{x^2 - 3ax}{1 - 2n}$$

- II. Wird einer vieltheiligen Grösse, die in einer Parenthese eingeschlossen ist, das Zeichen — vorgesetzt, so afficirt dieses alle in der Parenthese begriffenen Glieder eben so, als wenn der ganze Ausdruck durch — 1 multiplicirt wäre.

Dies folgt aus §. 157. 159.

$$\begin{aligned}
3. B. - (m^2 - n^2 + 3m - 3n) &= n^2 - m^2 + 3n - 3m \\
- \frac{(b - a - c)x}{(m - n + 1)r} &= \frac{(a - b + c)x}{(m - n + 1)r}
\end{aligned}$$

§. 163.

Brüche, welche in Buchstaben ausgedrückt sind, werden wie die in Ziffern ausgedruckten behandelt, d. h. nach den, im zweyten Abschnitte gefundenen, Regeln auf einerley Benennung gebracht, addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt und aufgehoben, weil die Gründe, aus welchen diese Regeln abgeleitet worden sind, für die ersten eben so, wie für die letzten, gelten. 3. B.

$$\text{I. } \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \text{ sind einerley mit}$$

$$\frac{adf}{bdf}, \frac{chf}{bdf}, \frac{bde}{bdf}$$

$$\text{II. } \frac{f}{g} + \frac{h}{k} = \frac{fk + gh}{gk}.$$

$$\text{III. } \frac{m}{n} - \frac{r}{s} = \frac{ms - nr}{ns}.$$

$$\text{IV. } \frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

$$\text{V. } \frac{u}{x} : \frac{y}{z} = \frac{u}{x} \times \frac{z}{y} = \frac{uz}{xy}.$$

$$\text{VI. } \frac{am^2 - bmn}{cdm - efm} = \frac{(am - bn)m}{(cd - ef)m} = \frac{am - bn}{cd - ef}.$$

§. 164.

Um Potenzen von einerley Wurzel mit einander zu multipliciren, addire man die Exponenten der Factoren, so ist deren Summe der Exponente des Productes.

$$3. \text{ B. } a^5 \times a^3 = a^{5+3} = a^8.$$

$$\text{Denn es ist } a^5 = \text{aaaaa}, a^3 = \text{aaa}; \text{ folglich}$$

$$a^5 \times a^3 = \text{aaaaa} \times \text{aaa} = \text{aaaaaaaa} = a^8 = a^{5+3}.$$

$$\text{Demnach im Allgemeinen } a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

§. 165.

Um Potenzen von einerley Wurzel mit einander zu dividiren, subtrahire man den Exponenten des Divisors von dem Exponenten des Dividendus, so ist, deren Differenz der Exponente des Quotienten.

$$\text{Z. B. } \frac{a^5}{a^3} = a^2.$$

Denn es ist $a^5 = \text{aaaaa}$, $a^3 = \text{aaa}$; folglich

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{\text{aaaaa}}{\text{aaa}} = a^2 = a^{5-3}; \text{ oder:}$$

es ist $\frac{a^5}{a^3} \times a^3 = a^5$; aber auch

$$a^2 \times a^3 = a^5 \text{ (§. 164.)}; \text{ folglich}$$

$$\frac{a^5}{a^3} \times a^3 = a^2 \times a^3, \text{ und mithin } \frac{a^5}{a^3} = a^2; \text{ oder im}$$

Allgemeinen, da $\frac{a^m}{a^n} \times a^n = a^m$, aber auch $a^{m-n} \times a^n$

$$= a^m \text{ (§. 164.)}, \text{ so ist } \frac{a^m}{a^n} \times a^n = a^{m-n} \times a^n, \text{ folglich}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

§. 166.

Um eine gegebene Potenz zu einem höheren Grade zu erheben, multiplicire man den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten des höheren Grades, so ist das Product der Exponente der gesuchten Potenz.

$$\text{Z. B. } (a^4)^2 = a^{4 \cdot 2} = a^8.$$

$$\text{Denn es ist } (a^n)^2 = a^n \times a^n = a^{n+n} = a^{2n} \quad (\S. 164.).$$

$$\text{Ebenso ist } (a^n)^3 = a^n \times a^n \times a^n = a^{n+n+n} = a^{3n} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{folglich im Allgemeinen } (a^n)^m = a^{mn}.$$

§. 167.

Um aus einer gegebenen Potenz eine Wurzel von einem verlangten Grade auszuziehen, dividire man den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem gegebenen Wurzelexponenten, so ist der Quotiente der Exponente der gesuchten Wurzel.

$$\text{Z. B. } \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Denn es ist } (\sqrt[3]{a})^3 = a, \text{ und im Allgemeinen}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a. \text{ Ferner } (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m, \text{ und } \left(\frac{m}{n}\right)^n = a^{\frac{m}{n}}$$

$$(\S. 166.) = a^m; \text{ folglich ist } (\sqrt[n]{a^m})^n = \left(\frac{m}{n}\right)^n, \text{ u. mit:}$$

$$\text{hin } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

§. 168.

Wegen des Nutzens, den sie für die Rechnung haben, muß man auch den Werth solcher Potenzen kennen, welche 1 oder 0 zum Exponenten haben, und deren Exponenten negativ sind.

Dieser wird durch folgende Sätze bestimmt.

I. Jede Potenz, deren Exponent 1 ist, ist der Wurzel gleich. Z. B. $a^1 = a.$

Denn es ist $\frac{aaa}{aa} = a$; aber $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2}$

(§. 165.) $= a^1$; folglich $a^1 = a$.

II. Jede Potenz, deren Exponent 0 ist, ist der Einheit gleich. Z. B. $a^0 = 1$

Denn es ist $\frac{a^2}{a^2} = 1$; aber $\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2}$ (§. 165.)

$= a^0$; folglich $a^0 = 1$.

III. Jede Potenz mit einem negativen Exponenten ist einem Bruche gleich, der zum Zähler die Einheit und zum Nenner dieselbe Potenz mit demselben Exponenten, positiv genommen, hat. Z. B.

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

Denn es ist $a^{-n} = a^{0-n}$ (§. 149. XIV.) $= \frac{a^0}{a^n}$ (§. 165.)

$$= \frac{1}{a^n} \text{ (II.)}$$

§. 169.

Die Regeln der Multiplication und Division der Potenzen mit positiven Exponenten gelten auch für Potenzen mit negativen Exponenten.

Dies läßt sich auf folgende Art zeigen:

A für die Multiplication.

I) Es ist $a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$; denn

$$a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} \text{ (§. 168.)} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

(§. 165.).

2) Es ist $a^{-m} \times a^n = a^{n-m}$; denn

$$a^{-m} \times a^n = a^n \times \frac{1}{a^m} \text{ (§. 168.)} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

(§. 165.).

3) Es ist $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-(m+n)}$; denn

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \text{ und } a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \text{ demnach}$$

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}.$$

4) Es ist $(a^{-m})^n = a^{-mn}$; denn

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \text{ folglich } (a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

Ebenso $(a^m)^{-n} = a^{-mn}$, und $(a^{-m})^{-n} = a^{mn}$.

B für die Division.

1) Es ist $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; denn

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m : \left(\frac{1}{a^n}\right) = a^m \times a^n \text{ (§. 25. IV.)} = a^{m+n}$$

(§. 164.).

2) Es ist $\frac{a^{-m}}{a^n} = a^{-(m+n)}$; denn

$$\frac{a^{-m}}{a^n} = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m \times a^n} \text{ (§. 19. II.)} = \frac{1}{a^{m+n}} \text{ (§. 164.)}$$

$$= a^{-(m+n)} \text{ (§. 168. III.).}$$

3) Ebenso ist $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{n-m}$; denn

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{I}{a^m} : \frac{I}{a^n} \quad (\S. 168. III.) = \frac{I}{a^m} \times \frac{a^n}{I} \quad (\S. 25. IV.) = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (\S. 165.).$$

4) Es ist $\sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}}$; denn

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{I}{a^{\frac{m}{n}}}; \text{ demnach } \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{I}{a^{\frac{m}{n}}}} = \frac{\sqrt[n]{I}}{\sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}}} = \frac{\sqrt[n]{I}}{a^{\frac{m}{n}}} \quad (\S. 167.) = \frac{I}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}} \quad (\S. 168. III.).$$

§. 170.

Die Regeln der Multiplication und Division der Potenzen mit ganzen Exponenten gelten auch für die Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Dies kann durch folgende Schlüsse dargethan werden.

I. Es ist $a^r \times a^{\frac{m}{n}} = a^{r+\frac{m}{n}}$; denn

$$a^r \times a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{rn}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^{rn} \times a^m)} = \sqrt[n]{(a^{rn+m})} = a^{\frac{rn+m}{n}} = a^{r+\frac{m}{n}}.$$

II. Es ist $a^r : a^{\frac{m}{n}} = a^{r-\frac{m}{n}}$; denn

$$\begin{aligned} r : a &= \frac{\frac{r}{n}}{a} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{a}{n}} : a = \sqrt[n]{\frac{r}{a}} = \sqrt[n]{a^{r-n}} \\ &= a^{\frac{r-n}{n}} = a^{\frac{r}{n} - 1} \end{aligned}$$

Da in diesen Schlüssen nichts geändert wird, wenn man statt des Exponenten r setzt $\frac{r}{s}$, so sind zugleich auch die Fälle darunter begriffen, da beyde Factoren, oder Dividendus und Divisor zugleich gebrochene Exponenten haben.

$$\begin{aligned} \text{III. Es ist } \left(\frac{r}{n}\right)^{\frac{r}{m}} &= a^{\frac{r}{mn}}; \text{ denn} \\ \left(\frac{r}{n}\right)^{\frac{r}{m}} &= \sqrt[m]{a^{\frac{r}{n}}} = a^{\frac{r}{n} : m} = a^{\frac{r}{mn}} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

§. 171.

Ein Product oder ein Quotiente wird zu einer Potenz erhoben, wenn man jeden Theil des Products oder des Quotienten zu dieser Potenz erhebt, und diese Theile alsdann gehörig mit einander verbindet.

$$3. \text{ B. } (ab)^m = a^m b^m; \left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}.$$

Denn vermöge des Begriffs der Multiplication ist $1 : a = b : ab$, und daher $1 : a^m = b^m : (ab)^m$; demnach $(ab)^m = a^m \times b^m$ (§. 47.). Folglich ist auch $(pqr)^m = (pq)^m \times (rs)^m = p^m \times q^m \times r^m \times s^m$.

