

Neunter Abschnitt.

Von den arithmetischen und geometrischen Reihen und den Logarithmen.

§. 114.

Wenn man eine stetige arithmetische Proportion fortsetzt, so erhält man eine arithmetische, setzt man aber eine stetige geometrische Proportion fort, so erhält man eine geometrische Reihe, oder Progression; in jener hat also jedes Glied zum nachfolgenden einerley arithmetisches, in dieser aber einerley geometrisches Verhältniß. So ist z. B. die arithmetische Reihe, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 175, 177, 179, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199, 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213, 215, 217, 219, 221, 223, 225, 227, 229, 231, 233, 235, 237, 239, 241, 243, 245, 247, 249, 251, 253, 255, 257, 259, 261, 263, 265, 267, 269, 271, 273, 275, 277, 279, 281, 283, 285, 287, 289, 291, 293, 295, 297, 299, 301, 303, 305, 307, 309, 311, 313, 315, 317, 319, 321, 323, 325, 327, 329, 331, 333, 335, 337, 339, 341, 343, 345, 347, 349, 351, 353, 355, 357, 359, 361, 363, 365, 367, 369, 371, 373, 375, 377, 379, 381, 383, 385, 387, 389, 391, 393, 395, 397, 399, 401, 403, 405, 407, 409, 411, 413, 415, 417, 419, 421, 423, 425, 427, 429, 431, 433, 435, 437, 439, 441, 443, 445, 447, 449, 451, 453, 455, 457, 459, 461, 463, 465, 467, 469, 471, 473, 475, 477, 479, 481, 483, 485, 487, 489, 491, 493, 495, 497, 499, 501, 503, 505, 507, 509, 511, 513, 515, 517, 519, 521, 523, 525, 527, 529, 531, 533, 535, 537, 539, 541, 543, 545, 547, 549, 551, 553, 555, 557, 559, 561, 563, 565, 567, 569, 571, 573, 575, 577, 579, 581, 583, 585, 587, 589, 591, 593, 595, 597, 599, 601, 603, 605, 607, 609, 611, 613, 615, 617, 619, 621, 623, 625, 627, 629, 631, 633, 635, 637, 639, 641, 643, 645, 647, 649, 651, 653, 655, 657, 659, 661, 663, 665, 667, 669, 671, 673, 675, 677, 679, 681, 683, 685, 687, 689, 691, 693, 695, 697, 699, 701, 703, 705, 707, 709, 711, 713, 715, 717, 719, 721, 723, 725, 727, 729, 731, 733, 735, 737, 739, 741, 743, 745, 747, 749, 751, 753, 755, 757, 759, 761, 763, 765, 767, 769, 771, 773, 775, 777, 779, 781, 783, 785, 787, 789, 791, 793, 795, 797, 799, 801, 803, 805, 807, 809, 811, 813, 815, 817, 819, 821, 823, 825, 827, 829, 831, 833, 835, 837, 839, 841, 843, 845, 847, 849, 851, 853, 855, 857, 859, 861, 863, 865, 867, 869, 871, 873, 875, 877, 879, 881, 883, 885, 887, 889, 891, 893, 895, 897, 899, 901, 903, 905, 907, 909, 911, 913, 915, 917, 919, 921, 923, 925, 927, 929, 931, 933, 935, 937, 939, 941, 943, 945, 947, 949, 951, 953, 955, 957, 959, 961, 963, 965, 967, 969, 971, 973, 975, 977, 979, 981, 983, 985, 987, 989, 991, 993, 995, 997, 999, 1001, 1003, 1005, 1007, 1009, 1011, 1013, 1015, 1017, 1019, 1021, 1023, 1025, 1027, 1029, 1031, 1033, 1035, 1037, 1039, 1041, 1043, 1045, 1047, 1049, 1051, 1053, 1055, 1057, 1059, 1061, 1063, 1065, 1067, 1069, 1071, 1073, 1075, 1077, 1079, 1081, 1083, 1085, 1087, 1089, 1091, 1093, 1095, 1097, 1099, 1101, 1103, 1105, 1107, 1109, 1111, 1113, 1115, 1117, 1119, 1121, 1123, 1125, 1127, 1129, 1131, 1133, 1135, 1137, 1139, 1141, 1143, 1145, 1147, 1149, 1151, 1153, 1155, 1157, 1159, 1161, 1163, 1165, 1167, 1169, 1171, 1173, 1175, 1177, 1179, 1181, 1183, 1185, 1187, 1189, 1191, 1193, 1195, 1197, 1199, 1201, 1203, 1205, 1207, 1209, 1211, 1213, 1215, 1217, 1219, 1221, 1223, 1225, 1227, 1229, 1231, 1233, 1235, 1237, 1239, 1241, 1243, 1245, 1247, 1249, 1251, 1253, 1255, 1257, 1259, 1261, 1263, 1265, 1267, 1269, 1271, 1273, 1275, 1277, 1279, 1281, 1283, 1285, 1287, 1289, 1291, 1293, 1295, 1297, 1299, 1301, 1303, 1305, 1307, 1309, 1311, 1313, 1315, 1317, 1319, 1321, 1323, 1325, 1327, 1329, 1331, 1333, 1335, 1337, 1339, 1341, 1343, 1345, 1347, 1349, 1351, 1353, 1355, 1357, 1359, 1361, 1363, 1365, 1367, 1369, 1371, 1373, 1375, 1377, 1379, 1381, 1383, 1385, 1387, 1389, 1391, 1393, 1395, 1397, 1399, 1401, 1403, 1405, 1407, 1409, 1411, 1413, 1415, 1417, 1419, 1421, 1423, 1425, 1427, 1429, 1431, 1433, 1435, 1437, 1439, 1441, 1443, 1445, 1447, 1449, 1451, 1453, 1455, 1457, 1459, 1461, 1463, 1465, 1467, 1469, 1471, 1473, 1475, 1477, 1479, 1481, 1483, 1485, 1487, 1489, 1491, 1493, 1495, 1497, 1499, 1501, 1503, 1505, 1507, 1509, 1511, 1513, 1515, 1517, 1519, 1521, 1523, 1525, 1527, 1529, 1531, 1533, 1535, 1537, 1539, 1541, 1543, 1545, 1547, 1549, 1551, 1553, 1555, 1557, 1559, 1561, 1563, 1565, 1567, 1569, 1571, 1573, 1575, 1577, 1579, 1581, 1583, 1585, 1587, 1589, 1591, 1593, 1595, 1597, 1599, 1601, 1603, 1605, 1607, 1609, 1611, 1613, 1615, 1617, 1619, 1621, 1623, 1625, 1627, 1629, 1631, 1633, 1635, 1637, 1639, 1641, 1643, 1645, 1647, 1649, 1651, 1653, 1655, 1657, 1659, 1661, 1663, 1665, 1667, 1669, 1671, 1673, 1675, 1677, 1679, 1681, 1683, 1685, 1687, 1689, 1691, 1693, 1695, 1697, 1699, 1701, 1703, 1705, 1707, 1709, 1711, 1713, 1715, 1717, 1719, 1721, 1723, 1725, 1727, 1729, 1731, 1733, 1735, 1737, 1739, 1741, 1743, 1745, 1747, 1749, 1751, 1753, 1755, 1757, 1759, 1761, 1763, 1765, 1767, 1769, 1771, 1773, 1775, 1777, 1779, 1781, 1783, 1785, 1787, 1789, 1791, 1793, 1795, 1797, 1799, 1801, 1803, 1805, 1807, 1809, 1811, 1813, 1815, 1817, 1819, 1821, 1823, 1825, 1827, 1829, 1831, 1833, 1835, 1837, 1839, 1841, 1843, 1845, 1847, 1849, 1851, 1853, 1855, 1857, 1859, 1861, 1863, 1865, 1867, 1869, 1871, 1873, 1875, 1877, 1879, 1881, 1883, 1885, 1887, 1889, 1891, 1893, 1895, 1897, 1899, 1901, 1903, 1905, 1907, 1909, 1911, 1913, 1915, 1917, 1919, 1921, 1923, 1925, 1927, 1929, 1931, 1933, 1935, 1937, 1939, 1941, 1943, 1945, 1947, 1949, 1951, 1953, 1955, 1957, 1959, 1961, 1963, 1965, 1967, 1969, 1971, 1973, 1975, 1977, 1979, 1981, 1983, 1985, 1987, 1989, 1991, 1993, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021, 2023, 2025, 2027, 2029, 2031, 2033, 2035, 2037, 2039, 2041, 2043, 2045, 2047, 2049, 2051, 2053, 2055, 2057, 2059, 2061, 2063, 2065, 2067, 2069, 2071, 2073, 2075, 2077, 2079, 2081, 2083, 2085, 2087, 2089, 2091, 2093, 2095, 2097, 2099, 2101, 2103, 2105, 2107, 2109, 2111, 2113, 2115, 2117, 2119, 2121, 2123, 2125, 2127, 2129, 2131, 2133, 2135, 2137, 2139, 2141, 2143, 2145, 2147, 2149, 2151, 2153, 2155, 2157, 2159, 2161, 2163, 2165, 2167, 2169, 2171, 2173, 2175, 2177, 2179, 2181, 2183, 2185, 2187, 2189, 2191, 2193, 2195, 2197, 2199, 2201, 2203, 2205, 2207, 2209, 2211, 2213, 2215, 2217, 2219, 2221, 2223, 2225, 2227, 2229, 2231, 2233, 2235, 2237, 2239, 2241, 2243, 2245, 2247, 2249, 2251, 2253, 2255, 2257, 2259, 2261, 2263, 2265, 2267, 2269, 2271, 2273, 2275, 2277, 2279, 2281, 2283, 2285, 2287, 2289, 2291, 2293, 2295, 2297, 2299, 2301, 2303, 2305, 2307, 2309, 2311, 2313, 2315, 2317, 2319, 2321, 2323, 2325, 2327, 2329, 2331, 2333, 2335, 2337, 2339, 2341, 2343, 2345, 2347, 2349, 2351, 2353, 2355, 2357, 2359, 2361, 2363, 2365, 2367, 2369, 2371, 2373, 2375, 2377, 2379, 2381, 2383, 2385, 2387, 2389, 2391, 2393, 2395, 2397, 2399, 2401, 2403, 2405, 2407, 2409, 2411, 2413, 2415, 2417, 2419, 2421, 2423, 2425, 2427, 2429, 2431, 2433, 2435, 2437, 2439, 2441, 2443, 2445, 2447, 2449, 2451, 2453, 2455, 2457, 2459, 2461, 2463, 2465, 2467, 2469, 2471, 2473, 2475, 2477, 2479, 2481, 2483, 2485, 2487, 2489, 2491, 2493, 2495, 2497, 2499, 2501, 2503, 2505, 2507, 2509, 2511, 2513, 2515, 2517, 2519, 2521, 2523, 2525, 2527, 2529, 2531, 2533, 2535, 2537, 2539, 2541, 2543, 2545, 2547, 2549, 2551, 2553, 2555, 2557, 2559, 2561, 2563, 2565, 2567, 2569, 2571, 2573, 2575, 2577, 2579, 2581, 2583, 2585, 2587, 2589, 2591, 2593, 2595, 2597, 2599, 2601, 2603, 2605, 2607, 2609, 2611, 2613, 2615, 2617, 2619, 2621, 2623, 2625, 2627, 2629, 2631, 2633, 2635, 2637, 2639, 2641, 2643, 2645, 2647, 2649, 2651, 2653, 2655, 2657, 2659, 2661, 2663, 2665, 2667, 2669, 2671, 2673, 2675, 2677, 2679, 2681, 2683, 2685, 2687, 2689, 2691, 2693, 2695, 2697, 2699, 2701, 2703, 2705, 2707, 2709, 2711, 2713, 2715, 2717, 2719, 2721, 2723, 2725, 2727, 2729, 2731, 2733, 2735, 2737, 2739, 2741, 2743, 2745, 2747, 2749, 2751, 2753, 2755, 2757, 2759, 2761, 2763, 2765, 2767, 2769, 2771, 2773, 2775, 2777, 2779, 2781, 2783, 2785, 2787, 2789, 2791, 2793, 2795, 2797, 2799, 2801, 2803, 2805, 2807, 2809, 2811, 2813, 2815, 2817, 2819, 2821, 2823, 2825, 2827, 2829, 2831, 2833, 2835, 2837, 2839, 2841, 2843, 2845, 2847, 2849, 2851, 2853, 2855, 2857, 2859, 2861, 2863, 2865, 2867, 2869, 2871, 2873, 2875, 2877, 2879, 2881, 2883, 2885, 2887, 2889, 2891, 2893, 2895, 2897, 2899, 2901, 2903, 2905, 2907, 2909, 2911, 2913, 2915, 2917, 2919, 2921, 2923, 2925, 2927, 2929, 2931, 2933, 2935, 2937, 2939, 2941, 2943, 2945, 2947, 2949, 2951, 2953, 2955, 2957, 2959, 2961, 2963, 2965, 2967, 2969, 2971, 2973, 2975, 2977, 2979, 2981, 2983, 2985, 2987, 2989, 2991, 2993, 2995, 2997, 2999, 3001, 3003, 3005, 3007, 3009, 3011, 3013, 3015, 3017, 3019, 3021, 3023, 3025, 3027, 3029, 3031, 3033, 3035, 3037, 3039, 3041, 3043, 3045, 3047, 3049, 3051, 3053, 3055, 3057, 3059, 3061, 3063, 3065, 3067, 3069, 3071, 3073, 3075, 3077, 3079, 3081, 3083, 3085, 3087, 3089, 3091, 3093, 3095, 3097, 3099, 3101, 3103, 3105, 3107, 3109, 3111, 3113, 3115, 3117, 3119, 3121, 3123, 3125, 3127, 3129, 3131, 3133, 3135, 3137, 3139, 3141, 3143, 3145, 3147, 3149, 3151, 3153, 3155, 3157, 3159, 3161, 3163, 3165, 3167, 3169, 3171, 3173, 3175, 3177, 3179, 3181, 3183, 3185, 3187, 3189, 3191, 3193, 3195, 3197, 3199, 3201, 3203, 3205, 3207, 3209, 3211, 3213, 3215, 3217, 3219, 3221, 3223, 3225, 3227, 3229, 3231, 3233, 3235, 3237, 3239, 3241, 3243, 3245, 3247, 3249, 3251, 3253, 3255, 3257, 3259, 3261, 3263, 3265, 3267, 3269, 3271, 3273, 3275, 3277, 3279, 3281, 3283, 3285, 3287, 3289, 3291, 3293, 3295, 3297, 3299, 3301, 3303, 3305, 3307, 3309, 3311, 3313, 3315, 3317, 3319, 3321, 3323, 3325, 3327, 3329, 3331, 3333, 3335, 3337, 3339, 3341, 3343, 3345, 3347, 3349, 3351, 3353, 3355, 3357, 3359, 3361, 3363, 3365, 3367, 3369, 3371, 3373, 3375, 3377, 3379, 3381, 3383, 3385, 3387, 3389, 3391, 3393, 3395, 3397, 3399, 3401, 3403, 3405, 3407, 3409, 3411, 3413, 3415, 3417, 3419, 3421, 3423, 3425, 3427, 3429, 3431, 3433, 3435, 3437, 3439, 3441, 3443, 3445, 3447, 3449, 3451, 3453, 3455, 3457, 3459, 3461, 3463, 3465, 3467, 3469, 3471, 3473, 3475, 3477, 3479, 3481, 3483, 3485, 3487, 3489, 3491, 3493, 3495, 3497, 3499, 3501, 3503, 3505, 3507, 3509, 3511, 3513, 3515, 3517, 3519, 3521, 3523, 3525, 3527, 3529, 3531, 3533, 3535, 3537, 3539, 3541, 3543, 3545, 3547, 3549, 3551, 3553, 3555, 3557, 3559, 3561, 3563, 3565, 3567, 3569, 3571, 3573, 3575, 3577, 3579, 3581, 3583, 3585, 3587, 3589, 3591, 3593, 3595, 3597, 3599, 3601, 3603, 3605, 3607, 3609, 3611, 3613, 3615, 3617, 3619, 3621, 3623, 3625, 3627, 3629, 3631, 3633, 3635, 3637, 3639, 3641, 3643, 3645, 3647, 3649, 3651, 3653, 3655, 3657, 3659, 3661, 3663, 3665, 3667, 3669, 3671, 3673, 3675, 3677, 3679, 3681, 3683, 3685, 3687, 3689, 3691, 3693, 3695, 3697, 3699, 3701, 3703, 3705, 3707, 3709, 3711, 3713, 3715, 3717, 3719, 3721, 3723, 3725, 3727, 3729, 3731, 3733, 3735, 3737, 3739, 3741, 3743, 3745, 3747, 3749, 3751, 3753, 3755, 3757, 3759, 3761, 3763, 3765, 3767, 3769, 3771, 3773, 3775, 3777, 3779, 3781, 3783, 3785, 3787, 3789, 3791, 3793, 3795, 3797, 3799, 3801, 3803, 3805, 3807, 3809, 3811, 3813, 3815, 3817, 3819, 3821, 3823, 3825, 3827, 3829, 3831, 3833, 3835, 3837, 3839, 3841, 3843, 3845, 3847, 3849, 3851, 3853, 3855, 3857, 3859, 3861, 3863, 3865, 3867, 3869, 3871, 3873, 3875, 3877, 3879, 3881, 3883, 3885, 3887, 3889, 3891, 3893, 3895, 3897, 3899, 3901, 3903, 3905, 3907, 3909, 3911, 3913, 3915, 3917, 3919, 3921, 3923, 3925, 3927, 3929, 3931, 3933, 3935, 3937, 3939, 3941, 3943, 3945, 3947, 3949, 3951, 3953, 3955, 3957, 3959, 3961, 3963, 3965, 3967, 3969, 3971, 3973, 3975, 3977, 3979, 3981, 3983, 3985, 3987, 3989, 3991, 3993, 3995, 3997, 3999, 4001, 4003, 4005, 4007, 4009, 4011, 4013, 4015, 4017, 4019, 4021, 4023, 4025, 4027, 4029, 4031, 4033, 4035, 4037, 4039, 4041, 4043, 4045, 4047, 4049, 4051, 4053, 4055, 4057, 4059, 4061, 4063, 4065, 4067, 4069, 4071, 4073, 4075, 4077, 4079, 4081, 4083, 4085, 4087, 4089, 4091, 4093, 4095, 4097, 4099, 4101, 4103, 4105, 4107, 4109, 4111, 4113, 4115, 4117, 4119, 4121, 4123, 4125, 4127, 4129, 4131, 4133, 4135, 4137, 4139, 4141, 4143, 4145, 4147, 4149, 4151, 4153, 4155, 4157, 4159, 4161, 4163, 4165, 4167, 4169, 4171, 4173, 4175, 4177, 4179, 4181, 4183, 4185, 4187, 4189, 4191, 4193, 4195, 4197, 4199, 4201, 4203, 4

Glieder einer Reihe größer, als die vorhergehenden, so heißt sie eine steigende, sind dagegen jene kleiner als diese, so heißt sie eine fallende. Eine steigende Reihe wird in eine fallende, und diese in jene verwandelt, wenn man sie rückwärts liest. Lieset man eine steigende arithmetische Reihe rückwärts, und setzt sie über das erste Glied hinaus noch weiter fort, so kommt man auf negative Glieder, welche man sich als ein Fallen unter einen gewissen Punkt, so wie die positiven als ein Steigen über denselben vorstellen kann. So wird z. B. die obige arithmetische Reihe, rückwärts gelesen, in folgende verwandelt, 7, 5, 3, 1, — 1, — 3, — 5, — 7, — 9 — u. u. Wird hingegen eine steigende geometrische Reihe rückwärts gelesen, und über das erste Glied hinaus fortgesetzt, so kommt man auf Brüche, die zwar immer kleiner, aber nie = 0 werden; z. B. aus der obigen geometrischen Reihe wird die nachstehende: 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ u. u.

§. 115.

Jede arithmetische und geometrische Reihe besteht ihrer Natur nach aus unzählig vielen Gliedern, wovon man jedesmal, nach Maafgabe der Bestimmungen einer Rechnung, eine gewisse Anzahl herausnimmt, und als die ganze Reihe, so wie das letzte derselben, als das letzte Glied der Reihe betrachtet. Wenn daher von der Summe einer Reihe die Rede ist, so versteht man allemal die Summe eines solchen Stücks derselben. In der arithmetischen Reihe bestimmen nun die Differenz der Glieder, das erste Glied, das letzte Glied, die Anzahl und die Summe aller Glieder, in der geometrischen aber die vier letzten Stücke und der Exponent der Glieder einander so, daß wenn drey derselben bekannt sind, die zwey übrigen daraus hergeleitet werden können. Dies giebt für jede Reihe zehn Aufgaben, zu deren Auflösung die Buchstabenrechnung eben so viele Formeln giebt, die aus zwey Grundformeln, einer für das letzte Glied und einer für die Summe der Glieder abzuleiten sind. Hier kann nur die letzte dieser Aufgaben, nämlich die Aufgabe, die Summe einer Reihe zu finden, welche auch in praktischen Rechnungen am öftesten vorkommt, vorgetragen werden,

und wir müssen suchen, auf einem andern Wege zur Auflösung derselben zu gelangen.

§. 116.

In jeder arithmetischen Progression ist die Summe des ersten und letzten Glieds eben so groß, als die Summe je zweyer andern Glieder, die von dem ersten und letzten gleich weit entfernt sind.

Denn die Summe zweyer Größen bleibt immer die nämliche, wenn die eine derselben um eben so viel wächst, um wie viel die andere abnimmt; z. B. $20 + 4 = 19 + 5 = 18 + 6 = 17 + 7$ u. s. f. Wenn man aber die Glieder einer arithmetischen Progression vorwärts vom ersten Gliede gegen das letzte zu und rückwärts vom letzten Gliede gegen das erste zu fortzählt, so wachsen die Glieder vom ersten gegen das letzte zu immer um eben so viel, als sie vom letzten gegen das erste zu abnehmen, wie man leicht überieht, wenn man sie folgendermaßen untereinander schreibt.

$$\begin{array}{r}
 1, \left\{ \begin{array}{c} 1 + 2 \\ 3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 3 + 2 \\ 5 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 5 + 2 \\ 7 \end{array} \right\}, \\
 \left\{ \begin{array}{c} 7 + 2 \\ 9 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 9 + 2 \\ 11 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 11 + 2 \\ 13 \end{array} \right\} \\
 13, \left\{ \begin{array}{c} 13 - 2 \\ 11 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 11 - 2 \\ 9 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 9 - 2 \\ 7 \end{array} \right\}, \\
 \left\{ \begin{array}{c} 7 - 2 \\ 5 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 5 - 2 \\ 3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 3 - 2 \\ 1 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Folglich muß in jeder arithmetischen Progression die Summe des ersten und letzten Glieds eben so groß seyn, als die Summe je zweyer andern Glieder, die von dem ersten und letzten gleich weit entfernt sind.

Schreibt man also unter eine arithmetische Progression dieselbe Progression rückwärts, und addirt alsdann die untereinander stehenden Glieder, so ist die

Summe des ersten Paares, die Summe des ersten und letzten Glieds der Reihe, die Summen aller übrigen Paare aber sind Summen je zweyer Glieder, die von dem ersten und letzten gleichweit entfernt sind, und sind mithin, nach dem vorigen, alle einander gleich; addirt man also alle diese Partialsummen, so muß eben das heraus kommen, was heraus kommt, wenn man eine derselben, also die Summe des ersten und letzten Glieds, welcher sie alle gleich sind, so vielmal nimmt, als die Anzahl aller beträgt, das heißt als die Reihe überhaupt Glieder hat. Aber durch die Addition aller dieser Partialsummen erhält man offenbar die doppelte Summe der ganzen Reihe, weil jedes Glied der Reihe unter denselben zweymal vorkommt; um also die einfache Summe der Reihe zu finden, muß man die Summe aller dieser Partialsummen, oder, welches einerley ist, das Product, welches man erhält, wenn man die Summe des ersten und letzten Glieds mit der Anzahl aller Glieder multiplicirt, noch mit 2 dividiren.

Und hieraus fließt dann die Regel: Um die Summe einer arithmetischen Reihe zu finden, multiplicire man die Summe des ersten und letzten Glieds mit der Zahl der Glieder, und dividire das Product durch 2, so giebt der Quotient die gesuchte Summe.

Für die Summe der Reihe

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & 14, & 16, & 18, & 20 \end{array}$$

steht demnach die Rechnung also:

$$\begin{array}{r} 20 \\ + 2 \\ \hline 22 \\ 10 \end{array}$$

$$2) 220 \overline{) 110} = \text{Summe der geraden Zahlen von 2 bis mit auf 20.}$$

§. 117.