Ebenso ist vermöge des Begriffs der Division $q : 1 = p : \frac{p}{q}$; folglich $q^m : 1 = p^m : \left[\frac{p}{q}\right]^m$ und mithin $\left[\frac{p}{q}\right]^m = \frac{p^m}{q^m}$ (§. 47.).

§. 172.

Aus einem Producte oder einem Quotienten wird die Wurzel von einem verlangten Grade gezogen, wenn man aus jedem Theile des Products oder des Quotienten die verlangte Wurzel auszieht, und diese Wurzeln gehörig mit einander verbindet.

$$3. \text{ B. } \sqrt[m]{pqrs} = \sqrt[m]{p} \sqrt[m]{q} \sqrt[m]{r} \sqrt[m]{s}.$$

Denn da $1 : a = b : ab$ so ist auch

$$1 : \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b} : \sqrt[m]{ab}, \text{ und mithin } \sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}. \text{ Nun ist } pqrs = pq \times rs; \text{ folglich } \sqrt[m]{(pq \times rs)} \\ = \sqrt[m]{pq} \times \sqrt[m]{rs} = \sqrt[m]{p} \times \sqrt[m]{q} \times \sqrt[m]{r} \times \sqrt[m]{s}.$$

Ebenso ist, weil $q : 1 = p : \frac{p}{q}$ auch

$$\sqrt[m]{q} : 1 = \sqrt[m]{p} : \sqrt[m]{\frac{p}{q}}, \text{ und mithin}$$

$$\sqrt[m]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[m]{p}}{\sqrt[m]{q}}.$$

§. 173.

Um den Coefficienten einer Potenz von einer vielttheiligen Größe in die Parenthese zu bringen, dividire man den Exponenten desselben mit dem gemeinschaftlichen Exponenten der Potenz und multiplicire mit dem so veränderten Factor alle Glieder der Potenz. 3. B.

$$z \left(a^m \times b x^n \right)^c = \left(a^{\frac{m}{c}} z^{\frac{r}{c}} + b x^{\frac{n}{c}} z^{\frac{r}{c}} \right)^c;$$

Denn es ist $z^r = \left(z^{\frac{r}{c}} \right)^c$, folglich

$$z^r \left[a^m + b x^n \right]^c = \left[z^{\frac{r}{c}} \right]^c \times \left[a^m + b x^n \right]^c = \\ \left[z^{\frac{r}{c}} \times \left[a^m + b x^n \right] \right]^c = \left[a^{\frac{m}{c}} z^{\frac{r}{c}} + b x^{\frac{n}{c}} z^{\frac{r}{c}} \right]^c.$$

§. 174.

Um hingegen in dem Ausdrucke einer Potenz von einer vieltheiligen Größe einen Factor aus der Parenthese wegzubringen, dividire man alle Glieder der Potenz mit diesem Factor, hierauf multiplicire man jeden Exponenten mit dem gemeinschaftlichen Exponenten der Potenz, und setze ihn so als Coefficienten vor die Parenthese. Z. B.

$$(a + bx)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{nc}{n}} (a x^{\frac{m-c}{n}} + b)^{\frac{c}{n}};$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} (a + bx)^{\frac{m}{n}} &= \frac{(a + bx)^{\frac{m}{n}}}{(x)^{\frac{n}{n}}} \times (x)^{\frac{n}{n}} = \left[\frac{a + bx}{x} \right]^{\frac{m}{n}} \times (x)^{\frac{n}{n}} \\ &= x^{\frac{nc}{n}} (a x^{\frac{m-c}{n}} + b)^{\frac{c}{n}}. \end{aligned}$$

§. 175.

Ausdrücke welche weder ein Wurzelzeichen noch einen gebrochenen Exponenten enthalten, werden Rationalgrößen, solche hingegen, in welchen Wurzelzeichen oder gebrochene Exponenten, die sich nicht weg-schaffen lassen, vorkommen, werden Irrationalgrößen genannt. So sind z. B. $m\sqrt{2}$, $x^{\frac{3}{4}}$, $y^{\frac{1}{2}}$ Irrationalgrößen; hingegen $p\sqrt[3]{y}$, $q\sqrt{x}$ Rationalgrößen. Die Irrationalgrößen werden von der Eigenschaft, daß sie Wurzelzeichen enthalten, auch Wurzelgrößen genannt. Diejenige bestimmte oder unbestimmte, einfache oder zusammengesetzte Zahl, womit eine Wurzelgröße multiplicirt ist, heißt der Coefficiente derselben. Wenn in mehreren Wurzelgrößen sowohl die unter den Wurzelzeichen stehenden Größen, als die Wurzelexponenten einerley sind, so heißen sie gleichartig oder gleichnamig. Z. B. $m\sqrt[r]{x}$, $n\sqrt[r]{x}$, $p\sqrt[r]{x}$.

Wenn zwey Wurzelgrößen sich zusammen verhalten, wie eine rationale Zahl zu einer andern, so heißen sie unter sich *commensurable* oder *communicirende*, wenn sie aber kein solches Verhältniß zu einander haben, so werden sie unter sich *incommensurable* oder nicht — *communicirende* genannt.

Ausdrücke, worin nur ein einziges Wurzelzeichen vorkommt, dieses mag sich nun bloß über eine einfache oder über eine aus mehreren Gliedern zusammengesetzte Größe erstrecken, heißen *Particularwurzeln*, solche hingegen, worin ein Wurzelzeichen vorkommt, das über alle Glieder einer vieltheiligen Größe sich erstreckt, von welchen einige selbst wieder irrational sind, werden *Universalwurzeln* genannt. So sind z. B. $\sqrt[3]{az}$, $\sqrt{(x^2 + z^2)}$, $\sqrt{(3a + 4b - 6d)}$ *Particularwurzeln*; hingegen $\sqrt{(x^2 + 2\sqrt{az})}$, $\sqrt{(12 + \sqrt{432})}$, $\sqrt{(6 + \sqrt{12})}$ *Universalwurzeln*.

Wenn in der Folge von Wurzelgrößen ohne Beysatz die Rede seyn wird, so werden immer *Particularwurzeln* zu verstehen seyn, wo nicht das Gegentheil ausdrücklich angezeigt wird.

§. 176.

Um den Coefficienten einer Wurzelgröße ohne den Werth derselben zu ändern, unter das Wurzelzeichen zu bringen, nehme man die Potenz des Coefficienten welche der Wurzelexponente anzeigt, und multiplicire damit die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe.

$$\text{z. B. } a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}; \quad \frac{a}{b}\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{\frac{a^3 c}{b^3}}; \quad 2\sqrt[3]{5} =$$

$$\sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}.$$

$$\text{Im Allgemeinen ist } a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}; \quad \frac{a}{b}\sqrt[r]{c} = \sqrt[r]{\frac{a^r c}{b^r}}; \quad \text{denn}$$

$$\begin{aligned} a \sqrt[r]{b^n} &= a b^{\frac{n}{r}} = a^{\frac{mr}{r}} \times b^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{a^{mr}} \times \sqrt[r]{b^n} \\ &= \sqrt[r]{a^{mr} b^n} \text{ (§. 171.).} \end{aligned}$$

§. 177.

Umgekehrt kann, wenn eine unter dem Wurzelzeichen begriffene GröÙe, eine Potenz von dem Grade den der Wurzelexponente anzeigt, als Factor enthält, dieser Factor unter dem Wurzelzeichen dadurch weggebracht werden, daß man mit seiner Wurzel den Coefficienten der WurzelgröÙe multiplicirt. Z. B. $a \sqrt[n]{b^m c^n}$

$$= ab \sqrt[n]{c};$$

$$a \sqrt[3]{\frac{b^3 c d^6}{p^9 q}} = \frac{abd^2}{p^3} \sqrt[3]{\frac{c}{q}}.$$

Ist die unter dem Wurzelzeichen befindliche GröÙe eine bestimmte Zahl, so kann man versuchen sie in einfache Factoren zu zerlegen, und alsdann zusehen, ob ein solcher Factor unter dem Wurzelzeichen so oft vorkommt, als der Wurzelexponente Einheiten hat. Ist dies der Fall, so kann man ihn unter dem Wurzelzeichen eben so oft wegstreichen, und statt dessen einmal als Factor vor das Wurzelzeichen setzen. Durch diese Veränderung der WurzelgröÙen, welche man die Reduction derselben auf einen einfacheren Ausdruck nennt, erhält man in manchen Fällen zugleich den Vortheil, daß ungleichartige WurzelgröÙen dadurch in gleichartige verwandelt werden. Z. B. $5 \sqrt[3]{3024} =$

$$\begin{aligned} 5 \sqrt[3]{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7)} &= 5 \cdot 2 \cdot 3 \sqrt[3]{2 \cdot 7} = \\ 30 \sqrt[3]{14}; \quad 4 \sqrt[3]{16} &= 4 \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 4 \cdot 2 \sqrt[3]{2} \\ &= 8 \sqrt[3]{2}; \quad a \sqrt[n]{b^m c^n} = ab \sqrt[n]{c}; \quad p \sqrt[n]{q^m c^n} = \\ p q \sqrt[n]{c}. \end{aligned}$$

Werden auf solche Art alle Potenzen von dem Grade den der Wurzel-exponente anzeigt, aus einer Wurzelgröße weggeschafft, so wird sie dadurch auf den einfachsten Ausdruck gebracht.

So war in dem vorigen Beispiele $30\sqrt[3]{14}$ der einfachste Ausdruck für die Größe $5\sqrt[3]{3024}$; eben so ist $2abc^2$ der einfachste Ausdruck für die Größe $\sqrt[3]{16abc^3}$.

§. 178.

Ob zwey gegebene Wurzelgrößen von gleichen Wurzel-exponenten unter sich commensurabel seyen, oder nicht kann man auf dreyerley Weise erfahren.

I. Durch die Multiplication.

Wenn man nämlich bey Wurzelgrößen vom 2ten Grade die eine mit der andern, bey solchen vom 3ten die eine mit dem Quadrate der andern, bey solchen vom 4ten die eine mit dem Cubus der andern u. s. w. multiplicirt, und zum Producte eine Potenz von demselben Grade erhält, den der gemeinschaftliche Wurzel-exponente der gegebenen Wurzelgrößen anzeigt, so sind sie unter sich commensurabel, und ihr Verhältniß ist gleich dem der einen unter dem Wurzelzeichen begriffenen Größe zu der gleichnamigen Wurzel aus dem Producte beyder.

So findet man z. B. daß $\sqrt{2} : \sqrt{8} = 1 : 2$, weil $2 \cdot 8 = 16$ und $16 = 4^2$, aber $2 : 4 = 1 : 2$.