Wenn man von einer geometrischen Reihe das erste und letzte Glied samt dem Exponenten weiß, so wird es nach folgenden Betrachtungen leicht seyn, aus

diesen drey Stücken die Summe der ganzen Reihe herzuleiten. Es sey die Reihe, deren Summe gesucht wird, 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, die unbekannte Summe bezeichne man vorläufig durch S, so ist also

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$$

Der Exponent dieser Reihe ist 3; multiplicirt man damit die ganze Reihe, so wird daraus

$$3S = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187$$

Nun hat man also ein Vielfaches der gegebenen Reihe, und zwar ein Ebensovielfaches, als in dem Exponenten derselben die Einheit enthalten ist; (hier das Dreyfache). Zieht man daher von diesem Vielfachen die einfache Reihe selbst ab, so erhält man zum Reste $3S - S = 2187 - 1$; oder, welches eben so viel ist, $(3 - 1)S = 3 \times 729 - 1$, das heißt, ein Vielfaches von der Summe der gegebenen Reihe, welches um 1 niedriger ist, als die Zahl der Einheiten in dem Exponenten derselben, oder, die Summe der gegebenen Reihe einmal weniger genommen, als in dem Exponenten derselben die Einheit enthalten ist, ist dem Producte aus dem Exponenten in das letzte Glied der Reihe, nachdem man das erste Glied von demselben (Producte) abgezogen, gleich.

Ist aber ein Vielfaches von der Summe der gegebenen Reihe diesem Producte gleich, so muß offenbar die einfache Summe selbst der ebensoviele Theil dieses Productes seyn, und mithin gefunden werden, wenn man dieses Product, mit der Zahl, welche jenes Vielfache anzeigt, dividirt. Da nun diese Zahl, nach dem Obigen, der um 1 verminderte Exponent ist, so fließt hieraus die Regel:

Um die Summe einer geometrischen Reihe zu finden, multiplicire man das letzte Glied mit dem Exponenten, ziehe von dem Producte das erste Glied ab, und dividire den Rest durch den um 1 verminderten Exponenten.

Zu der obigen Reihe ist demnach

$$S = \frac{3 \times 729 - 1}{2} = \frac{2187 - 1}{2} = \frac{2186}{2} = 1093.$$

Von diesen für die Summirung der arithmetischen und geometrischen Reihen gegebenen Regeln, wird man auch auf fallende Reihen die Anwendung ohne Schwierigkeit machen können, wenn man sich nur der in §. 114. gemachten Bemerkung erinnert, daß jede fallende Reihe als eine steigende betrachtet werden könne, wenn man sie rückwärts liest.

§. 118.

Es kommen in dem gemeinen Leben öfters Fälle vor, wo man bey gewissen Berechnungen Anwendungen der Lehre von den arithmetischen Reihen zu machen hat. Es giebt nämlich gewisse Arbeiten, wobey die Mühe oder die Gefahr immer um etwas zunimmt, je weiter man damit kommt, und folglich auch der Lohn um einen gewissen Unterschied anwächst, so wie die Arbeit um ein gewisses fortrückt.

Aber auch ausser diesen wichtigeren Fällen giebt es noch viele andere, wo es darauf ankommt, die Summe einer arithmetischen oder geometrischen Reihe zu finden. Zur Erläuterung und Bestätigung hievon können folgende Beyspiele dienen.

I. Aufgaben von arithmetischen Reihen.

1te Aufgabe: Ein Brunnen, der auf 34 Ellen tief ausgegraben werden soll, wird also verdingen, daß man die erste Elle mit 20 Kreuzern, die zweyte mit 30 und sofort jede folgende mit 10 Kreuzern mehr, als die vorhergehende zu bezahlen verspricht; es ist die Frage was der ganze Brunnen zu graben kosten werde?

Um diese Frage zu beantworten, muß man die Summe einer arithmetischen Reihe finden, worin das erste Glied = 20, die Differenz = 10, und die Zahl der Glieder = 34 ist; Setzt man diese Progression fort bis auf das 34te Glied, so findet man dieses = 350, und mithin (nach §. 106.) die Summe =

$$\frac{350+20}{2} \times 34 = \frac{370}{2} \times 34 = 370 \times 17 \\ = 6290 \text{ Kreuzer} = 104 \text{ fl. } 50 \text{ Kr.}$$

P

2te Aufgabe: Der Giebel eines Hauses soll mit Dachsteinen gedeckt werden, so daß auf die oberste Latte 2 Steine, auf die zweyte 5, und sofort auf jede folgende 3 mehr zu liegen kommen; wenn nun der Latzen in allem 20 sind, und auf die letzte 59 Steine kommen, so ist die Frage, wie viel Steine man zu dem ganzen Giebel nöthig habe?

In der Progression, deren Summe hier gesucht werden soll, ist das erste Glied = 2, das letzte = 59, die Zahl der Glieder = 20, folglich

$$S = \frac{59+2}{2} \times 20 = \frac{61}{2} \times 20 = 61 \times 10 = 610$$

3te Aufgabe: Die Summe der Glockenschläge von 1 bis 12 Uhr, bey einer Uhr, die nur die vollen Stunden schlägt, anzugeben?

Das erste Glied der Progression ist hier = 1, das letzte Glied und die Zahl der Glieder jedes = 12, demnach $S = \frac{12+1}{2} \times 12 = \frac{13}{2} \times 12 = 13 \times 6 = 78$

4te Aufgabe: Die Summe zu finden, welche Alexander von Macedonien seinen Soldaten für die Erstiegung von Petra Sogdiana bezahlen mußte, wenn man weiß, daß er den ersten Zehn von den dreyhundert Auserlesenen, welche dazu gebraucht wurden, nach der Ordnung wie sie den Gipfel ersteigen würden, folgende Belohnungen versprochen habe: Der erste sollte zehn, der zweyte neun Talente und so fort bis auf den zehnten jeder nachfolgende ein Talent weniger, als der vorhergehende, bekommen. *)

Hier gehören zusammen:

Soldaten: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Talente: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

*) Curtius (VII, 12.) erzählt, Alexander habe gesagt: „Praemium erit ei, qui primus occupaverit verticem, talenta X: uno minus accipiet, qui proximus ei venerit: eademque ad decem homines servabitur portio.“

2te Aufgabe: Die Anzahl der Waizenkörner anzugeben, die dem Erfinder des Schachspiels, Sessa, hätten gegeben werden müssen, um seiner Forderung Genüge zu thun. Er forderte nämlich für das 1te Feld des Schachbretts 1 Körnchen, für das 2te 2, für das 3te 4, und sofort für jedes folgende doppelt so viel als für das vorhergehende.

Da das Schachbrett 64 Felder hat, so hat man hier die Summe einer geometrischen Reihe zu finden, deren erstes Glied = 1, der Exponent = 2, die Zahl der Glieder = 64 ist.

Das 64te oder letzte Glied dieser Reihe findet man kürzer, als durch fortgesetztes Multipliciren, durch ein Verfahren, das im Folgenden bald näher beschrieben werden wird, = 9223372036854775808, und mithin die Summe der ganzen Reihe durch folgende Rechnung:

$$\begin{array}{r} 9223372036854775807 \\ 9223372036854775808 \\ \hline \end{array}$$

$$18446744073709551615 = \text{Summe der Reihe, oder Anzahl der Körner.}$$

Um einen Ueberschlag zu machen, wie viel diese Anzahl Körner nach dem jetzt üblichen Maasse und Gewichte betrage, muß man die beyden letzten Aufgaben bey S. 64. zu Hülfe nehmen. Nach der ersten derselben, oder der vorletzten, gehen auf 1 englischen Scheffel 491520 Waizenkörner. Dividirt man daher mit dieser Zahl die vorhin gefundene Anzahl aller Körner, so erhält man zum Quotienten die Anzahl der Körner in Scheffeln ausgedruckt, sie ist nämlich = 37529996894754 Scheffel.

Wenn man nun setzt, man hätte dem Philosophen täglich 1 Million, also jährlich 365 Millionen Scheffel abliefern wollen, und daher die gefundene Anzahl Scheffel mit 365000000 dividirt, so zeigt der Quotient, daß dennoch 102821 Jahre dazu erfordert worden wären, die ganze Summe abzutragen.

Nach der letzten Aufgabe bey S. 64 gehen auf 1 englische Cubikmeile 137639643428 englische Scheffel;

dividirt man also mit dieser Zahl die oben gefundene Anzahl Scheffel, welche der Anzahl aller Körner gleich ist, so zeigt der Quotient, daß alle diese Körner, wenn sie an einem Orte aufgeschüttet werden könnten, einen Raum von mehr als 272 englischen Cubikmeilen einnehmen würden.

3te Aufgabe: Den Preis eines Pferds zu finden, welches so bezahlt werden sollte, daß man für den ersten Hufnagel einen Kreuzer, für den zweyten zwey Kreuzer und sofort für jeden folgenden doppelt so viel, als für den vorhergehenden gäbe.

Da jedes Hufeisen acht Nägel hat, so ist hier die Summe einer geometrischen Reihe zu finden, deren erstes Glied 1, der Exponent 2 und die Zahl der Glieder 32 ist.

Man findet daher, nach der eben erwähnten Methode, das letzte Glied dieser Reihe = 2147483648 und hieraus die Summe der Reihe durch folgende Rechnung:

$$2147483648$$

$$\underline{2147483647}$$

$$4294967295 = \text{Summe der Reihe, oder Anzahl der Kreuzer, welche, in Gulden ausgedrückt, giebt } 71582788\frac{1}{2} \text{ fl.}$$

§. 119.

In der arithmetischen Reihe ist die Differenz des ersten und letzten Glieds die Differenz der Reihe so vielmal genommen, als die Zahl der Glieder nach dem ersten die Einheit enthält.

Dies wird sogleich einleuchtend seyn, wenn wir nur die Reihe: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 175, 177, 179, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199, 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213, 215, 217, 219, 221, 223, 225, 227, 229, 231, 233, 235, 237, 239, 241, 243, 245, 247, 249, 251, 253, 255, 257, 259, 261, 263, 265, 267, 269, 271, 273, 275, 277, 279, 281, 283, 285, 287, 289, 291, 293, 295, 297, 299, 301, 303, 305, 307, 309, 311, 313, 315, 317, 319, 321, 323, 325, 327, 329, 331, 333, 335, 337, 339, 341, 343, 345, 347, 349, 351, 353, 355, 357, 359, 361, 363, 365, 367, 369, 371, 373, 375, 377, 379, 381, 383, 385, 387, 389, 391, 393, 395, 397, 399, 401, 403, 405, 407, 409, 411, 413, 415, 417, 419, 421, 423, 425, 427, 429, 431, 433, 435, 437, 439, 441, 443, 445, 447, 449, 451, 453, 455, 457, 459, 461, 463, 465, 467, 469, 471, 473, 475, 477, 479, 481, 483, 485, 487, 489, 491, 493, 495, 497, 499, 501, 503, 505, 507, 509, 511, 513, 515, 517, 519, 521, 523, 525, 527, 529, 531, 533, 535, 537, 539, 541, 543, 545, 547, 549, 551, 553, 555, 557, 559, 561, 563, 565, 567, 569, 571, 573, 575, 577, 579, 581, 583, 585, 587, 589, 591, 593, 595, 597, 599, 601, 603, 605, 607, 609, 611, 613, 615, 617, 619, 621, 623, 625, 627, 629, 631, 633, 635, 637, 639, 641, 643, 645, 647, 649, 651, 653, 655, 657, 659, 661, 663, 665, 667, 669, 671, 673, 675, 677, 679, 681, 683, 685, 687, 689, 691, 693, 695, 697, 699, 701, 703, 705, 707, 709, 711, 713, 715, 717, 719, 721, 723, 725, 727, 729, 731, 733, 735, 737, 739, 741, 743, 745, 747, 749, 751, 753, 755, 757, 759, 761, 763, 765, 767, 769, 771, 773, 775, 777, 779, 781, 783, 785, 787, 789, 791, 793, 795, 797, 799, 801, 803, 805, 807, 809, 811, 813, 815, 817, 819, 821, 823, 825, 827, 829, 831, 833, 835, 837, 839, 841, 843, 845, 847, 849, 851, 853, 855, 857, 859, 861, 863, 865, 867, 869, 871, 873, 875, 877, 879, 881, 883, 885, 887, 889, 891, 893, 895, 897, 899, 901, 903, 905, 907, 909, 911, 913, 915, 917, 919, 921, 923, 925, 927, 929, 931, 933, 935, 937, 939, 941, 943, 945, 947, 949, 951, 953, 955, 957, 959, 961, 963, 965, 967, 969, 971, 973, 975, 977, 979, 981, 983, 985, 987, 989, 991, 993, 995, 997, 999, 1001, 1003, 1005, 1007, 1009, 1011, 1013, 1015, 1017, 1019, 1021, 1023, 1025, 1027, 1029, 1031, 1033, 1035, 1037, 1039, 1041, 1043, 1045, 1047, 1049, 1051, 1053, 1055, 1057, 1059, 1061, 1063, 1065, 1067, 1069, 1071, 1073, 1075, 1077, 1079, 1081, 1083, 1085, 1087, 1089, 1091, 1093, 1095, 1097, 1099, 1101, 1103, 1105, 1107, 1109, 1111, 1113, 1115, 1117, 1119, 1121, 1123, 1125, 1127, 1129, 1131, 1133, 1135, 1137, 1139, 1141, 1143, 1145, 1147, 1149, 1151, 1153, 1155, 1157, 1159, 1161, 1163, 1165, 1167, 1169, 1171, 1173, 1175, 1177, 1179, 1181, 1183, 1185, 1187, 1189, 1191, 1193, 1195, 1197, 1199, 1201, 1203, 1205, 1207, 1209, 1211, 1213, 1215, 1217, 1219, 1221, 1223, 1225, 1227, 1229, 1231, 1233, 1235, 1237, 1239, 1241, 1243, 1245, 1247, 1249, 1251, 1253, 1255, 1257, 1259, 1261, 1263, 1265, 1267, 1269, 1271, 1273, 1275, 1277, 1279, 1281, 1283, 1285, 1287, 1289, 1291, 1293, 1295, 1297, 1299, 1301, 1303, 1305, 1307, 1309, 1311, 1313, 1315, 1317, 1319, 1321, 1323, 1325, 1327, 1329, 1331, 1333, 1335, 1337, 1339, 1341, 1343, 1345, 1347, 1349, 1351, 1353, 1355, 1357, 1359, 1361, 1363, 1365, 1367, 1369, 1371, 1373, 1375, 1377, 1379, 1381, 1383, 1385, 1387, 1389, 1391, 1393, 1395, 1397, 1399, 1401, 1403, 1405, 1407, 1409, 1411, 1413, 1415, 1417, 1419, 1421, 1423, 1425, 1427, 1429, 1431, 1433, 1435, 1437, 1439, 1441, 1443, 1445, 1447, 1449, 1451, 1453, 1455, 1457, 1459, 1461, 1463, 1465, 1467, 1469, 1471, 1473, 1475, 1477, 1479, 1481, 1483, 1485, 1487, 1489, 1491, 1493, 1495, 1497, 1499, 1501, 1503, 1505, 1507, 1509, 1511, 1513, 1515, 1517, 1519, 1521, 1523, 1525, 1527, 1529, 1531, 1533, 1535, 1537, 1539, 1541, 1543, 1545, 1547, 1549, 1551, 1553, 1555, 1557, 1559, 1561, 1563, 1565, 1567, 1569, 1571, 1573, 1575, 1577, 1579, 1581, 1583, 1585, 1587, 1589, 1591, 1593, 1595, 1597, 1599, 1601, 1603, 1605, 1607, 1609, 1611, 1613, 1615, 1617, 1619, 1621, 1623, 1625, 1627, 1629, 1631, 1633, 1635, 1637, 1639, 1641, 1643, 1645, 1647, 1649, 1651, 1653, 1655, 1657, 1659, 1661, 1663, 1665, 1667, 1669, 1671, 1673, 1675, 1677, 1679, 1681, 1683, 1685, 1687, 1689, 1691, 1693, 1695, 1697, 1699, 1701, 1703, 1705, 1707, 1709, 1711, 1713, 1715, 1717, 1719, 1721, 1723, 1725, 1727, 1729, 1731, 1733, 1735, 1737, 1739, 1741, 1743, 1745, 1747, 1749, 1751, 1753, 1755, 1757, 1759, 1761, 1763, 1765, 1767, 1769, 1771, 1773, 1775, 1777, 1779, 1781, 1783, 1785, 1787, 1789, 1791, 1793, 1795, 1797, 1799, 1801, 1803, 1805, 1807, 1809, 1811, 1813, 1815, 1817, 1819, 1821, 1823, 1825, 1827, 1829, 1831, 1833, 1835, 1837, 1839, 1841, 1843, 1845, 1847, 1849, 1851, 1853, 1855, 1857, 1859, 1861, 1863, 1865, 1867, 1869, 1871, 1873, 1875, 1877, 1879, 1881, 1883, 1885, 1887, 1889, 1891, 1893, 1895, 1897, 1899, 1901, 1903, 1905, 1907, 1909, 1911, 1913, 1915, 1917, 1919, 1921, 1923, 1925, 1927, 1929, 1931, 1933, 1935, 1937, 1939, 1941, 1943, 1945, 1947, 1949, 1951, 1953, 1955, 1957, 1959, 1961, 1963, 1965, 1967, 1969, 1971, 1973, 1975, 1977, 1979, 1981, 1983, 1985, 1987, 1989, 1991, 1993, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021, 2023, 2025, 2027, 2029, 2031, 2033, 2035, 2037, 2039, 2041, 2043, 2045, 2047, 2049, 2051, 2053, 2055, 2057, 2059, 2061, 2063, 2065, 2067, 2069, 2071, 2073, 2075, 2077, 2079, 2081, 2083, 2085, 2087, 2089, 2091, 2093, 2095, 2097, 2099, 2101, 2103, 2105, 2107, 2109, 2111, 2113, 2115, 2117, 2119, 2121, 2123, 2125, 2127, 2129, 2131, 2133, 2135, 2137, 2139, 2141, 2143, 2145, 2147, 2149, 2151, 2153, 2155, 2157, 2159, 2161, 2163, 2165, 2167, 2169, 2171, 2173, 2175, 2177, 2179, 2181, 2183, 2185, 2187, 2189, 2191, 2193, 2195, 2197, 2199, 2201, 2203, 2205, 2207, 2209, 2211, 2213, 2215, 2217, 2219, 2221, 2223, 2225, 2227, 2229, 2231, 2233, 2235, 2237, 2239, 2241, 2243, 2245, 2247, 2249, 2251, 2253, 2255, 2257, 2259, 2261, 2263, 2265, 2267, 2269, 2271, 2273, 2275, 2277, 2279, 2281, 2283, 2285, 2287, 2289, 2291, 2293, 2295, 2297, 2299, 2301, 2303, 2305, 2307, 2309, 2311, 2313, 2315, 2317, 2319, 2321, 2323, 2325, 2327, 2329, 2331, 2333, 2335, 2337, 2339, 2341, 2343, 2345, 2347, 2349, 2351, 2353, 2355, 2357, 2359, 2361, 2363, 2365, 2367, 2369, 2371, 2373, 2375, 2377, 2379, 2381, 2383, 2385, 2387, 2389, 2391, 2393, 2395, 2397, 2399, 2401, 2403, 2405, 2407, 2409, 2411, 2413, 2415, 2417, 2419, 2421, 2423, 2425, 2427, 2429, 2431, 2433, 2435, 2437, 2439, 2441, 2443, 2445, 2447, 2449, 2451, 2453, 2455, 2457, 2459, 2461, 2463, 2465, 2467, 2469, 2471, 2473, 2475, 2477, 2479, 2481, 2483, 2485, 2487, 2489, 2491, 2493, 2495, 2497, 2499, 2501, 2503, 2505, 2507, 2509, 2511, 2513, 2515, 2517, 2519, 2521, 2523, 2525, 2527, 2529, 2531, 2533, 2535, 2537, 2539, 2541, 2543, 2545, 2547, 2549, 2551, 2553, 2555, 2557, 2559, 2561, 2563, 2565, 2567, 2569, 2571, 2573, 2575, 2577, 2579, 2581, 2583, 2585, 2587, 2589, 2591, 2593, 2595, 2597, 2599, 2601, 2603, 2605, 2607, 2609, 2611, 2613, 2615, 2617, 2619, 2621, 2623, 2625, 2627, 2629, 2631, 2633, 2635, 2637, 2639, 2641, 2643, 2645, 2647, 2649, 2651, 2653, 2655, 2657, 2659, 2661, 2663, 2665, 2667, 2669, 2671, 2673, 2675, 2677, 2679, 2681, 2683, 2685, 2687, 2689, 2691, 2693, 2695, 2697, 2699, 2701, 2703, 2705, 2707, 2709, 2711, 2713, 2715, 2717, 2719, 2721, 2723, 2725, 2727, 2729, 2731, 2733, 2735, 2737, 2739, 2741, 2743, 2745, 2747, 2749, 2751, 2753, 2755, 2757, 2759, 2761, 2763, 2765, 2767, 2769, 2771, 2773, 2775, 2777, 2779, 2781, 2783, 2785, 2787, 2789, 2791, 2793, 2795, 2797, 2799, 2801, 2803, 2805, 2807, 2809, 2811, 2813, 2815, 2817, 2819, 2821, 2823, 2825, 2827, 2829, 2831, 2833, 2835, 2837, 2839, 2841, 2843, 2845, 2847, 2849, 2851, 2853, 2855, 2857, 2859, 2861, 2863, 2865, 2867, 2869, 2871, 2873, 2875, 2877, 2879, 2881, 2883, 2885, 2887, 2889, 2891, 2893, 2895, 2897, 2899, 2901, 2903, 2905, 2907, 2909, 2911, 2913, 2915, 2917, 2919, 2921, 2923, 2925, 2927, 2929, 2931, 2933, 2935, 2937, 2939, 2941, 2943, 2945, 2947, 2949, 2951, 2953, 2955, 2957, 2959, 2961, 2963, 2965, 2967, 2969, 2971, 2973, 2975, 2977, 2979, 2981, 2983, 2985, 2987, 2989, 2991, 2993, 2995, 2997, 2999, 3001, 3003, 3005, 3007, 3009, 3011, 3013, 3015, 3017, 3019, 3021, 3023, 3025, 3027, 3029, 3031, 3033, 3035, 3037, 3039, 3041, 3043, 3045, 3047, 3049, 3051, 3053, 3055, 3057, 3059, 3061, 3063, 3065, 3067, 3069, 3071, 3073, 3075, 3077, 3079, 3081, 3083, 3085, 3087, 3089, 3091, 3093, 3095, 3097, 3099, 3101, 3103, 3105, 3107, 3109, 3111, 3113, 3115, 3117, 3119, 3121, 3123, 3125, 3127, 3129, 3131, 3133, 3135, 3137, 3139, 3141, 3143, 3145, 3147, 3149, 3151, 3153, 3155, 3157, 3159, 3161, 3163, 3165, 3167, 3169, 3171, 3173, 3175, 3177, 3179, 3181, 3183, 3185, 3187, 3189, 3191, 3193, 3195, 3197, 3199, 3201, 3203, 3205, 3207, 3209, 3211, 3213, 3215, 3217, 3219, 3221, 3223, 3225, 3227, 3229, 3231, 3233, 3235, 3237, 3239, 3241, 3243, 3245, 3247, 3249, 3251, 3253, 3255, 3257, 3259, 3261, 3263, 3265, 3267, 3269, 3271, 3273, 3275, 3277, 3279, 3281, 3283, 3285, 3287, 3289, 3291, 3293, 3295, 3297, 3299, 3301, 3303, 3305, 3307, 3309, 3311, 3313, 3315, 3317, 3319, 3321, 3323, 3325, 3327, 3329, 3331, 3333, 3335, 3337, 3339, 3341, 3343, 3345, 3347, 3349, 3351, 3353, 3355, 3357, 3359, 3361, 3363, 3365, 3367, 3369, 3371, 3373, 3375, 3377, 3379, 3381, 3383, 3385, 3387, 3389, 3391, 3393, 3395, 3397, 3399, 3401, 3403, 3405, 3407, 3409, 3411, 3413, 3415, 3417, 3419, 3421, 3423, 3425, 3427, 3429, 3431, 3433, 3435, 3437, 3439, 3441, 3443, 3445, 3447, 3449, 3451, 3453, 3455, 3457, 3459, 3461, 3463, 3465, 3467, 3469, 3471, 3473, 3475, 3477, 3479, 3481, 3483, 3485, 3487, 3489, 3491, 3493, 3495, 3497, 3499, 3501, 3503, 3505, 3507, 3509, 3511, 3513, 3515, 3517, 3519, 3521, 3523, 3525, 3527, 3529, 3531, 3533, 3535, 3537, 3539, 3541, 3543, 3545, 3547, 3549, 3551, 3553, 3555, 3557, 3559, 3561, 3563, 3565, 3567, 3569, 3571, 3573, 3575, 3577, 3579, 3581, 3583, 3585, 3587, 3589, 3591, 3593, 3595, 3597, 3599, 3601, 3603, 3605, 3607, 3609, 3611, 3613, 3615, 3617, 3619, 3621, 3623, 3625, 3627, 3629, 3631, 3633, 3635, 3637, 3639, 3641, 3643, 3645, 3647, 3649, 3651, 3653, 3655, 3657, 3659, 3661, 3663, 3665, 3667, 3669, 3671, 3673, 3675, 3677, 3679, 3681, 3683, 3685, 3687, 3689, 3691, 3693, 3695, 3697, 3699, 3701, 3703, 3705, 3707, 3709, 3711, 3713, 3715, 3717, 3719, 3721, 3723, 3725, 3727, 3729, 3731, 3733, 3735, 3737, 3739, 3741, 3743, 3745, 3747, 3749, 3751, 3753, 3755, 3757, 3759, 3761, 3763, 3765, 3767, 3769, 3771, 3773, 3775, 3777, 3779, 3781, 3783, 3785, 3787, 3789, 3791, 3793, 3795, 3797, 3799, 3801, 3803, 3805, 3807, 3809, 3811, 3813, 3815, 3817, 3819, 3821, 3823, 3825, 3827, 3829, 3831, 3833, 3835, 3837, 3839, 3841, 3843, 3845, 3847, 3849, 3851, 3853, 3855, 3857, 3859, 3861, 3863, 3865, 3867, 3869, 3871, 3873, 3875, 3877, 3879, 3881, 3883, 3885, 3887, 3889, 3891, 3893, 3895, 3897, 3899, 3901, 3903, 3905, 3907, 3909, 3911, 3913, 3915, 3917, 3919, 3921, 3923, 3925, 3927, 3929, 3931, 3933, 3935, 3937, 3939, 3941, 3943, 3945, 3947, 3949, 3951, 3953, 3955, 3957, 3959, 3961, 3963, 3965, 3967, 3969, 3971, 3973, 3975, 3977, 3979, 3981, 3983, 3985, 3987, 3989, 3991, 3993, 3995, 3997, 3999, 4001, 4003, 4005, 4007, 4009, 4011, 4013, 4015, 4017, 4019, 4021, 4023, 4025, 4027, 4029, 4031, 4033, 4035, 4037, 4039, 4041, 4043, 4045, 4047, 4049, 4051, 4053, 405