Ebenso findet man, daß $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{54} = 1 : 3$, weil $2 \cdot 54 = 216 = 6^3$, aber $2 : 6 = 1 : 3$.

II. Durch die Division.

Wenn man die eine der unter dem Wurzelzeichen begriffenen Größen mit der andern dividirt, und zum Quotienten eine Potenz von demselben Grade erhält, den der gemeinschaftliche Wurzel-exponente der gegebenen Wurzelgrößen anzeigt, so sind sie unter sich commensurabel, und ihr Verhältniß ist gleich dem der Ein-

heit zu der gleichnamigen Wurzel aus dem Quotienten beyder.

So ist $\sqrt{2} : \sqrt{8} = 1 : 2$, weil $\frac{8}{2} = 4$ und
 $1 : \sqrt{4} = 1 : 2$

Ebenso ist $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{54} = 1 : 3$ weil $\frac{54}{2} = 27$
 aber $1 : \sqrt[3]{27} = 1 : 3$.

III. Durch die Reduction der gegebenen Wurzelgrößen auf den einfachsten Ausdruck.

Denn wenn nach dieser Veränderung gleiche Größen unter dem Wurzelzeichen stehen bleiben, so sind die gegebenen Wurzelgrößen unter sich commensurabel und ihr Verhältniß ist dem ihrer Coefficienten in den reducirten Ausdrücken gleich.

So findet man, daß $\sqrt{27a^2} : \sqrt{75a^2} = 3 : 5$
 Denn es ist $\sqrt{27a^2} = \sqrt{3 \cdot 9 \cdot a^2} = 3a\sqrt{3}$, und
 $\sqrt{75a^2} = \sqrt{3 \cdot 25a^2} = 5a\sqrt{3}$, folglich
 $\sqrt{27a^2} : \sqrt{75a^2} = 3a\sqrt{3} : 5a\sqrt{3} = 3a : 5a = 3 : 5$.

§. 179.

Jede Potenz (n) einer gegebenen Wurzelgröße zu finden behalte man den Wurzelexponenten ungeändert und erhebe sowohl den Coefficienten, als die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe auf die verlangte Potenz.

3. B. $(2 \sqrt[3]{5})^2 = 4 \sqrt[3]{25}$. $(a \sqrt[r]{b})^n = a^n \sqrt[r]{b^n}$;

Denn es ist $a \sqrt[r]{b} = ab^{\frac{1}{r}}$; folglich $(a \sqrt[r]{b})^n =$
 $(ab^{\frac{1}{r}})^n = a^n b^{\frac{n}{r}} = a^n \sqrt[r]{b^n}$.

Läßet sich der Wurzelexponente durch den Exponenten der verlangten Potenz dividiren, so erhält man

durch diese Division einfachere Ausdrücke. 3. B.

$$(2\sqrt[4]{5})^2 = 4\sqrt{5}. \text{ Denn es ist allgemein}$$

$$(a\sqrt[nr]{b})^n = a\sqrt[nr]{b^n} = a b^{\frac{n}{nr}} = a b^{\frac{1}{r}} = a\sqrt[r]{b}.$$

Soll eine Wurzelgröße auf eben die Potenz, welche der Wurzelexponente anzeigt, erhoben werden, so wird diese Potenz ein rationales Product aus eben der Potenz des Coefficienten in die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe. 3. B. $(a\sqrt[3]{5})^3 = 5a^3$. Denn es ist allgemein $(a\sqrt[n]{b})^n = a\sqrt[n]{b^n} = a b^{\frac{n}{n}} = a b$.

§. 180.

Jede Wurzel (n) von einer gegebenen Wurzelgröße zu finden, bringe man den Coefficienten unter das Wurzelzeichen, und multiplicire alsdann den Wurzel-Exponenten mit dem Exponenten der verlangten Wurzel.

$$3. \text{ B. } \sqrt[3]{(2\sqrt{5})} = \sqrt[6]{20}; \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}\right)} = \sqrt[4]{\frac{6}{4}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Denn es ist } a\sqrt[r]{b} = ab^{\frac{1}{r}}; \text{ folglich } \sqrt[n]{(a\sqrt[r]{b})} = \sqrt[n]{ab^{\frac{1}{r}}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{nr}} = a^{\frac{r}{nr}} b^{\frac{1}{nr}} = \sqrt[nr]{a^r b} = \sqrt[nr]{a b}.$$

Wenn der Exponente des Coefficienten und der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Größe durch den Exponenten der verlangten Wurzel sich dividiren läßt, so erhält man dadurch einfachere Ausdrücke. 3. B.

$$\sqrt[3]{(a\sqrt[5]{b^3})} = a^{\frac{6}{3}} \sqrt[5]{b^{\frac{3}{3}}} = a^2 \sqrt[5]{b}, \text{ u. allgemein}$$

$$\sqrt[n]{(a\sqrt[r]{b^s})} = a^{\frac{m}{n}} \sqrt[r]{b^{\frac{s}{n}}}; \text{ denn dies ist immer } =$$

$$a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{s}{nr}} = a^{\frac{mr}{nr}} b^{\frac{s}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr} b^s} = \sqrt[nr]{a^r b^s} = \sqrt[nr]{(a\sqrt[r]{b^s})^r}.$$

§. 181.

Um eine gegebene Wurzelgröße ($a\sqrt[n]{b}$) mit einer andern Größe (c^n) ohne Aenderung ihres Werthes zu multipliciren, multiplicire man die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe b mit der Potenz von c , welche der Wurzelexponente n anzeigt, und dividire den Coefficienten der Wurzelgröße mit der Größe c .
Z. B.

$$2\sqrt[5]{7} = \frac{2}{5}\sqrt[5]{7 \cdot 5^2} = \frac{2}{5}\sqrt[5]{7 \cdot 25} = \frac{2}{5}\sqrt[5]{175}.$$

$$\text{Denn es ist allgemein } a\sqrt[n]{b} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{bc^n} = a\sqrt[n]{\frac{bc^n}{c^n}}.$$

Hätte die gegebene Wurzelgröße keinen Coefficienten, so würde der Coefficiente 1 hinzugebracht. Z. B.

$$\sqrt[3]{11} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{11 \cdot 4^3} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{11 \cdot 64} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{104}.$$

§. 182.

Um eine gegebene Wurzelgröße ($a\sqrt[n]{b}$) mit einer andern Größe (c^n) ohne Aenderung ihres Werthes zu dividiren, dividire man die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe b mit der Potenz von c , welche der Wurzelexponente n anzeigt, und multiplicire den Coefficienten der Wurzelgröße mit der Größe c .

$$\text{Z. B. } 2\sqrt[3]{5} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{\frac{5}{2^3}} = 4\sqrt[3]{\frac{5}{8}}.$$

$$\text{Denn es ist allgemein } a\sqrt[n]{b} = ac\sqrt[n]{\frac{b}{c^n}} = a\sqrt[n]{\frac{bc^n}{c^n}}.$$

Hätte die gegebene Wurzelgröße keinen Coefficienten, so würde auch hier der Coefficiente 1 hinzugebracht.

$$\text{Z. B. } \sqrt[3]{648} = 6\sqrt[3]{\frac{648}{6^3}} = 6\sqrt[3]{\frac{648}{216}} = 6\sqrt[3]{3}.$$

§. 183.

Eine Wurzelgröße behält ferner ihren Werth unverändert, wenn man sowohl den Wurzelexponenten, als den Exponenten der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Größe mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt. 3. B. $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$; $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt[3]{a^9}$.

Denn es ist allgemein $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:r}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$;
und eben so ist $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:r}{n:r}} = a^{\frac{mr}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$.

Hieraus folgt auch $\sqrt[4]{a} = \sqrt[2]{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{(\sqrt{a})}$;
 $\sqrt[6]{a} = \sqrt[2]{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{(\sqrt{a})} = \sqrt{(\sqrt[3]{a})}$.

§. 184.

Um Wurzelgrößen von verschiedenen Wurzelexponenten ohne Aenderung ihres Werths in solche von einerley Wurzelexponenten zu verwandeln drücke man sie als Potenzen mit gebrochenen Exponenten aus, bringe hierauf diese auf einerley Benennung und verwandle endlich die so veränderten Potenzen wieder in Wurzelgrößen. 3. B.

$$\begin{cases} \sqrt[4]{ab} = ab^{\frac{1}{2}} = ab^{\frac{3}{6}} = a\sqrt[6]{b^3} \\ \sqrt[3]{cd} = cd^{\frac{1}{3}} = cd^{\frac{2}{6}} = c\sqrt[6]{d^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[2]{5} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5^{\frac{4}{8}} = 2\sqrt[8]{5^4} = 2\sqrt[8]{625} \\ \sqrt[3]{7} = 3 \times 7^{\frac{1}{4}} = 3 \times 7^{\frac{2}{8}} = 3\sqrt[8]{7^2} = 3\sqrt[8]{49} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[2]{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{12}{24}} = \sqrt[24]{3^{12}} \\ \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{8}{24}} = \sqrt[24]{7^8} \\ \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{6}{24}} = \sqrt[24]{5^6} \end{cases}$$

§. 185.

Es giebt Fälle, wo man den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten mehrerer gegebenen Wurzelgrößen durch andere Mittel kleiner erhalten kann, als nach der Methode des vorigen §.

So kann man im zweyten Beyspiele bey der Größe $2\sqrt[4]{5}$ den Wurzelexponenten 2 und den Exponenten 1 der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Zahl 5 mit 2 multipliciren, da dann $2\sqrt[4]{5} = 2\sqrt[4]{25}$ daraus entsteht, die mit der andern $3\sqrt[4]{7}$ schon einerley Exponenten hat.

Wenn also bey zwey gegebenen Wurzelgrößen der Wurzelexponente der einen ein Vielfaches von dem der andern ist, so ist es, um sie auf einerley Wurzelexponenten zu bringen, genug, den größeren Exponenten mit dem kleineren zu dividiren, und mit dem erhaltenen Quotienten bey der Wurzelgröße welche den kleineren Wurzelexponenten hat, sowohl den Exponenten der unter dem Wurzelzeichen stehenden Größe, als den Wurzelexponenten zu multipliciren.

Ueberhaupt, wenn es eine Zahl giebt, die sich durch die Wurzelexponenten aller gegebenen Wurzelgrößen ohne Rest theilen läßt, so erhält man viel einfachere Ausdrücke, wenn man diese Zahl zum gemeinschaftlichen Wurzelexponenten annimmt, und die Exponenten jeder unter dem Wurzelzeichen befindlichen Größe mit dem Quotienten multiplicirt, welchen die Division des angenommenen gemeinschaftlichen Wurzelexponenten durch den Wurzelexponenten eben dieser Größe giebt.

Man sieht leicht, daß es dabey am vortheilhaftesten ist, die kleinste meßbare Zahl (§. 79. 80.) der gegebenen Wurzelexponenten zum gemeinschaftlichen Wurzelexponenten anzunehmen.

So ist im dritten Beyspiele des vorigen §. die Zahl 12 durch die sämtlichen Wurzelexponenten 2, 3, 4 theilbar, und sie ist zugleich die kleinste meßbare Zahl derselben; daher findet man

$$\sqrt[12]{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$

$$\sqrt[12]{7} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}$$

$$\sqrt[12]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

§. 186.

Gleichartige Wurzelgrößen werden addirt oder subtrahirt indem man die Summe oder Differenz ihrer Coefficienten sucht, und solche der gegebenen Wurzelgröße als Coefficienten vorsetzt. Bey ungleichartigen kann die Addition und Subtraction bloß durch die Zeichen angedeutet werden.

$$3. \text{ B. } 7\sqrt[12]{8} + 5\sqrt[12]{8} = 12\sqrt[12]{8} = 24\sqrt[12]{2}.$$

$$4\sqrt[12]{5} + 8\sqrt[12]{5} = 12\sqrt[12]{5}$$

$$11\sqrt[12]{7} - 8\sqrt[12]{7} = 3\sqrt[12]{7}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[12]{11} - \frac{3}{7}\sqrt[12]{11} = \frac{14}{21}\sqrt[12]{11} - \frac{9}{21}\sqrt[12]{11}$$

$$= \frac{5}{21}\sqrt[12]{11}.$$

$$a + 2\sqrt[12]{ab} + 3\sqrt[12]{ac} - 4\sqrt[12]{ad} = A$$

$$b - 5\sqrt[12]{ab} + 9\sqrt[12]{ac} + 2\sqrt[12]{ad} = B$$

$$a + b - 3\sqrt[12]{ab} + 12\sqrt[12]{ac} - 2\sqrt[12]{ad} = A + B$$

$$a - b + 7\sqrt[12]{ab} - 6\sqrt[12]{ac} - 6\sqrt[12]{ad} = A - B.$$

Denn es ist allgemein

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b} \text{ genommen } a \text{ mal}$$

$$c\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b} \text{ genommen } c \text{ mal; folglich}$$

$$a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b} \text{ genommen } (a + c) \text{ mal} = (a + c)\sqrt[n]{b}, \text{ u.}$$

$$a\sqrt[n]{b} - c\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b} \text{ genommen } (a - c) \text{ mal} = (a - c)\sqrt[n]{b}.$$

Wizweilen sind die Wurzelgrößen bloß in der Form, worin ihre Ausdrücke gegeben sind, ungleichartig und lassen sich durch die Reduction (§. 177.) leicht in gleichartige verwandeln. Z. B.

$$\sqrt[4]{a}b + \sqrt[4]{b}c = a^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{b} + c\sqrt[4]{b} = (a^{\frac{3}{4}} + c)\sqrt[4]{b}$$

$$\begin{aligned} 8\sqrt[3]{128} - 5\sqrt[3]{16} &= 8\sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2} - 5\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \\ &= 8 \cdot 4\sqrt[3]{2} - 5 \cdot 2\sqrt[3]{2} = 32\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} = (32 - 10)\sqrt[3]{2} \\ &= 22\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

$$\sqrt{50} - \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (5 - 3)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} + 3\sqrt[4]{4} &= 2\sqrt[4]{2^2} + 3\sqrt[4]{2^2} = (2 + 3)\sqrt[4]{2^2} = 5\sqrt[4]{2^2} \\ &= 5 \cdot 2^{\frac{2}{4}} = 5 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

§. 187.

Nur Wurzelgrößen mit einander zu multipliciren hat man

1) bey einfachen Factoren von gleichen Wurzelexponenten (a) die Coefficienten und (b) die unter dem Wurzelzeichen befindlichen Größen jede besonders mit einander zu multipliciren;

2) bey einfachen Factoren von ungleichen Wurzelexponenten die letztern erst nach §. 180 gleich zu machen, und dann nach 1) zu multipliciren;

3) bey zusammengesetzten Factoren jedes Glied des einen Factors mit jedem Gliede des andern nach 1) u. 2) zu multipliciren und dann die Partialproducte zu addiren. Z. B.

$$\begin{aligned} a\sqrt[n]{b} \times c\sqrt[n]{d} &= ac\sqrt[n]{bd}; \quad 3\sqrt{6} \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{12} = \\ &= 24\sqrt{3}; \end{aligned}$$

$$\frac{p}{q} \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \times \frac{r}{s} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{pr}{qs} \sqrt[m]{\frac{ac}{bd}}; \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{27 \cdot 5} =$$

$$3\sqrt[3]{5}; 5\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{6} = 5\sqrt[6]{9} \times \sqrt[6]{216} = 5\sqrt[6]{1944}.$$

$$2\sqrt[3]{5} \times 7\sqrt[6]{3} = 2\sqrt[6]{5^2} \times 7\sqrt[6]{3^3} = 2\sqrt[6]{25} \times 7\sqrt[6]{27} \\ = 14\sqrt[6]{675}.$$

$$(a\sqrt{5} - 6\sqrt{3})(8 - \frac{1}{2}\sqrt{7}) = 8a\sqrt{5} - 48\sqrt{3} - \\ \frac{1}{2}a\sqrt{35} + 3\sqrt{21}.$$

$$(3\sqrt{ab} - \sqrt{c}) a\sqrt{bc} = 3a\sqrt{abc} - a\sqrt{bc^2} = \\ 3ab\sqrt{ac} - ac\sqrt{b}.$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a^2} - \sqrt{ab} + \sqrt{ab} - \sqrt{b^2} \\ = a - b.$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{9} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{4} \\ = 3 - 2 = 1.$$

Denn es ist allgemein

$$a\sqrt[n]{b} = a \times \sqrt[n]{b}, c\sqrt[n]{d} = c \times \sqrt[n]{d}; \text{ folglich}$$

$$a\sqrt[n]{b} \times c\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[n]{bd}.$$

§. 188.

Um der, für die Anwendung fruchtbaren Bemerkungen willen, die sich dabey darbieten werden, wird es gut seyn, noch folgende Irrationalgrößen mit einander zu multipliciren.

I. $\sqrt{50} + \sqrt{72}$ mit $\sqrt{50} + \sqrt{72}$ d. i.

$\sqrt{2} \cdot 25 + \sqrt{2} \cdot 36$ mit $\sqrt{2} \cdot 25 + \sqrt{2} \cdot 36$ oder

$5\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$ mit $5\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$ oder

$11\sqrt{2}$ mit $11\sqrt{2}$.

Daß Product $121 \cdot 2 = 242$ zeigt, daß die Summe der beyden Wurzeln $\sqrt{50}$ u. $\sqrt{72} = \sqrt{242}$ sey, weil das Quadrat dieser Summe $= 242$ ist.

II. $\sqrt{75} + \sqrt{48} + \sqrt{3}$ mit $\sqrt{75} + \sqrt{48} + \sqrt{3}$ d. i.
 $\sqrt{3} \cdot 25 + \sqrt{3} \cdot 16 + \sqrt{3}$ mit $\sqrt{3} \cdot 25 + \sqrt{3} \cdot 16 + \sqrt{3}$ oder
 $5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}$ mit $5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}$ oder
 $10\sqrt{3}$ mit $10\sqrt{3}$.

Das Product $100 \cdot 3 = 300$ zeigt, daß die Summe der drey Wurzeln $\sqrt{75}$, $\sqrt{48}$ und $\sqrt{3} = \sqrt{300}$ sey, weil das Quadrat dieser Summe $= 300$ ist.

III. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ mit $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \hline 2 + \sqrt{6} \\ + \sqrt{6} + 3 \\ \hline 5 + 2\sqrt{6} \end{array}$$

Dieses Product zeigt, daß das Quadrat einer zweytheiligen Wurzelgröße vom zweyten Grade auch zweytheilig ist.

IV. $5 + 2\sqrt{6}$ mit $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} 5 + 2\sqrt{6} \\ \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \hline 5\sqrt{2} + 2\sqrt{12} \\ + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{18} \\ \hline 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot 4 + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \cdot 9 = \\ 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 6\sqrt{2} = \\ 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}. \end{array}$$

Dieses Product zeigt, daß auch der Cubus einer zweytheiligen Wurzelgröße vom zweyten Grade gleichfalls zweytheilig ist.

Das nämliche gilt von allen höheren Potenzen zweytheiliger Wurzelgrößen, so lange bloß von nicht — communicirenden Wurzelgrößen des zweyten Grads die Rede ist.

Demn daß die Theile von den höheren Potenzen communicirender Wurzelgrößen eben dieses Grads rationale Producte und daher diese Potenzen selbst eintheilige rationale Größen werden, zeigen die Beyspiele I. und II.

V. $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ mit $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{5} + \sqrt{2} \\ \sqrt{5} - \sqrt{2} \\ \hline 5 + \sqrt{10} \\ - \sqrt{10} - 2 \\ \hline 5 - 2 = 3 \end{array}$$

Dieses Product zeigt, daß wenn man in einer zweytheiligen Wurzelgröße vom zweyten Grade das Zeichen eines Glieds ändert und mit der so veränderten die gegebene multiplicirt, das Product eine eintheilige rationale Größe wird.

VI. $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ mit $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \hline 5 + \sqrt{15} + \sqrt{10} \\ + \sqrt{15} + 3 + \sqrt{6} \\ - \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2 \\ \hline 6 + 2\sqrt{15} \end{array}$$

Dieses Product zeigt, daß, wenn man in einer dreytheiligen Wurzelgröße vom zweyten Grade das Zeichen eines Glieds ändert, und mit der so veränderten die gegebene multiplicirt, das Product eine zweytheilige, zum Theil rationale, Größe wird.

VII. $\sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$ mit $\sqrt{6} - \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{6} - \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \hline 6 + \sqrt{30} - \sqrt{18} + \sqrt{12} \\ - \sqrt{30} - 5 + \sqrt{15} - \sqrt{10} \\ - \sqrt{18} - \sqrt{15} + 3 - \sqrt{6} \\ - \sqrt{12} - \sqrt{10} + \sqrt{6} - 2 \\ \hline 2 - 2\sqrt{18} - 2\sqrt{10} \end{array}$$

Dieses Product zeigt, daß, wenn man in einer viertheiligen Wurzelgröße vom zweyten Grade die Zeichen von zwey Gliedern ändert, und mit der so veränderten die gegebene multiplicirt, das Product eine dreytheilige, zum Theil rationale, Größe wird.