Betrachtet man diese Reihe so, wie sie da steht, so fällt es sogleich in die Augen, daß jedes Glied derselben aus dem vorhergehenden, und der Differenz besteht; z. B. das vierte aus dem dritten und der Differenz, das dritte aus dem zweyten und der Differenz, das zweyte aus dem ersten und der Differenz. Da sich nun solchergestalt alle vorhergehenden Glieder endlich auf das erste zurückführen lassen, zu welchem in jedem nachfolgenden Gliede die Differenz einmal weiter hinzukommt, nämlich zum ersten unter den nachfolgenden, oder zum zweyten Gliede der Reihe, einmal, zum zweyten unter den nachfolgenden, oder zum dritten der Reihe zweymal u. s. w., so besteht eigentlich jedes Glied der Reihe aus dem ersten, und der Differenz so vielmal genommen, als die Zahl, welche seine Stelle nach dem ersten anzeigt, die Einheit enthält, und mithin besteht das letzte Glied der Reihe aus dem ersten und der Differenz so vielmal genommen, als die Zahl aller Glieder nach dem ersten die Einheit enthält.

Zieht man daher von dem letzten Gliede das erste ab, so muß die Differenz der Glieder so vielmal genommen, als die Zahl der Glieder nach dem ersten die Einheit enthält, übrig bleiben. Folglich ist in der arithmetischen Reihe u. s. w.

§. 120.

In der geometrischen Reihe ist der Exponent des Verhältnisses zwischen dem ersten und letzten Gliede die sovielfte Potenz des Exponenten der Reihe, als die Zahl der Glieder nach dem ersten anzeigt.

Schreibt man die Reihe: 1, 2, 4, 8, 16, 32 u. u. folgendermaßen:

$$\begin{array}{c}
 1, \left\{ \begin{array}{c} 1 \times 2 \\ 2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 1 \times 2 \times 2 \\ 4 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 1 \times 2 \times 2 \times 2 \\ 8 \end{array} \right\}, \\
 \left\{ \begin{array}{c} 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ 16 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ 32 \end{array} \right\} \\
 \text{u. u.}
 \end{array}$$

so sieht man sogleich, daß jedes Glied derselben ein Product aus dem vorhergehenden in den Exponenten der Reihe ist, z. B. das vierte ein Product aus dem dritten in den Exponenten, das dritte ein Product aus dem zweyten in den Exponenten, das zweyte ein Product aus dem ersten in den Exponenten. Da sich nun solchergestalt alle vorhergehenden Glieder am Ende auf das erste zurückführen lassen, zu welchem in jedem folgenden Gliede der Exponent einmal weiter als Factor hinzukommt, nämlich im ersten unter den nachfolgenden, oder im zweyten Gliede der Reihe einmal, im zweyten unter den nachfolgenden, oder im dritten Gliede der Reihe zweymal (als Factor) oder seine zweyte Potenz u. s. w., so ist eigentlich jedes Glied der Reihe ein Product aus dem ersten, und einer eben so hohen Potenz des Exponenten, als die Zahl, welche seine Stelle nach dem ersten anzeigt, die Einheit enthält. Das letzte Glied der Reihe ist demnach ein Product aus dem ersten in eine eben so hohe Potenz des Exponenten der Reihe, als die Zahl aller Glieder nach dem ersten die Einheit enthält. Da man nun (nach §. 42.) durch die Division einer Größe mit einer andern den Exponenten des geometrischen Verhältnisses beyder Größen findet, und da man, wenn man ein Product mit einem seiner Factoren dividirt, zum Quotienten den andern Factor erhält, so ist, wenn man das letzte Glied einer geometrischen Reihe mit dem ersten dividirt, der Quotient die ebensovieleste Potenz des Exponenten der Reihe, als die Zahl der Glieder nach dem ersten die Einheit enthält, und dieser Quotient ist der Exponent des Verhältnisses des ersten Glieds zum letzten. Folglich ist in der geometrischen Reihe u. s. w.

§. 121.

In der arithmetischen Reihe haben je zwey Glieder, die gleichweit von einander abstehen, einerley arithmetisches Verhältniß; und umgekehrt: wenn zwey Glieder dasselbe arithmetische Verhältniß haben, wie zwey andere, so stehen jene eben so weit von einander ab, als diese.

Denn da (nach §. 119.) jedes Glied der arithmetischen Reihe aus dem ersten und der Differenz so viel-

mal genommen, als die Zahl seiner Stelle nach dem ersten anzeigt, besteht, und mithin die Differenz in jedem nachfolgenden Gliede einmal weiter enthalten ist, als im vorhergehenden, so sind je zwey Glieder der arithmetischen Reihe, die gleichweit von einander abstehen, um gleiche Vielfache der Differenz unterscheiden, oder ihre Differenzen sind gleiche Vielfache von der Differenz der Reihe, folglich einander gleich, und mithin ist es auch ihr arithmetisches Verhältniß, das durch diese bestimmt wird. (§. 42.)

Es ist leicht, für den umgekehrten Satz diese Schlüsse umzukehren.

Zum Beispiele können die Glieder 5 und 13, 9 und 17 der Reihe in §. 119. dienen.

§. 122.

In einer geometrischen Reihe haben je zwey Glieder, die gleichweit von einander abstehen, einerley geometrisches Verhältniß; und umgekehrt: wenn zwey Glieder einerley geometrisches Verhältniß haben, wie zwey andere, so stehen jene so weit von einander ab, als diese.

Denn da (nach §. 120.) jedes Glied der geometrischen Reihe ein Product aus dem ersten Gliede in eine eben so hohe Potenz des Exponenten ist, als die Zahl seiner Stelle nach dem ersten anzeigt, und mithin in jedem nachfolgenden Gliede der Exponent einmal weiter als Factor, oder eine um 1 höhere Potenz desselben vorkommt, als im vorhergehenden, so sind die Exponenten der Verhältnisse je zweyer Glieder, die gleichweit von einander abstehen, gleiche Potenzen von dem Exponenten der Reihe, folglich einander gleich, und mithin sind es auch die Verhältnisse, die durch diese bestimmt werden.

Für den umgekehrten Satz ist der Beweis leicht aus diesem herzuleiten.

Zum Beispiele nehme man die Glieder 2 und 16; 4 und 32 der Reihe in §. 120.

§. 123.

Aus den beyden vorigen §. §. folgt nun, daß wenn man eine arithmetische und eine geometrische Reihe zusammenstellt, und die Glieder, welche in beyden einerley Stelle haben, als zusammengehörige betrachtet, die Glieder der geometrischen Reihe geometrisch proportionirt seyen, wenn die mit ihnen zusammengehörigen Glieder der arithmetischen Reihe arithmetisch proportionirt sind, und daß umgekehrt die Glieder der arithmetischen Reihe arithmetisch proportionirt seyen, wenn die ihnen zugehörigen Glieder der geometrischen Reihe geometrisch proportionirt sind.

Man verbinde z. B. eine arithmetische und eine geometrische Reihe folgendermaßen miteinander,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 u. u.

so ist in jener $1 - 4 = 5 - 8$; und in dieser $2 : 16 = 32 : 256$.

Ferner giebt jede Zahl der arithmetischen Reihe die Potenz an, auf welche der Exponent der geometrischen Reihe erhoben werden muß, um den Exponenten des Verhältnisses zwischen 1 und dem zu jener Zahl gehörigen Gliede der geometrischen Reihe zu erhalten, oder, welches einerley ist, sie giebt an, aus wie vielen einfachen Verhältnissen, jedes so groß als das Verhältniß des ersten Glieds zum zweyten, das Verhältniß zwischen dem ersten und dem zu jener Zahl gehörigen Gliede der geometrischen Reihe zusammengesetzt se. (§. 57.) Z. B. die Zahl 6 zeigt an, daß das Verhältniß $1 : 64$ die sechste Potenz des Exponenten 2 der geometrischen Reihe zum Exponenten habe; oder, daß das Verhältniß $1 : 64$ aus sechs einfachen Verhältnissen, jedes so groß als das Verhältniß $1 : 2$ zusammengesetzt sey, also:

$$2 : 64 = \left\{ \begin{array}{l} 1 : 2 \\ 2 : 4 \\ 4 : 8 \\ 8 : 16 \\ 16 : 32 \\ 32 : 64 \end{array} \right\}$$

Endlich zeigt auch der Unterschied zweyer Zahlen der arithmetischen Reihe die Potenz des Exponenten der geometrischen Reihe an, welche der Exponent des Verhältnisses der mit jenen Zahlen zusammengehörigen Glieder der geometrischen Reihe ist, oder, was eben so viel ist, die Differenz zweyer Zahlen der arithmetischen Reihe zeigt an, aus wie vielen einfachen Verhältnissen, jedes so groß, als das Verhältniß des ersten Glieds zum zweyten, das Verhältniß der zu jenen Zahlen gehörigen Glieder der geometrischen Reihe zusammengesetzt ist. Z. B. 5, als der Unterschied der Zahlen 3 und 8 zeigt an, daß das Verhältniß 8 : 256 die fünfte Potenz des Exponenten 2 der geometrischen Reihe zum Exponenten habe, und mithin dem Verhältnisse 1 : 32 gleich sey, oder daß das Verhältniß 8 : 256 aus fünf einfachen Verhältnissen, jedes so groß, als das Verhältniß 1 : 2, zusammengesetzt sey: also:

$$8 : 256 = 1 : 32 = \left\{ \begin{array}{l} 1 : 2 \\ 2 : 4 \\ 4 : 8 \\ 8 : 16 \\ 16 : 32 \end{array} \right\}$$

Und eben aus dieser Ursache heißen die Zahlen der arithmetischen Reihe die Logarithmen (von λογαν *logon*) d. h. Verhältnißzähler der mit ihnen zusammengehörigen Zahlen der geometrischen Reihe.

§. 124.