§. 189.

Aus den Resultaten V — VII. des vorigen §. folgt eine vortheilhafte Methode, einen, ganz oder zum Theil irrationalen, Nenner eines Bruchs, wenn die Wurzelgrößen den zweyten Grad nicht übersteigen, und die Zahl seiner Glieder nicht größer, als 4, ist, in einen rationalen zu verwandeln. Man verwandelt nämlich durch das dort gefundene Mittel den viertheiligen Nenner erst in einen dreytheiligen, hierauf den dreytheiligen in einen zweytheiligen und diesen in einen eintheiligen rationalen, und multiplicirt alsdann auch den Zähler des Bruchs der Reihe nach mit eben den Factoren, womit man den Nenner multipliciren mußte, um ihn rational zu machen.

Zu Anwendungen dieser Methode wird uns die Division der Irrationalgrößen bald Gelegenheit geben.

§. 190.

Um Wurzelgrößen mit einander zu dividiren hat man

1) bey einfachen Größen (Divisor und Dividendus) von gleichen Wurzelexponenten (a) den Coefficienten des Dividendus durch den Coefficienten des Divisors, (b) die unter dem Wurzelzeichen begriffene Größe des Dividendus durch die des Divisors zu dividiren;

2) bey einfachen Größen von ungleichen Wurzelexponenten die letzteren erst nach §. 181. gleich zu machen, und dann nach 1) zu dividiren;

3) bey zusammengesetzten Größen die Division ebenso, wie bey Rationalgrößen, nach §. 160. zu verrichten. Z. B.

$$a\sqrt[n]{b} : c\sqrt[n]{d} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}; \frac{p}{q}\sqrt[r]{\frac{a}{b}} : \frac{m}{n}\sqrt[r]{\frac{c}{d}} = \frac{pn}{qm}\sqrt[r]{\frac{ad}{bc}}.$$

$$5b : 25\sqrt{c} = \frac{5b}{25\sqrt{c}} = \frac{b}{5\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b^2}}{5\sqrt{c}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{b^2}{c}} \\ = \frac{b}{5}\sqrt{\frac{1}{c}}.$$

$$ab : c\sqrt{b} = \frac{ab}{c\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b^2}}{c\sqrt{b}} = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2}{b}} = \frac{a}{c}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{12} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2.$$

$$2\sqrt[6]{6} : 3\sqrt[6]{9} = 2\sqrt[6]{\frac{6^3}{3^3}} : 3\sqrt[6]{\frac{9^2}{3^3}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{6^3}{9^2}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{216}{81}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{8}{3}}.$$

$$(\sqrt{54} - \sqrt{24}) : \sqrt{6} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} - \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$$

$$(\sqrt{72} - \sqrt{32}) : \sqrt{8} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{72}{8}} - \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$$

$$\sqrt{(x-z)^2} : (x+z) = \frac{\sqrt{(x-z)^2}}{\sqrt{(x+z)^2}} = \sqrt{\frac{(x-z)^2}{(x+z)^2}} = \frac{\sqrt{(x+z)(x-z)}}{(x+z)} = \sqrt{\frac{(x-z)}{(x+z)}} = \frac{\sqrt{(x-z)}}{\sqrt{(x+z)}}.$$

$$\frac{\sqrt{4ax} + \sqrt{6ax^2}}{\sqrt{2ax}} = \sqrt{\left(\frac{4ax}{2ax}\right)} + \sqrt{\left(\frac{6ax^2}{2ax}\right)} = \sqrt{2} + \sqrt{3x}.$$

$$\frac{4a + 8\sqrt{ac} - 9b + 12\sqrt{bc}}{2\sqrt{a} - 3\sqrt{b} + 4\sqrt{c}} = 2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}.$$

$$\frac{\sqrt{43} - \sqrt{24} - \sqrt{18} + 3}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} = \sqrt{18} - \sqrt{3}.$$

Denn es ist allgemein

$$a\sqrt[n]{b} = a \times \sqrt[n]{b}, \quad c\sqrt[n]{d} = c \times \sqrt[n]{d}; \text{ folglich}$$

$$a\sqrt[n]{b} : c\sqrt[n]{d} = \frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{d}} = \frac{a}{c} \times \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{d}} = \frac{a}{c} \sqrt[n]{\frac{b}{d}}$$

(§. 172.)

§. 191.

Wenn bey der Division der Irrationalgrößen der Divisor und Dividendus, wie im dritten Falle des vorigen §. beyde zusammengesetzte Größen sind, und nur Wurzelgrößen vom zweyten Grade enthalten, auch der Divisor nicht mehr als vier Glieder hat, so findet man den Quotienten in vielen Fällen bequemer, als nach der Methode des vorigen §. dadurch, daß man den Dividendus als den Zähler und den Divisor als den Nenner eines Bruches betrachtet, den letzteren nach §. 189. rational macht, und hierauf mit diesem rationalen Divisor den nach §. 189. veränderten Dividendus dividirt.

§. B.

$$\frac{\sqrt{c}^3b - \sqrt{c}^2bd + \sqrt{d}^2cm - \sqrt{d}^2m}{\sqrt{c} - \sqrt{d}} =$$

$$\frac{(\sqrt{c}^3b - \sqrt{c}^2bd + \sqrt{d}^2cm - \sqrt{d}^2m)(\sqrt{c} + \sqrt{d})}{(\sqrt{c} - \sqrt{d})(\sqrt{c} + \sqrt{d})} =$$

$$\frac{c^2\sqrt{b} + cd\sqrt{m} - cd\sqrt{b} - d^2\sqrt{m}}{c - d} = c\sqrt{b} + d\sqrt{m}.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{6V_6 + 2V_{15} - 3V_{10} - 5}{3V_2 + V_5} = \\
& \frac{(6V_6 + 2V_{15} - 3V_{10} - 5)(3V_2 - V_5)}{(3V_2 + V_5)(3V_2 - V_5)} = \\
& \frac{18V_{12} - 9V_{20} - 2V_{75} + 5V_5}{18 - 5} = \\
& \frac{18V_3 \cdot 4 - 9V_5 \cdot 4 - 2V_3 \cdot 25 + 5V_5}{13} = \\
& \frac{2 \cdot 18V_3 - 2 \cdot 9V_5 - 2 \cdot 5V_3 + 5V_5}{13} = \\
& \frac{36V_3 - 18V_5 - 10V_3 + 5V_5}{13} = \frac{26V_3 - 13V_5}{13} \\
& = 2V_3 - V_5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{7V_{15} + 5V_6 - 4V_{10} - 16}{3V_2 - 2V_3 + V_5} = \\
& \frac{(7V_{15} + 5V_6 - 4V_{10} - 16)(3V_2 + 2V_3 + V_5)}{(3V_2 - 2V_3 + V_5)(3V_2 + 2V_3 + V_5)} = \\
& \frac{18V_{30} + 2V_5 + 33V_3 - 38V_2}{6V_{10} + 11} = \\
& \frac{(18V_{30} + 2V_5 + 33V_3 - 38V_2)(6V_{10} - 11)}{(6V_{10} + 11)(6V_{10} - 11)} = \\
& \frac{378V_2 + 717V_3 - 478V_5}{239} = \\
& 2V_2 + 3V_3 - 2V_5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{V_{32} + V_{24} + 2}{V_6 + V_3 + V_2 - 1} = \\
& \frac{(V_{32} + V_{24} + 2)(V_6 - V_3 + V_2 + 1)}{(V_6 + V_3 + V_2 - 1)(V_6 - V_3 + V_2 + 1)} =
\end{aligned}$$

$$\frac{10\sqrt{3} + 22}{6\sqrt{3} + 4} = \frac{(10\sqrt{3} + 22)(6\sqrt{3} - 4)}{(6\sqrt{3} + 4)(6\sqrt{3} - 4)} =$$

$$\frac{92\sqrt{3} + 92}{92} = \sqrt{3} + 1.$$

§. 192.

Jede Potenz von einem geraden Exponenten ist positiv, die Wurzel mag positiv oder negativ seyn; hingegen ist jede Potenz von einem ungeraden Exponenten positiv oder negativ, je nachdem die Wurzel positiv oder negativ ist.

Denn ist die Wurzel a positiv, so ist ihr Quadrat $= +a \times +a = +a^2$; und ist die Wurzel a negativ, so ist ihr Quadrat $= -a \times -a = +a^2$.

Hingegen ist der Cubus der positiven Wurzel a $= +a \times +a \times +a = +a^3$; aber der Cubus der negativen Wurzel a ist $= -a \times -a \times -a = -a^3$. Da nun, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, $2n$ jede gerade Zahl vorstellt, so ist a^{2n} ein allgemeiner Ausdruck für jede Potenz der Wurzel a von einem geraden Exponenten. Es ist aber $a^{2n} = (a^2)^n$, d. h. jede Potenz der Wurzel a von einem geraden Exponenten $2n$ ist anzusehen als die n te Potenz des Quadrats von a , welches, nach dem Bewiesenen, jedesmal positiv ist, oder als ein Product aus n Factoren, deren jeder dem positiven Quadrate von a gleich ist, folglich ist jede Potenz der Wurzel a von einem geraden Exponenten, als ein Product aus lauter positiven Factoren, auch positiv.

Hingegen stellt $2n + 1$ jede ungerade Zahl vor, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, und a^{2n+1} ist also ein allgemeiner Ausdruck für jede Potenz der Wurzel a von einem ungeraden Exponenten. Da nun $(\frac{1}{2}a)^{2n+1} =$

$(+a)^{2n} \times +a$, aber $(+a)^{2n}$, nach dem Bewiesenen, allemal positiv ist, so muß $(+a)^{2n+1}$, als ein Product aus zwey positiven Factoren, allemal positiv seyn. Dagegen ist $(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} \times -a$. Da nun $(-a)^{2n}$, nach dem Bewiesenen, allemal positiv ist, so ist $(-a)^{2n+1}$, als ein Product aus einem positiven Factor in einen negativen, allemal negativ.

§. 193.

Aus dem Satze des vorigen §. fließt eine Reihe von Folgerungen, die wir, ihrer Wichtigkeit wegen, hier zusammenstellen wollen.

- I. Jede negative Potenz einer negativen Zahl ist, je nachdem der Exponente gerade oder ungerade ist, ein positiver oder negativer Bruch, der zum Zähler hat die Einheit und zum Nenner dieselbe Potenz mit demselben, aber positiven, Exponenten. Z. B.

$$(-a)^{-6} = \frac{1}{(-a)^6} = \frac{1}{a^6}. \text{ Hingegen}$$

$$(-a)^{-3} = \frac{1}{(-a)^3} = \frac{1}{-(a)^3} = -\frac{1}{a^3}.$$

- II. Jede Wurzel von einem geraden Exponenten aus einer positiven Zahl kann sowohl positiv als negativ seyn. Z. B.

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm \sqrt[2n]{a}.$$

- III. Jede Wurzel von einem geraden Exponenten aus einer negativen Zahl ist unmöglich. Denn, man möchte sie positiv oder negativ annehmen, so müßte jede Potenz von ihr, die einen geraden Exponenten hat, nach dem vorigen §. immer positiv werden. Von einer negativen Potenz kann also eine Wurzel, die einen geraden Exponenten hat, weder positiv noch negativ seyn; folglich ist

sie, als eine wirkliche Größe, überall nicht gedenkbar, d. h. sie ist unmöglich oder eingebildet (quantitas impossibilis s. imaginaria). Z. B. $\sqrt{-a}$,

$$\sqrt{-36}, \sqrt[2n]{-a}.$$

IV. Jede Wurzel von einem ungeraden Exponenten aus einer positiven Zahl ist positiv. Z. B. $\sqrt[2n+1]{+a}$
 $= + \sqrt[2n+1]{a}.$

V. Jede Wurzel von einem ungeraden Exponenten aus einer negativen Zahl ist eine zwar negative, aber allemal mögliche Größe. Z. B. $\sqrt[2n+1]{-a}$
 $= - \sqrt[2n+1]{a}.$

VI. Jede Wurzel von einem negativen Exponenten ist einem Bruche gleich, der zum Zähler hat die Einheit, und zum Nenner dieselbe Wurzel mit demselben, aber positiven, Exponenten. Denn

$$\text{es ist immer } \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Dabei lassen sich nun wieder folgende Fälle unterscheiden:

1) ist die Zahl a positiv und der Wurzelexponente gerade, so kann der Bruch so wohl positiv als negativ seyn. Dies drückt die Formel aus $\sqrt[2n]{+a} = \pm \sqrt[2n]{a} = \pm \frac{1}{\sqrt[2n]{a}}.$

2) ist die Zahl a negativ und der Wurzelexponente gerade, so ist der Ausdruck unmöglich. Z. B. $\sqrt[2n]{-a}$
 $= \frac{1}{\sqrt[2n]{-a}}.$

3) ist die Zahl positiv und der Wurzelexponente ungerade, so ist der Bruch positiv. Dies zeigt die Formel

$$\sqrt[2n+1]{a} + a = + \sqrt[2n+1]{a} = + \frac{1}{\sqrt[2n+1]{a}}.$$

4) ist die Zahl negativ und der Wurzelexponente ungerade, so ist der Bruch negativ. Dies deutet die Formel an

$$\sqrt[2n+1]{-a} - a = - \sqrt[2n+1]{a} = - \frac{1}{\sqrt[2n+1]{a}}.$$

VII. Aus den Sätzen II — V. lässt sich der Werth der Potenzen negativer Wurzeln, die gebrochene Exponenten haben, leicht bestimmen.

Es ist nämlich

$$(-a)^{\frac{2m}{2n}} = \pm a^{\frac{2m}{2n}}.$$

$(-a)^{\frac{2m}{2n}}$ ist unmöglich.

$$(-a)^{\frac{2m}{2n+1}} = + a^{\frac{2m}{2n+1}}$$

$$(-a)^{\frac{2m+1}{2n+1}} = - a^{\frac{2m+1}{2n+1}}.$$

VIII. Eben dieses gilt auch von Potenzen negativer Wurzeln, deren Exponenten negative Brüche sind.

Es ist nämlich

$$(-a)^{-\frac{2m}{2n}} = \pm \frac{1}{a^{\frac{2m}{2n}}} = \pm a^{-\frac{2m}{2n}}$$

$$(-a)^{-\frac{2m+1}{2n}}, \text{ unmöglich,}$$

$$(-a)^{-\frac{2m}{2n+1}} = + \frac{1}{a^{\frac{2m}{2n+1}}} = + a^{-\frac{2m}{2n+1}}$$

$$(-a)^{-\frac{2m+1}{2n+1}} = - \frac{1}{a^{\frac{2m+1}{2n+1}}} = - a^{-\frac{2m+1}{2n+1}}$$

IX. Wurzeln, deren Exponenten negative Brüche sind, aus negativen Größen lassen sich leicht in Potenzen eben dieser negativen Größen, deren Exponenten negative Brüche sind, verwandeln, und alsdann kann ihr Werth nach VIII. bestimmt werden. Z. B.

$$\sqrt[n]{-a} = (-a)^{-\frac{1}{n}} = (-a)^{-\frac{m}{m}}$$

§. 194.

Obgleich die unmöglichen Größen eigentlich nichts anders, als Zeichen eines Widerspruchs in den Bedingungen einer Aufgabe sind, so ist es doch oft von Wichtigkeit, ihnen, wenigstens in der Vorstellung, die Form wirklicher Größen zu leihen, einmal um den Sätzen die höchste Allgemeinheit zu geben, und dann auch weil in der That wirkliche Größen aus ihnen werden, so oft in der Rechnung die Irrationalität verschwindet, welche den Grund ihrer Unmöglichkeit enthielt. Es ist daher als ein besonderer Vorzug unserer allgemeinen Rechnungssprache anzusehen, daß sie uns auch zu Bezeichnung dieser Art von Größen bequeme Charaktere darbietet, die es uns möglich machen, sie allen arithmetischen Operationen ebensogut wie die wirklichen Größen zu unterwerfen.

§. 195.

Die unmöglichen Größen werden ebenso, wie die Irrationalgrößen nach §. 186, 187, 190, addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt; nur mit dem Unter-

schiede, daß man bey der Multiplication und Division unmöglicher Größen, ebenso wie bey ihrer Addition und Subtraction, bloß auf die den Wurzelzeichen vorgeetzten Beziehungszeichen (+ und -) zu sehen hat, und das, den unter dem Wurzelzeichen stehenden Größen vorgeetzte, Zeichen — nie verändert werden kann, so lange die Irrationalität nicht verschwindet. Dies folgt einmal aus der bestimmten Bedeutung welche dieses Zeichen hier hat, und vermöge welcher $\sqrt[n]{}$ — a gewissermaßen als ein untheilbares Zeichen anzusehen ist, dann aber auch daraus, daß, wenn man das Gegentheil zulassen, und dieses Zeichen nach eben den Regeln, wie es bey möglichen Größen geschieht, ändern wollte, man oft aus unmöglichen Factoren ein mögliches Product, oder aus einem unmöglichen Divisor und Dividendus einen möglichen Quotienten erhalten würde; welches offenbar ungereimt ist.

Uebrigens verdient diese Regel eine desto größere Aufmerksamkeit, da viele angesehene und beliebte Schriftsteller theils sie übersehen, theils das Gegentheil ausdrücklich zur Regel gemacht haben, und das durch in offenbare Ungereimtheiten gefallen sind.

Beispiele.

a) Der Addition.

$$\begin{array}{r}
 9\sqrt{} - 2 + 13\sqrt{} - 5 - 7\sqrt{} - 12 \\
 3\sqrt{} - 2 - 9\sqrt{} - 5 + 6\sqrt{} - 12 \\
 \hline
 12\sqrt{} - 2 + 4\sqrt{} - 5 - \sqrt{} - 12
 \end{array}$$

b) Der Subtraction.

$$\begin{array}{r}
 15\sqrt{} - 6 - 11\sqrt{} - 4 - 8\sqrt{} - 2 \\
 12\sqrt{} - 6 - 12\sqrt{} - 4 - 12\sqrt{} - 2 \\
 - \quad \quad + \quad \quad \quad + \\
 \hline
 3\sqrt{} - 6 + \sqrt{} - 4 + 4\sqrt{} - 2
 \end{array}$$

c) Der Multiplication.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{-2} \quad \sqrt{-2} - \sqrt{-2} \quad \sqrt{-3} \quad \sqrt{-3} \quad \sqrt{-3} \quad -\sqrt{-3} \\
 \sqrt{-3} - \sqrt{-3} \quad \sqrt{-3} \quad \sqrt{-3} \quad -\sqrt{-3} \quad \sqrt{-12} \quad \sqrt{-12} \\
 \hline
 \sqrt{-6} - \sqrt{-6} - \sqrt{-6} \quad -3 \quad +3 \quad -6 \quad +6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -1 + \sqrt{-3} \quad -2 - 2\sqrt{-3} \\
 -1 + \sqrt{-3} \quad -1 + \sqrt{-3} \\
 \hline
 +1 - \sqrt{-3} \quad +2 + 2\sqrt{-3} \\
 -\sqrt{-3} - 3 \quad -2\sqrt{-3} + 6 \\
 \hline
 -2 - 2\sqrt{-3} \quad +8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -1 - \sqrt{-3} \quad -2 + 2\sqrt{-3} \\
 -1 - \sqrt{-3} \quad -1 - \sqrt{-3} \\
 \hline
 +1 + \sqrt{-3} \quad +2 - 2\sqrt{-3} \\
 +\sqrt{-3} - 3 \quad +2\sqrt{-3} + 6 \\
 \hline
 -2 + 2\sqrt{-3} \quad +8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{-5} - \sqrt{-7} \quad \sqrt{-3} + \sqrt{-2} \\
 \sqrt{-3} \quad \sqrt{-3} \\
 \hline
 \sqrt{-15} - \sqrt{-21} \quad -3 + \sqrt{-6}
 \end{array}$$

d) Der Division.

$$\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{-3}; \quad \frac{\sqrt{-6}}{-\sqrt{-2}} = -\sqrt{-3}.$$

$$\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}} = \sqrt{-4}; \quad \frac{\sqrt{-12}}{-\sqrt{-3}} = -\sqrt{-4}.$$

$$\begin{array}{r}
 -45 - 6\sqrt{-10} + 6\sqrt{-15} - 4\sqrt{-6} \\
 3\sqrt{-5} - 2\sqrt{-2} \\
 \hline
 \sqrt{-45} \sqrt{-45} - \sqrt{-2 \cdot 4 \cdot 45} + \sqrt{-2 \cdot 6 \cdot 45} - \sqrt{-2 \cdot 6 \cdot 8} \\
 \hline
 \sqrt{-45} - \sqrt{-2 \cdot 4}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{V-45-V-2.4}{V-45+V-12} = \frac{V-45 \quad V-45 \quad V-2.4.45+V-2.6.45-V-2.6.8}{V-45 \quad V-45 \quad V-2.4.45} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 0 \quad 0 \quad 0 \\
 + \\
 +V-2.6.45-V-2.6.8 \\
 +V-2.6.45-V-2.6.8 \\
 - \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\frac{x^2 + z^2}{x + V - z^2} = x - V - z^2.$$

Wenn der Divisor eine zweitheilige oder vietheilige GröÙe ist, so kann man die Division auch bequem nach §. 191. verrichten. 3. B.

$$\begin{array}{r}
 \frac{8}{-1+V-3} = \frac{8(1+V-3)}{(-1+V-3)(1+V-3)} = \frac{8+8V-3}{-4} = -2-2V-3. \\
 \frac{76}{5-V-2} = \frac{76(6+V-2)}{(6-V-2)(6+V-2)} = \frac{456+76V-2}{38} = 12+2V-2.
 \end{array}$$

§. 196.