Man sieht indessen bald, daß alle Vortheile, die man sich etwa von einer solchen Verbindung einer arithmetischen und geometrischen Reihe für den Gebrauch versprechen dürfte, eben nicht weit reichen würden, so lange diese Reihen die Gestalt behielten, unter welcher wir sie im vorigen §. aufgeführt haben. Denn da die geometrische Reihe sehr schnell anwächst, und ihre Lücken sich immer mehr und mehr erweitern, je weiter sie fortgesetzt wird, so vermißt man in derselben immer mehrere von den Zahlen, die in Rechnungen am häufigsten vorkommen; und für alle Zahlen, die in der geometrischen Reihe nicht stehen, hat auch die arithmes-

tische keine Logarithmen. Man gedente sich aber nun zwischen je zwey Gliedern der arithmetischen Reihe eine mittlere arithmetische, und zwischen je zwey Gliedern der geometrischen Reihe eine mittlere geometrische Proportionalzahl, so hat man eine aus den Hauptreihen durch Einschalten entstandene neue arithmetische und geometrische Reihe. In jener ist die Differenz die Hälfte von der Differenz der Hauptreihe, in dieser ist der Exponent die Quadratwurzel aus dem Exponenten der Hauptreihe. Wiederholt man nun bey diesen neuen Reihen das nämliche Verfahren, und setzt man solches so lange fort, bis man in der geometrischen Reihe alle ganze Zahlen von 1 bis etwa auf 10000 oder noch weiter, mit einem gewissen Grade von Genauigkeit, findet, so erhält man, wenn man aus den berechneten Gliedern der geometrischen Reihe die ganze Zahlen, und solche, die man wegen eines unmerklichen Fehlers dafür annehmen kann, herauszieht, und jeder ihren zugehörigen Logarithmen neben beschreibt, einen logarithmischen Canon, dessen großen Nutzen bey vielen Berechnungen wir bald durch einige Beispiele werden kennen lernen.

§. 125.

Die Verbindung einer arithmetischen und geometrischen Reihe, in welchen man aber zwischen je zwey Gliedern eine unbestimmt große Anzahl Mittelglieder gedanken muß, heißt ein logarithmisches System. Die geometrische Reihe fängt allemal mit 1, und die arithmetische mit 0 an. Das zweyte Glied der geometrischen Hauptreihe, dessen Logarithmus = 1 gesetzt wird, heißt die Grundzahl des Systems, weil durch sie das ganze System bestimmt wird (§. 123). Da nun dieses Glied ganz willkürlich ist, so lassen sich unzählig viele logarithmische Systeme denken. Unter allen aber vereinigt das sogenannte gemeine logarithmische System in Absicht auf den Gebrauch die meisten Vorzüge in sich. Mit diesem Namen bezeichnet man folgendes:

0,	1,	2,	3,	4,	5 u.
1,	10,	100,	1000,	10000,	100000 u.

Die zwischen je zwey Glieder dieser beyden Hauptreihen hineinfallenden zusammengehörigen mittleren

Proportionalglieder hat man auf dem im vorigen §. beschriebenen höchst mühsamen Wege bis auf die zehnte Decimalstelle gefunden und in großen Tafeln neben einander verzeichnet, welche solchergestalt die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 101000 enthalten. Aus diesen wurden in der Folge die kleineren abgekürzten Tafeln gezogen, in welchen die Logarithmen nur bis zur siebenten Decimalstelle, und nur für die ganzen Zahlen von 1 bis 10000 zu finden sind.

§. 126.

Da (nach dem vorigen §.) in dem gemeinen logarithmischen Systeme alle Glieder der geometrischen Hauptreihe Potenzen der Zahl 10, d. h. Einheiten höherer Ordnungen sind, und da der Log. von $1 = 0$, der Log. von $10 = 1$, der Log. von $100 = 2$, der Log. von $1000 = 3$ ist u. s. w. so enthält der Logarithmus eines jeden Glieds der Hauptreihe eben so viele Einheiten, als die Zahl, welche die Ordnung dieses Glieds unter den höheren bezeichnet. Da ferner der Logarithmus von $1 = 0$, und der Logarithmus von $10 = 1$ ist, so müssen die Logarithmen aller Zahlen zwischen 1 und 10 größer als 0, und kleiner als 1, folglich Brüche von der Form $0, \dots\dots\dots$ seyn. Aus gleichem Grunde müssen die Logarithmen aller Zahlen zwischen 10 und 100 größer als 1, und kleiner als 2, folglich Brüche von der Form $1, \dots\dots\dots$, die Logarithmen aller Zahlen zwischen 100 und 1000 größer als 2, und kleiner als 3, folglich Brüche von der Form $2, \dots\dots\dots$ seyn, u. s. w.

Demnach sind also in dem gemeinen logarithmischen Systeme die Logarithmen aller Zahlen, welche zwischen zwey nächste Glieder der Hauptreihe fallen, gemischte, d. h. aus ganzen Zahlen und Decimalbrüchen bestehende Ausdrücke, die sich mit der Zahl anfangen, welche der Logarithmus des nächstvorhergehenden Glieds der Hauptreihe, und mithin immer so groß ist, als die Anzahl der Ziffern vor den Einern, oder der Ziffern von den höheren Ordnungen, in der dem Logarithmen zugehörigen Zahl. Weil man solchergestalt an dieser Zahl sogleich erkennen kann, zwischen welche zwey

Glieder der Hauptreihe die einem gegebenen Logarithmen zugehörige Zahl falle, so hat man sie die Kennziffer oder Charakteristik genannt. Die der Kennziffer anhangenden Decimalziffern führen den Namen Mantisse oder Zugabe, und zeigen an, das wievielte Glied der eingeschalteten Reihe die dem Logarithmen zugehörige Zahl sey. Z. B. wenn man 999 Glieder zwischen den zwey nächsten Gliedern der Hauptreihe, 1000 und 10000 einschaltet, so ist 8492 das 929ste derselben so nahe, daß an der völligen Schärfe nur 1 Hunderttausendtheilchen fehlt.

§. 127.

Wenn man die beyden Hauptreihen des gemeinen logarithmischen Systems (§. 125.) rückwärts fortsetzt, so kommt man nach (§. 114.) auf folgende Reihen, welche von der Rechten gegen die Linke zu gelesen werden müssen:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{10.} & \text{10.} & - & 6, & - & 5, & - & 4, & - & 3, & - & 2, & - & 1 \\ \text{10.} & \text{10.} & & \frac{1}{10000000}, & & \frac{1}{1000000}, & & \frac{1}{100000}, & & \frac{1}{10000}, & & \frac{1}{1000}, & & \frac{1}{100} \end{array}$$

Demnach sind alle Glieder der rückwärts fortgesetzten geometrischen Hauptreihe Brüche, deren Zähler die Einheit, und deren Nenner Potenzen der Zahl 10 d. h. Einheiten höherer Ordnungen sind; mithin sind diese Brüche selbst Einheiten niedrigerer Ordnungen. (§. 83.) Da nun der Logarithme von $\frac{1}{10} = -1$, der Logarithme von $\frac{1}{100} = -2$, der Logarithme von $\frac{1}{1000} = -3$ ist, u. s. w. so enthält der Logarithme eines jeden Glieds der rückwärts über das erste Glied hinaus fortgesetzten Hauptreihe eben so viele negative Einheiten, als die Zahl, welche die Ordnung des Nenners dieses Glieds unter den höheren bezeichnet, positive Einheiten enthält.

Da ferner der Logarithme von $1 = 0$, und der Logarithme von $\frac{1}{10} = -1$ ist, so müssen die Logarithmen aller zwischen 1 und $\frac{1}{10}$ fallenden Brüche, zwischen 0 und -1 fallen, folglich Brüche von der Form $-0, \dots$ seyn. Aus gleichem Grunde müssen die Logarithmen aller zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{100}$ fallenden Brüche, zwischen -1 und -2 , die Logarith-

men aller zwischen $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{1000}$ fallenden Brüche, zwischen -2 und -3 fallen, und mithin die ersteren die Form $-1, \dots$, die letzteren hingegen die Form $-2, \dots$ haben. Demnach sind also in dem gemeinen logarithmischen Systeme die Logarithmen aller Brüche, welche zwischen zwey nächste Glieder der (rückwärts fortgesetzten) Hauptreihe fallen, negative gemischte Ausdrücke, die sich mit der Zahl anfangen, welche der Logarithme des nächstvorhergehenden Glieds der Hauptreihe, und mithin immer so groß ist, als die Zahl, welche die Ordnung der höchsten Ziffer im Nenner des dem Logarithmen zugehörigen Bruchs anzeigt.

§. 128.

Aus den beyden vorigen §§. fließen nun folgende Sätze:

- I. Die Decimalbrüche haben mit den ihnen correspondirenden ganzen Decimalzahlen einerley Logarithmen, nur mit dem negativen Zeichen. Z. B. man drücke den Logarithmen einer Zahl durch das ihr vorgesetzte Zeichen Log. aus, so ist

$$\text{Log. } 100 = 2; \text{ Log. } 0,01 = -2$$

$$\text{Log. } 1000 = 3; \text{ Log. } 0,001 = -3 \text{ u. s. w.}$$

- II. Der Logarithme eines jeden Glieds der Hauptreihe enthält eben so viele positive oder negative Einheiten, als in diesem Gliede Nullen nach oder vor der Einheit stehen; und umgekehrt, in jedem Gliede der Hauptreihe stehen eben so viele Nullen nach oder vor der Einheit, als der zu diesem Gliede gehörige Logarithme positive oder negative Einheiten enthält. Hiebey wird vorausgesetzt, daß die Glieder der rückwärts fortgesetzten Hauptreihe, deren Logarithmen (nach dem vorigen §.) negativ sind, in Decimalbrüchen ausgedrückt seyen. Z. B.

$$\text{Log. } 100000 = 5; \text{ Log. } 0,00001 = -5$$

oder umgekehrt:

$$5 = \text{Log. } 100000; -5 = \text{Log. } 0,00001$$

- III. Die Kennziffer des Logarithmen einer jeden Zahl wird durch die Ordnung der höchsten Ziffer dieser

Zahl, und umgekehrt, die Ordnung der höchsten Ziffer einer jeden Zahl wird durch die Kennziffer des zu ihr gehörigen Logarithmen bestimmt. Z. B.

In der Zahl 53792,846 ist die höchste Ziffer (5) von der vierten höheren Ordnung, daher die Kennziffer des zu dieser Zahl gehörigen Logarithmen = 4.

In der Zahl 0,0000642 ist die höchste Ziffer (6) von der fünften niedrigeren Ordnung, daher die Kennziffer des zu ihr gehörigen Logarithmen = — 5.

IV. Jeder Logarithme gehört zu unzählig vielen Zahlen, die zwar alle mit einerley Ziffern geschrieben werden, in welchen aber die höchste Ziffer immer von einer andern Ordnung ist, wenn nur, nach Maßgabe dieser Veränderung auch seine Kennziffer abgeändert wird. Z. B. zu den Zahlen 6354; 635,4; 63,54; 6,354; 0,6354; 0,06354; 0,006354 u. s. w. gehört einerley Logarithme, nur daß seine Kennziffer nach der Ordnung dieser Zahlen 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3 wird. Auch umgekehrt gilt dieser Satz, wie die vorigen.

§. 129.

Da (nach §. 123.) die Logarithmen arithmetisch proportionirt sind, wenn die ihnen zugehörigen Zahlen geometrisch proportionirt sind; und da (nach §. 145.) in der arithmetischen Proportion das vierte Glied der um das erste Glied verminderten Summe der beyden mittleren gleich ist; so findet man den Logarithmen des vierten Glieds einer geometrischen Proportion, wenn man die Logarithmen des zweyten und dritten addirt, und von dieser Summe den Logarithmen des ersten Glieds abzieht. Sucht man hierauf den gefundenen Logarithmen in der arithmetischen Reihe auf, so steht neben ihm in der geometrischen Reihe das zu ihm gehörige vierte Glied der geometrischen Proportion.

Hieraus folgt also, daß man die Logarithmen in allen Fällen gebrauchen könne, in welchen man die Regel de Tri anzuwenden pflegt. Da man nun ein Product als die vierte Proportionalzahl zu 1 und

zu den beyden Factoren, einen Quotienten hingegen als die vierte Proportionalzahl zum Divisor, Dividendus und zu 1 ansehen kann; so ist also der Logarithme eines Products die Summe der Logarithmen der Factoren, und der Logarithme eines Quotienten die Differenz der Logarithmen des Divisors und Dividendus; denn der Logarithme von 1 wird immer $= 0$ gesetzt, weil die 0 bey dem Addiren und Subtrahiren eben so wenig eine Veränderung macht, als 1 bey dem Multipliciren und Dividiren. Hieraus erhellet also, wie die Logarithmen das Multipliciren in ein Addiren, und das Dividiren in ein Subtrahiren verwandeln. Da ferner (nach S. 94.) das Quadrat ein Product aus zwey gleichen Factoren, der Cubus ein Product aus drey gleichen Factoren ist, so ist der Logarithme eines Quadrats das Doppelte, der Logarithme eines Cubus das Dreyfache von dem Logarithmen der Wurzel, und folglich umgekehrt der Logarithme der Quadratwurzel die Hälfte von dem Logarithmen des Quadrats, und der Logarithme der Cubikwurzel ein Drittheil vom Logarithmen des Cubus. Da nun dieselben Gründe auf ähnliche Art bey allen höheren Potenzen und Wurzeln Statt finden, so erhält man im Allgemeinen den Logarithmen einer Potenz von jedem beliebigen Grade, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt, und man erhält den Logarithmen einer Wurzel von jedem beliebigen Grade, wenn man den Logarithmen der Potenz von dem nämlichen Grade mit dem Exponenten der Wurzel dividirt. So erhellet also, wie die Logarithmen das Erheben auf Potenzen in ein Multipliciren und das Ausziehen der Wurzeln in ein Dividiren verwandeln.

§. 130.

Zur Uebung im Gebrauche der Tafeln können folgende Aufgaben dienen.

I. Aufgabe. Zu drey gegebenen Zahlen 1251, 3753, 2421 die vierte Proportionalzahl mittelst der Logarithmen zu finden.

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } 3753 = 3,5743786 \\
 + \text{Log. } 2421 = 3,3839948 \\
 \hline
 6,9583734 \\
 \text{Log. } 1251 = 3,0972573 \\
 \hline
 3,8611161 = \text{Log. } 7263.
 \end{array}$$

II. Aufgabe. Zwey gegebene Zahlen, 365 und 24, mittelst der Logarithmen in einander zu multiplizieren.

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } 365 = 2,5622929 \\
 + \text{Log. } 24 = 1,3802112 \\
 \hline
 3,9425041 = \text{Log. } 8760.
 \end{array}$$

III. Aufgabe. Zwey gegebene Zahlen 8950 und 358 in einander, die größere nämlich durch die kleinere, mittelst der Logarithmen zu dividiren.

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } 8950 = 3,9518230 \\
 - \text{Log. } 358 = 2,5538830 \\
 \hline
 1,3979400 = \text{Log. } 25.
 \end{array}$$

IV. Aufgabe. Eine gegebene Zahl, 76, logarithmisch in das Quadrat zu erheben.

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } 76 = 1,8808136 \\
 \quad \quad \quad 2 \\
 \hline
 3,7616272 = \text{Log. } 5776.
 \end{array}$$

V. Aufgabe. Aus einer gegebenen Zahl 3364, logarithmisch die Quadratwurzel auszuziehen.

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } 3364 = 3,5268560 \\
 \quad \quad \quad 2 \\
 \hline
 1,7634280 = \text{Log. } 58.
 \end{array}$$

VI. Aufgabe. Eine gegebene Zahl, 17, logarithmisch in den Cubus zu erheben

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } 17 = 1,2304489 \\
 \quad \quad \quad 3 \\
 \hline
 3,6913467 = \text{Log. } 4913.
 \end{array}$$

VII. Aufgabe. Aus einer gegebenen Zahl 9261, logarithmisch die Cubikwurzel auszuziehen.

$$\text{Log. } 9261 = 3,9666579$$

$$\frac{3,9666579}{3} = 1,3222193 = \text{Log. } 21.$$

§. 131.

Wenn ein, bey einer solchen Rechnung gefundener, Logarithme von einem Logarithmen der Tafeln nur in der letzten Decimalziffer unterschieden ist, so darf man ohne Bedenken für den erstern die dem letztern zugehörige Zahl nehmen. Stimmt aber ein Logarithme mit einem Logarithmen der Tafeln nicht in den ersten sechs Decimalziffern überein, sondern weicht von dem letzteren etwa schon in der vierten oder fünften Stelle ab, so ist dies eine Anzeige, daß die solchem Logarithmen zugehörige Zahl von derjenigen, welche dem ihm am nächsten kommenden Logarithmen der Tafeln zugehört, noch um einige Decimalbrüche unterschieden, d. h. größer oder kleiner sey, als jene, je nachdem der gegebene Logarithme größer oder kleiner ist, als der ihm am nächsten kommende Logarithme der Tafeln.

Es wird in der Folge gezeigt werden, wie man auch in solchen Fällen die gesuchte Zahl so genau finden könne, als zu der jedesmaligen Absicht erforderlich ist.

§. 132.

Da (nach §. 17. Nro I.) jeder Bruch als ein Quotient betrachtet werden kann, welcher entsteht, wenn man den Zähler des Bruchs durch seinen Nenner dividirt, so ist vermöge §. 129. der Logarithme eines Bruchs die Differenz, um welche der Logarithme seines Zählers den Logarithmen seines Nenners übertrifft.

Nun sind alle Brüche entweder ächte, oder unächte; und nur bey den letzteren ist der Zähler größer als der Nenner, nur bey diesen übertrifft also auch der Logarithme des Zählers den Logarithmen des Nenners, und der letztere kann folglich vom ersteren abgezogen werden. Bey allen ächten Brüchen hingegen ist der

Zähler kleiner als der Nenner, und mithin wird auch der Logarithme des ersteren vom Logarithmen des letzteren übertroffen. Will man also die Differenz beyder haben, so muß man den Logarithmen des Zählers vom Logarithmen des Nenners abziehen. Weil man nun solchergestalt das Entgegengesetzte von dem thun muß, was man eigentlich (nach S. 129.) thun sollte, um die Differenz der beyden Logarithmen zu bekommen, indem nicht, wie dort vorausgesetzt wird, der Zähler den Nenner übertrifft, sondern umgekehrt der erstere vom letzteren übertroffen wird, so ist dies ein neuer Grund, dem Logarithmen eines achten Bruchs das negative Zeichen vorzusetzen.

Auch mit den Decimalbrüchen müßte man aus denselben Gründen auf dieselbe Art verfahren; man müßte ihnen nämlich den Nenner geben, den die Zahl der vorhandenen Decimalstellen erfordert (S. 83.), so dann vom Logarithmen dieses Nenners den Logarithmen des Zählers abziehen, und der Differenz das negative Zeichen vorsetzen.

Allein, da die Tafeln keine negativen Logarithmen euthalten, und nur für ganze Zahlen berechnet sind, so pflegt man, um jederzeit einen positiven Logarithmen zu erhalten, entweder diese Subtraction bloß anzuzeigen, oder, wenn man sie wirklich verrichten will, dem Zähler einige Einheiten, gewöhnlich 10, zu leihen, hierauf den Logarithmen des Nenners abzuziehen, und dem Reste die geliehenen Einheiten mit dem negativen Zeichen anzuhängen. Eben so verfährt man auch in allen übrigen Fällen, wo bey logarithmischen Rechnungen ein größerer Logarithme von einem kleineren abzuziehen ist. Da man nun dem kleineren Logarithmen so viele Einheiten leihen kann, als man will, indem man sie auf der andern Seite gleich wieder davon wegnimmt, so erhellet hieraus, daß ein solchergestalt ausgedrückter Logarithme unzählige Formen erhalten könne.

3. B.

Man verlangt den Logarithmen von $\frac{7}{8}$; so ist

$$\begin{array}{r} \text{Log. } 8 = 0,9030900 \\ - \text{Log. } 7 = 0,8450980 \\ \hline \text{demnach Log. } \frac{7}{8} = - 0,0579920 \\ \qquad \qquad \qquad 22 \end{array}$$

oder es ist

$$\text{Log. } 7 = 10,8450980 - 10$$

$$- \text{Log. } 8 = \underline{0,9030900}$$

$$\text{mithin Log. } \frac{7}{8} = 9,9420080 - 10$$

Man verlangt den Logarithmen von 0,4458, so ist

$$\text{Log. } 10000 = 4,0000000$$

$$- \text{Log. } 4458 = \underline{3,6491401}$$

$$\text{Log. } 0,4458 = -0,3508599$$

oder

$$\text{Log. } 4458 = 13,6491401 - 10$$

$$- \text{Log. } 10000 = \underline{4,0000000}$$

$$\text{Log. } 0,4458 = 9,6491401 - 10$$

oder

$$\text{Log. } 4458 = 3,6491401$$

$$- \text{Log. } 10000 = \underline{4,0000000}$$

$$\text{Log. } 0,4458 = -1,6491401$$

oder

$$\text{Log. } 4458 = 3,6491401$$

$$- \text{Log. } 10000 = \underline{4,0000000}$$

$$\text{Log. } 0,4458 = 3,6491401 - 4$$

das ist

$$\text{Log. } 0,4458 = 0,6491401 - 1, \text{ u.}$$

$$\text{eben so ist Log. } 0,04458 = 0,6491401 - 2$$

$$\text{Log. } 0,004458 = 0,6491401 - 3 \text{ u. s. w.}$$

Demnach kann man für die Logarithmen der Decimalbrüche auch noch folgende Regel festsetzen:

Der Logarithme eines Decimalbruchs wird gefunden, wenn man den zu den Ziffern desselben, als einer ganzen Zahl betrachtet, gehörigen Logarithmen in den Tafeln aufsucht, diesem zur Kennziffer eine 0 giebt, und ihm hinten so viele Einheiten mit dem negativen Zeichen anhängt, als der gegebene Decimalbruch vorne Nullen hat.

Der Grund davon ist aus §. 127. 128. Nro II. leicht einzusehen.

§. 133.

Da bey Rechnungen, die nur einigermaßen ins Große gehen, nothwendig sehr oft Zahlen vorkommen

müssen, die größer, als 10000 sind, so würde der Gebrauch der gemeinen logarithmischen Tafeln sehr eingeschränkt seyn, wenn man nicht Mittel hätte, zu einer gegebenen Zahl, die nicht mehr in den Tafeln enthalten ist, den zugehörigen Logarithmen, und zu einem Logarithmen, der nicht in den Tafeln enthalten ist, die zugehörige Zahl zu finden. Die Verfahrensart, deren man sich in diesen beyden Fällen zu bedienen hat, um das Gesuchte zu erhalten, ist es also, was wir jetzt kennen lernen müssen, um in den Stand gesetzt zu werden, den Gebrauch der Tafeln, so weit, als es die wesentliche Einrichtung derselben verstattet, zu erweitern.

Hiezu wird uns nun die Bemerkung den Weg bahnen, daß bey großen Zahlen die Differenzen der Logarithmen den Differenzen der ihnen zugehörigen Zahlen beynahe proportionirt sind. 3. B.

$$\text{Log. } 9996 = 3,9998262$$

$$\text{Log. } 9995 = \underline{3,9997828}$$

$$\text{Differenz} = 0,0000434$$

$$\text{Log. } 9997 = 3,9998697$$

$$\text{Log. } 9995 = \underline{3,9997828}$$

$$\text{Differenz} = 0,0000869$$

Eben so ist

$$\text{Log. } 9999 = 3,9999566$$

$$\text{Log. } 9998 = \underline{3,9999131}$$

$$\text{Differenz} = 0,0000435$$

$$\text{Log. } 9999 = 3,9999566$$

$$\text{Log. } 9997 = \underline{3,9998697}$$

$$\text{Differenz} = 0,0000869$$

Nämlich die Differenz der Zahlen 9995 und 9996 ist = 1; die Differenz ihrer Logarithmen = 434; die Differenz der Zahlen 9995 und 9997 ist = 2, die Differenz ihrer Logarithmen = $2 \times 434 + 0,0000001$. Eben so ist die Differenz der Zahlen 9998 und 9999 = 1, die Differenz ihrer Logarithmen = 435; hingegen die Differenz der Zahlen 9999 und 9997 ist = 2, und die Differenz ihrer Logarithmen = $2 \times 435 - 0,0000001$.

Die Differenz der Logarithmen zweyer Zahlen, die um 2 unterschieden sind, ist also beynabe das Doppelte von der Differenz der Logarithmen zweyer Zahlen, die nur um 1 unterschieden sind, indem der Fehler in beyden vorigen Beyspielen nicht mehr, als 1 Zehnmilliontheilchen beträgt, welches das einmal zu viel, das anderemal zu wenig ist. Dies ist zwar freylich nur bey 7 Decimalstellen, bis auf welche die Logarithmen in den kleineren Tafeln berechnet sind, richtig; allein man braucht auch bey den meisten Rechnungen nicht mehrere Decimalstellen der Logarithmen. Folglich kann man bey allen Rechnungen, für welche man sich mit 7 Decimalstellen der Logarithmen begnügen kann, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, annehmen, daß die Differenzen der Logarithmen den Differenzen der Zahlen, zu welchen sie gehören, proportionirt seyen.