Wenn man bey der Rechnung mit irrationalen und unmöglichen Größen auf Schwierigkeiten stößt, oder in Widersprüche verwickelt wird, so kann man dies, wofern man sonst keinen Rechnungsfehler gemacht hat, immer als ein Zeichen ansehen, daß man den allgemeinen Rechnungsregeln irgendwo Gewalt angethan, oder sich eine unstatthafte Ausdehnung derselben erlaubt habe.

Man kann alsdann, um sich wieder zu Recht zu finden, nichts besseres thun, als daß man diese Größen in Potenzen mit gebrochenen Exponenten verwandelt, sie nach den, für die Rechnungsarten mit diesen oben gefundenen, Regeln behandelt, und wenn dann noch ein Anstand übrig bleiben sollte, sie durch alle Veränderungen zurück bis zu ihrem Ursprunge verfolgt.

Auf diesem Wege muß es jedesmal geschehen, die vorkommenden Schwierigkeiten vollständig zu heben, und von den scheinbaren Widersprüchen befriedigende Rechenschaft zu geben.

§. 197.

Wenn man durch die gewöhnliche Division einen Rest, oder, als Resultat einer andern Rechnung einen Bruch von der Form $\frac{1}{1+c}$ erhalten hat, so läßt sich

dieser durch fortgesetzte Division in eine Reihe verwandeln, wie die nachstehende Rechnung giebt.

$$1 + c) 1 \quad | 1 - c + c^2 - c^3 \dots\dots$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{1+c} \\
 \hline
 R' \quad 0 - c \\
 \quad - c - c^2 \\
 \quad + \quad + \\
 \hline
 R'' \quad 0 + c^2 \\
 \quad + c^2 + c^3 \\
 \quad - \quad - \\
 \hline
 R''' \quad 0 - c^3 \\
 \quad - c^3 - c^4 \\
 \quad + \quad + \\
 \hline
 R'''' \quad 0 + c^4
 \end{array}$$

Man dividirt nämlich den Dividendus mit dem ersten Theile des Divisors, so ist des Quotienten erstes Glied 1; dieses mit dem Divisor multiplicirt, giebt das Product $1 + c$, welches, von dem Dividendus abgezogen, den ersten Rest $R' = -c$ übrig läßt. Daraus erhält man ferner des Quotienten zweytes Glied $-c$, und durch Subtraction des Products aus diesem in den Divisor von dem vorigen Reste, den zweyten Rest $R'' = +c^2$. Daraus ergibt sich dann weiter des Quotienten drittes Glied $+c^2$ und der dritte Rest $R''' = -c^3$ u. f. w.

Dieses kleine Stück der Rechnung ist schon zureichend, um durch Zusammenstellung der Glieder des Quotienten und der zugehörigen Reste die Gesetze zu finden, nach welchen beyde bey der ganzen weiteren Entwicklung ohne Ende fortlaufen müssen.

Es sind nämlich I. II. III. IV.

Glieder des Quotienten $1 - c + c^2 - c^3$

Reste $-c + c^2 - c^3 + c^4$

Demnach sind die Glieder des Quotienten lauter Potenzen von c , welche so auf einander folgen, daß der Exponente einer jeden um 1 kleiner ist, als die Zahl des Glieds. Die Reste hingegen sind auch lauter Potenzen von c , welche aber so auf einander folgen, daß der Exponente einer jeden um Eins größer ist, als in dem zugehörigen Gliede des Quotienten, oder daß jeder nte Rest gleich ist dem $n + 1$ ten Gliede des Quotienten. Dabey sind in beyden alle gerade Potenzen positiv, die ungeraden aber negativ.

Nimmt man nun an, daß diese Gesetze für n Glieder des Quotienten richtig seyen, so muß das nte Glied desselben seyn $+c^{n-1}$, und es muß zum Reste lassen $+c^n$, welcher alsdann bey fortgesetzter Division zum folgenden $n + 1$ ten Gliede des Quotienten giebt $+c^n$. Wollte man bey diesem Gliede stehen bleiben

und doch den Quotienten vollständig haben, so müßte man demselben noch den Bruch anhängen $\frac{+c^{n+1}}{1+c}$.

Wären nun diese Gesetze für n Glieder des Quotienten wahr, so müßten sie auch für die um Eins größere Zahl wahr seyn. Nun sind sie aber, wie die vorstehende Rechnung zeigt, für 4 Glieder wahr, also auch für $4 + 1$ oder 5. Sind sie aber wahr für 5 Glieder, so sind sie auch wahr für $5 + 1$ oder 6 Glieder, u. s. w. für jede größere Zahl von Gliedern.

§. 198.

Hätte der gegebene Bruch die Form $\frac{1}{1-c}$, so fände man dieselbigen Glieder des Quotienten wie im vorigen §; nur mit dem Unterschiede, daß sie alsdann alle positiv wären.

Wenn aber auch weder im Zähler noch im Nenner des gegebenen Bruchs die Einheit vorkäme, sondern derselbe die Form hätte $\frac{a}{a+c}$, so ließe er sich doch leicht auf die Form des vorigen bringen. Denn es ist $\frac{a}{a+c} = \frac{1}{1+\frac{c}{a}}$, und man brauchte also um den Quotienten zu erhalten, nur in dem Ausdrucke des vorigen überall an Statt c zu setzen $\frac{c}{a}$.

§. 199.

Um aus dem, in Buchstaben ausgedrückten, Quadrate einer zweytheiligen Größe die Quadratwurzel zu finden, ordne man den ganzen Ausdruck nach einem seiner Buchstaben; alsdann halte man sich bloß an die oben (§. 159.) für das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel gefundene allgemeine Formel, um nach Anleitung derselben aus dem gegebenen Quadrate nach

und nach alles das heraus zu bringen, was von den Theilen der Wurzel bey der Zusammensetzung in dasselbe hineingekommen seyn muß. Zu dieser Absicht ziehe man von dem höchsten Theile des Quadrats ab a^2 , und setze a als den ersten Theil der gesuchten Wurzel in den Quotienten. Hierauf dividire man das höchste Glied des Restes mit $2a$, so erhält man des Quotienten zweyten Theil b . Endlich mache man das Product $(2a + b)b$, und ziehe solches von dem Reste ab, so ist, wenn nichts übrig bleibt, $a + b$ die gesuchte Quadratwurzel 3. B.

$$\begin{array}{r} 4p^2 + 12pq + 9q^2 \quad \left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \\ 2p + 3q \end{array} \\ \underline{a^2 = 4p^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 + 12pq + 9q^2 \\ 2a = \left(\begin{array}{l} + \\ + \end{array} \begin{array}{l} 4p \\ 4p \end{array} \right) \div 3q^2 (= b) \\ (2a + b)b = \begin{array}{l} + \\ + \end{array} 12pq + 9q^2 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25x^2 + 30xz + 9z^2 \quad \left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \\ 5x + 3z \end{array} \\ \underline{a^2 = 25x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 + 30xz + 9z^2 \\ 2a = \left(\begin{array}{l} + \\ + \end{array} \begin{array}{l} 10x \\ 10x \end{array} \right) \div 3z^2 (= b) \\ (2a + b)b = \begin{array}{l} + \\ + \end{array} 30xz + 9z^2 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36g^2 - 108gh + 81h^2 \quad \left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \\ 6g - 9h \end{array} \\ \underline{a^2 = -36g^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 108gh + 81h^2 \\ 2a = \left(\begin{array}{l} + \\ + \end{array} \begin{array}{l} 12g \\ 12g \end{array} \right) - 9h (= b) \\ (2a + b)b = \begin{array}{l} - \\ + \end{array} 108gh + 81h^2 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

§. 200.

Hat das gegebene Quadrat, nachdem es auf den einfachsten Ausdruck gebracht und gehörig geordnet worden, mehr als drey Glieder, so hat seine Wurzel mehr als zwey Theile. In diesem Falle suche man zuerst nach dem vorigen §. die ersten zwey Theile $a + b$.

Hierauf setze man $a + b = a'$, dividire das höchste Glied des Rests mit $2a'$ um c zu finden, und ziehe endlich von dem Reste ab $(2a' + c)c$. Bleibt abermal ein Rest, so setze man $a' + c = a''$, dividire den Rest mit $2a''$ um d zu finden, und ziehe endlich $(2a'' + d)d$ ab. Und dieses Verfahren setze man so lange fort, als noch ein Theil der Wurzel zu finden übrig ist. Z. B.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & a' & & \\
 & & & & \swarrow & \searrow & \\
 & & & & a & b & c
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 p^4 + 6pq^3 + 5p^2q^2 - 12pq^3 + 4q^4 \quad | \quad p^2 + 3pq - 2q^2 \\
 \underline{a = -p} \\
 0 + 6pq^3 + 5p^2q^2 \\
 2a = (+2p) + 3pq (= b) \\
 (2a + b)b = +6pq + 9pq \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 0 - 4pq^2 - 12pq^3 + 4q^4 \\
 2a' = (+2p + 6pq) - 2q (= c) \\
 (2a' + c)c = -4pq^2 - 12pq^3 + 4q^4 \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 0 \qquad \qquad 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9x^4 - 24xy^2 + 12xz^2 + 16y^4 - 16yz^2 + 4z^4 \\
 a = -9x^4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right\} 3x^2 - 4y^2 + 2z^2
 \end{array}$$

$$0 = 24xy^2 + 12xz^2 + 16y^4$$

$$2a = \left(\frac{1}{2} 6x \right) - 4y (= b)$$

$$(2 + b) b = -24xy + 16y^4$$

$$0 = 12xz^2 - 16yz^2 + 4z^4$$

$$2a' = \left(\frac{1}{2} 6x - 8y \right) + 2z (= c)$$

$$(2a' + c) c = \frac{1}{2} 12xz - 16yz + 4z^4$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

$$\begin{array}{c} \text{''} \\ \text{a} \\ \hline \text{a} \\ \hline \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \quad \text{d} \\ \text{a} \quad \text{a} \quad \text{a} \quad \text{a} \end{array}$$

$$x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 25x^2 + 24x + 16 \div x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

$$\begin{array}{r} x^3 \\ \hline x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 25x^2 + 24x + 16 \\ \hline \end{array}$$

$$2a = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)$$

$$(2a + b)b = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$$

$$\begin{array}{r} x^4 \\ \hline x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \\ \hline \end{array}$$

$$2a = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)$$

$$(2a + c)c = x^4 + 12x^3 + 9x^2$$

$$\begin{array}{r} x^4 \\ \hline x^4 + 12x^3 + 9x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$2a = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)$$

$$(2a + d)d = x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 16x + 16$$

$$\begin{array}{r} x^4 \\ \hline x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 16x + 16 \\ \hline \end{array}$$

Nach der Methode des vorigen §. kann man auch aus einer in Buchstaben ausgedruckten zweytheiligen Größe, die kein vollkommenes Quadrat ist, wie $p^2 \pm q$, die Quadratwurzel durch Näherung finden, wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} \text{''' } \\ a \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{'' } \\ a \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{' } \\ a \end{array} \\
 \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \end{array} \\
 a^2 = \frac{p^2 \pm q}{0 \pm q} \left\{ p \pm \frac{p}{2p} - \frac{q^2}{8p^3} + \frac{q^3}{16p^5} - \frac{5q^4}{128p^7} \right. \\
 2a = (\pm 2p) \pm \frac{q}{2p} (= b) \\
 (2a \pm b)b = \frac{\pm q}{0} \pm \frac{q^2}{4p^2} \\
 \qquad \qquad \qquad - \frac{q^2}{4p^2} \\
 2a' = \left(\pm 2p \pm \frac{q}{p} \right) - \frac{q^2}{8p^3} (= c) \\
 (2a' \pm c)c = \frac{-\frac{q^2}{4p^2} - \frac{q^2}{8p^4} \pm \frac{q^4}{64p^6}}{0 \pm \frac{q^3}{8p^4} - \frac{q^4}{64p^6}} \\
 2a'' = \left(\pm 2p \pm \frac{q}{p} - \frac{q^2}{4p^3} \right) \pm \frac{q^3}{16p^5} (= d) \\
 \qquad \qquad \qquad \pm \frac{q^3}{8p^4} \pm \frac{q^4}{16p^6} - \frac{q^5}{64p^8} \\
 \qquad \qquad \qquad - \frac{5q^4}{64p^6} \pm \frac{q^5}{64p^8} \\
 2a''' = \left(\pm 2p \pm \frac{q}{p} - \frac{q^2}{4p^3} \pm \frac{q^3}{8p^5} \right)
 \end{array}$$

Sucht man ebenso die Quadratwurzel von $p^2 - q$, so erhält man zwar die nämlichen Glieder des Quotienten, aber die Zeichen werden alle negativ.

§. 202.

Um aus dem, in Buchstaben ausgedrückten, Cubus einer zweytheiligen Größe die Cubikwurzel zu finden, ordne man den ganzen Ausdruck nach einem seiner Buchstaben; alsdann halte man sich bloß an die oben (§. 159) für den Cubus einer zweytheiligen Wurzel gefundene allgemeine Formel, um nach Anleitung derselben aus dem gegebenen Cubus nach und nach alles das heraus zu bringen, was von den Theilen der Wurzel bey der Zusammensetzung in denselben hineingekommen seyn muß. In dieser Absicht ziehe man von dem höchsten Theile des Cubus ab a^3 , und setze a als den ersten Theil der gesuchten Wurzel in den Quotienten. Hierauf dividire man das höchste Glied des Restes mit $3a^2$, so erhält man des Quotienten zweyten Theil b . Endlich mache man das Product $\left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right)ab$, und ziehe solches von dem Reste ab, so ist, wenn nichts übrig bleibt, $a + b$ die gesuchte Cubikwurzel. Z. B.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\
 27p^3 - 54pq^2 + 36p^2q - 8q^3 \bigg| 3p - 2q \\
 \underline{3a^3 = 27p^3} \\
 0 - 54pq^2 + 36p^2q - 8q^3 \\
 3a^2 = (+ 27p^2) \\
 \left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right)ab = - 54pq^2 + 36p^2q - 8q^3 \\
 \\
 \\

 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 8g^6 + 60g^4k + 150g^2k^2 + 125k^3 \\
 \hline
 0 + 60g^4k + 150g^2k^2 + 125k^3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 a \quad b \\
 2g^2 + 5k^2
 \end{array} \\
 a^3 = 8g^6 \\
 3a^2 = (+ 12g^4) \\
 \left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right)ab = (+ 60g^4k + 150g^2k^2 + 125k^3)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 64x^3 - 288xz^2 + 432xz^2 - 216z^3 \\
 \hline
 0 - 288xz^2 + 432xz^2 - 216z^3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 a \quad b \\
 4x - 6z
 \end{array} \\
 a^3 = 64x^3 \\
 3a^2 = (+ 48x^2) \\
 \left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right)ab = - 288xz^2 + 432xz^2 - 216z^3
 \end{array}$$

§. 203.

Hat der gegebene Cubus, nachdem er auf den einfachsten Ausdruck gebracht und gehörig geordnet worden, mehr, als vier Glieder, so hat seine Wurzel mehr, als zwey Theile. In diesem Falle suche man zuerst nach dem vorigen §. die ersten zwey Theile $a + b$. Hierauf setze man $a + b = \bar{a}$, dividire das höchste Glied des Restes mit $3\bar{a}^2$ um c zu finden, und ziehe endlich von dem Reste ab $\left(3\bar{a} + 3c + \frac{c^2}{\bar{a}}\right)\bar{a}c$. Bleibt

abermal ein Rest, so setze man $\bar{a} + c = \bar{a}$, dividire

den Rest mit $3\bar{a}^2$ um d zu finden, und ziehe endlich

$\left(3\bar{a} + 3d + \frac{d^2}{\bar{a}}\right)\bar{a}d$ ab. Und dieses Verfahren setze

man so lange fort, als noch ein Theil der Wurzel zu finden übrig ist. Z. B. Es sey zu finden

$$\sqrt[3]{(27m^3 - 54mn^2 + 36mn^2 - 8n^3 + 27mr^2 - 36mnr + 9mr^2 + 12nr^2 - 6nr^2 + r^3)}$$

Diese Ausdrücke muß man, um für die Rechnung den nöthigen Raum zu gewinnen, so theilen, daß man zuerst nur die Glieder bis mit auf den Cubus des zweyten Theils der Wurzel, und alsdann die übrigen vornimmt.

$$\begin{array}{r} \overbrace{a}^{\bar{a}} \quad \overbrace{b}^{\bar{b}} \quad c \\ 27m^3 - 54mn^2 + 36mn^2 - 8n^3 \quad 3m - 2n + r \\ \underline{a = 27m^3} \end{array}$$

$$0 - 54mn^2 + 36mn^2 - 8n^3$$

$$3a = (+27m^2)$$

$$\left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right)ab = -54mn^2 + 36mn^2 - 8n^3$$

$$\begin{array}{r} + \quad - \quad + \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$+ 27mr^2 - 36mnr + 9mr^2 + 12nr^2 - 6nr^2 + r^3$$

$$3\bar{a} = (+27m^2 - 36mn + 12n)$$

$$\left(3\bar{a} + 3c + \frac{c^2}{\bar{a}}\right)\bar{a}c = 27mr^2 - 36mnr + 9mr^2 + 12nr^2 - 6nr^2 + r^3$$

$$\begin{array}{r} - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{(8k^3 - 36kp^2 + 54k^2p - 27p^3 + 12kq - 36kpq + 27p^2q + 6kq^2 - 9pq^2 + q^3)}$$

$$\sqrt[3]{8k^3 - 36kp^2 + 54k^2p - 27p^3} \sqrt[3]{\overbrace{2k - 3p}^a + q^c}$$

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{8k}$$

$$\frac{0 - 36kp^2 + 54k^2p - 27p^3}{3a = (+ 12k^2)}$$

$$\left(3a + 3b + \frac{b}{a}\right)_{ab} = - 36kp^2 + 54k^2p - 27p^3$$

$$\frac{+ \quad - \quad +}{0 \quad 0 \quad 0}$$

$$12kq - 36kpq + 27p^2q + 6kq^2 - 9pq^2 + q^3$$

$$3\bar{a} = (12k^2 - 36kp + 27p^2)$$

$$\left(3\bar{a} + 3c + \frac{c}{a}\right) \bar{a}c = 12k^2q - 36kpq + 27p^2q + 6kq^2 - 9pq^2 + q^3$$

$$\frac{- +}{0} \quad \frac{- -}{0} \quad \frac{+}{0} \quad \frac{-}{0}$$

$$\sqrt[3]{(x^6 + 6x^5y + 21x^4y^2 + 44x^3y^3 + 63x^2y^4 + 54xy^5 + 27y^6)}$$

$$x^2 + 6x^5y + 21x^4y^2 + 44x^3y^3 + 63x^2y^4 + 54xy^5 + 27y^6$$

$$a^3 = x^6$$

$$\frac{0 + 6x^5y + 21x^4y^2 + 44x^3y^3}{(+ 3x^4)}$$

$$\left(3a + 3b + \frac{b^2}{a}\right)ab = \frac{6x^5y + 12x^4y^2 + 8x^3y^3}{0 + 9x^4y^2 + 36x^3y^3}$$

$$\begin{aligned} & \frac{4^2}{1} xy + 36 \frac{3^2}{xy} + 63 \frac{2^4}{xy} + 54 \frac{5}{xy} + 27y \\ 3a &= (3x + 12xy + 12xy) \end{aligned}$$

$$\left(3a + 3c + \frac{c}{a} \right) ac = \frac{4^2}{1} xy + 36 \frac{3^2}{xy} + 63 \frac{2^4}{xy} + 54 \frac{5}{xy} + 27y$$

$$\begin{array}{ccccccc} - & - & - & - & - & - & - \\ \hline 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

§. 204.

Nach der Methode des vorigen §. kann man auch aus einer in Buchstaben ausgedrückten zwey-
theiligen Größe, die kein vollkommener Cubus ist, wie $p^3 + q$, die Cubikwurzel durch Näherung fin-
den, wie die nachstehende Rechnung zeigt.