§. 134.

Soll demnach zu einer Zahl, die größer, als 10000, aber kleiner, als 10000000 ist, der Logarithme gefunden werden, so verfare man folgendermaßen:

- I. Man schneide von der gegebenen Zahl die ersten vier Ziffern linker Hand ab, und setze den Logarithmen dieser aus den Tafeln heraus.
- II. Nun setze man auch den Logarithmen welcher der um 1 größeren Zahl zugehört, heraus, und ziehe von ihm den kleineren (Nro I.) ab.
- III. Die von der gegebenen Zahl rechter Hand abgeschnittenen Ziffern betrachte man als Decimalstellen, so sind sie folglich nicht $= 1$, sondern einem Bruche gleich, dessen Zähler eben diese Ziffern, und dessen Nenner die Einheit mit so vielen Nullen ist, als die Anzahl dieser Ziffern beträgt (§. 83.).

Da man nun nach Nro II. die Differenz der Logarithmen hat, welche der abgeschnittenen ganzen Zahl, und derjenigen, die um 1 größer ist, als sie, zugehören, so kann man hieraus, vermöge des vorigen §.

diejenige logarithmische Differenz finden, welche dem eben erwähnten Decimalbruche zugehört.

IV. Zu dem Ende setze man folgende Proportion an:

Wie sich verhält 1 (als die Differenz der abgeschnittenen ganzen Zahl und der nächstgrößeren) zu dem abgeschnittenen Decimalbruche, so verhält sich die gefundene logarithmische Differenz (welche der Differenz 1 der ganzen Zahlen zugehört) zu der gesuchten, (welche dem abgeschnittenen Decimalbruche zugehört.)

V. Hat man das vierte Glied dieser Proportion auf die gewöhnliche Art gefunden, so addire man solches zu dem Logarithmen der abgeschnittenen Zahl, so, daß nur gleichnamige Decimalstellen zu gleichnamigen hinzukommen, die aber außer diesen etwa noch übrigen weggelassen werden.

VI. Weil man aber nicht den Logarithmen der abgeschnittenen Zahl mit einem Decimalbruche, sondern den Logarithmen dieser Zahl, als einer ganzen betrachtet, haben will, so müssen zur Kennziffer des nach den bisherigen Vorschriften gefundenen Logarithmen noch so viele Einheiten addirt werden, als man anfänglich Decimalstellen abgeschnitten hat.

Denn soll aus der abgeschnittenen ganzen Zahl mit dem anhängenden Decimalbruche nur eine ganze Zahl werden, so kann dies nur dadurch geschehen, daß man sie mit einer Zahl multiplicirt, welche aus der Einheit mit so vielen angehängten Nullen besteht, als die Anzahl der abgeschnittenen Decimalziffern beträgt, indem eben diese Zahl der Nenner des abgeschnittenen Decimalbruchs ist. Diese Multiplication läßt sich logarithmisch durch die Addition verrichten (§. 129.). Da nun der Logarithmus einer Zahl, die aus der Einheit mit einer gewissen Anzahl Nullen besteht, allemal eine ganze Zahl ist, die so viele Einheiten enthält, als in jener Zahl selbst Nullen nach der Einheit stehen, (§. 127. Nro II.) und da dieser Nullen gerade so viele sind, als in der gegebenen Zahl Decimalstellen abgeschnitten wurden (§. 83.), so ist offenbar, daß man,

um den Logarithmen der gegebenen Zahl als einer ganzen Zahl betrachtet, zu erhalten, zu dem nach den Vorschriften Nro. I bis V gefundenen Logarithmen so viele Einheiten addiren müsse, als man anfänglich in der gegebenen Zahl Decimalstellen abgeschnitten hat. Z. B.

Man verlangt den Logarithmen der Zahl 473842, so ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } 4739 = 3,6756867 \\
 \text{Log. } 4738 = 3,6755951 \\
 \hline
 \text{Log. Differenz} = 0,0000916 \\
 1 : 0,42 = 0,0000916 : G \\
 G = 0,0000916 \times 0,42 = 0,000038472 \\
 \text{Log. } 4738 = 3,6755951 \\
 \quad \quad \quad + 384 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 3,6756335 \\
 \quad \quad \quad + 2 \\
 \hline
 \text{Log. } 473842 = 5,6756335
 \end{array}$$

Für den Logarithmen der Zahl 3567894 stehet die Rechnung also:

$$\begin{array}{r}
 \text{Log. } 3568 = 3,5524248 \\
 \text{Log. } 3567 = 3,5523031 \\
 \hline
 \text{Log. Differenz} = 0,0001217 \\
 1 : 0,894 = 0,0001217 : G \\
 G = 0,0001217 \times 0,894 = 0,0001087998 \\
 \text{Log. } 3567 = 3,5523031 \\
 \quad \quad \quad + 1087 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 3,5524118 \\
 \quad \quad \quad + 3 \\
 \hline
 \text{Log. } 3567894 = 6,5524118
 \end{array}$$

§. 135.

Soll zu einem gegebenen Logarithmen, der sich nicht genau in den Tafeln findet, die zugehörige Zahl gefunden werden, so ist solcher entweder allein in der

Kennziffer, oder allein in den Decimalstellen, oder in beyden zugleich von einem Logarithmen der Tafel unterschieden. Ist der gegebene Logarithme allein in der Kennziffer von einem Logarithmen der Tafeln unterschieden, so hat er entweder eine größere, oder eine kleinere Kennziffer als dieser letztere. Um die einem solchen Logarithmen zugehörige Zahl zu erhalten, muß die Zahl, welche dem in den Decimalstellen mit ihm übereinstimmenden Logarithmen der Tafeln zugehört, mit einer eben so hohen Potenz der Zahl 10 im ersten Falle multiplicirt, im andern dividirt werden, als die Kennziffer des gegebenen Logarithmen entweder mehr oder weniger Einheiten enthält, als die Kennziffer des Logarithmen der Tafeln, der in den Decimalstellen mit dem gegebenen übereinstimmt. Z. B. wenn der Logarithme 7,8835479 gegeben ist, so finden sich seine Decimalziffern genau in den Tafeln unter der Charakteristik 3, und unter dieser Charakteristik gehört dazu die Zahl 7648. Hier aber haben diese Decimalziffern die Kennziffer 7, die um 4 Einheiten größer ist als 3. Folglich muß die Zahl 7648, welche diesen Decimalstellen unter der Kennziffer 3 zugehört, noch mit der vierten Potenz von 10, d. i. mit 10000 multiplicirt werden, und es ist mithin

$$7,8835479 = \text{Log. } 76480000$$

Eben so finden sich die Decimalziffern des Logarithmen 1,6698745 unter der Kennziffer 3, unter welcher die Zahl 4676 dazu gehört. Da nun die Kennziffer 1 um 2 Einheiten kleiner ist als 3, so muß die Zahl 4676 noch mit der 2ten Potenz von 10, d. i. mit 100 dividirt werden, und es ist folglich

$$1,6698745 = \text{Log. } 46,76$$

Kommt hingegen der gegebene Logarithme in den Decimalstellen mit keinem Logarithmen der Tafeln überein, so hat man, wie auch immer seine Kennziffer beschaffen seyn mag, um die zu ihm gehörige Zahl zu finden, folgendes Verfahren zu beobachten:

- I. Man suche unter der Kennziffer 3 ein Paar Logarithmen, zwischen welche die Decimalstellen des gegebenen fallen, und ziehe den kleineren dersel-

ben von dem größeren ab, so hat man die Differenz der Grenzen des gegebenen Logarithmen, deren zugehörige Zahlen nur um 1 unterschieden sind.

II. Hierauf ziehe man von dem gegebenen Logarithmen den nächstkleineren Logarithmen der Tafeln ab, ohne auf die Charakteristik beyder zu sehen, so hat man die Differenz der zwey nächsten Logarithmen, welche wir, der Kürze wegen, die Differenz der Nächsten nennen wollen;

III. Nun setze man die Proportion an:

Wie sich verhält die Differenz der Grenzen zur Differenz der Nächsten, so verhält sich 1 zu der gesuchten Zahl.

IV. Nachdem man das vierte Glied dieser Proportion nach den gewöhnlichen Regeln gefunden, so hänge man solches der zu dem nächstkleineren Logarithmen gehörigen Zahl als einen Decimalbruch an;

V. Nun vergleiche man die Kennziffer des gegebenen Logarithmen mit der Kennziffer 3 der Grenzen desselben (Nro I.); Ist jene dieser gleich, so ist die nach Nro. IV. gefundene Zahl selbst die dem gegebenen Logarithmen zugehörige; ist aber jene größer oder kleiner als diese, so muß die nach Nro IV. gefundene Zahl noch mit einer eben so hohen Potenz der Zahl 10 im ersten Falle multiplicirt, im andern dividirt werden, als die Differenz der beyderseitigen Kennziffern Einheiten enthält.

3. B. man verlangt die Zahl, welche dem Logarithmen 6,6973884 zugehört, so ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{nächstgrößerer Logarithme} & = & 3,6974037 \\
 \text{nächstkleinerer Logarithme} & = & \underline{3,6973165} \\
 \text{Differenz} & = & 872 \\
 \text{gegebener Logarithme} & = & 6,6973884 \\
 \text{nächstkleinerer Logarithme} & = & \underline{3,6973165} \\
 \text{Differenz} & = & \underline{719}
 \end{array}$$

Demnach hat man die Proportion:

$$872 : 719 = 1 : G$$

und hieraus $G = \frac{719}{872}$

Hängt man nun dem Zähler dieses Bruchs einige Nullen an, und verrichtet alsdann die Division, so erhält man den Quotienten, wie folgt:

$$872 \overline{) 719,000} 0,824$$

$$\underline{607 \ 6}$$

$$21 \ 40$$

$$\underline{17 \ 44}$$

$$3 \ 960$$

$$\underline{3 \ 488}$$

$$472$$

Es ist also $G = 0,824$

Hängt man nun diesen Decimalbruch der Zahl 4981, welche dem nächstkleineren Logarithmen zugehört, an, so erhält man 4981,824. Allein da die Kennziffer des nächstkleineren Logarithmen, der zu der Zahl 4981 gehört, nur 3, die Kennziffern des gegebenen Logarithmen aber 6, folglich die letztere um 3 Einheiten größer ist, als die erstere, so muß die zuletzt gefundene Zahl noch mit der 3ten Potenz von 10 d. h. mit 1000 multiplicirt, oder, was eben so viel ist, es muß in derselben das Decimalzeichen um 3 Stellen nach der rechten Hand zu gerückt werden, und die gesuchte Zahl ist mithin 4981824.

Wäre die Kennziffer des gegebenen Logarithmen 4, so wäre die zugehörige Zahl 49818,24; wäre jene 5, so wäre diese 498182,4; wäre aber jene 7, so wäre diese 49818240. Denn da man (nach S. 133.) auf diesem Wege die gesuchte Zahl jedesmal nur bis auf 7 Ziffern richtig finden kann, so muß, so oft die Kennziffer eines gegebenen Logarithmen für die ihm zugehörige Zahl mehr, als 7 Ziffern erfordert, der Abgang derselben durch Nullen ersetzt werden. Hiernach kann man auch jedesmal die Anzahl der Nullen, welche dem Zähler des nach Nro IV. erhaltenen Bruchs ange-

hängt werden muß, um den Quotienten bis auf so viele Ziffern zu erhalten, als die Charakteristik des gegebenen Logarithmen für die gesuchte Zahl fordert, voraus bestimmen. So findet man z. B. für den Logarithmen 9,3669223 die Zahl 2327674000.

§. 136.

Wenn eine Zahl, deren Logarithme gesucht werden soll, und in den kleinen Tafeln nicht mehr zu finden ist, sich in Factoren zerfallen läßt, deren Logarithmen in den Tafeln anzutreffen sind, so findet man den gesuchten Logarithmen, wo nicht kürzer, doch genauer, als nach §. 134, wenn man diese Zerfallung der gegebenen Zahl vornimmt, und die Logarithmen aller ihrer Factoren addirt, deren Summe alsdann den gesuchten Logarithmen giebt (§. 129.) z. B.

Man verlangt den Logarithmen der Zahl 196668; diese Zahl hat zu Factoren die Zahlen 36, und 5463; es ist aber

$$\begin{array}{rcl} \text{Log. } 36 & = & 1,5563025 \\ \text{Log. } 5463 & = & 3,7374312 \\ \hline \text{folglich} & & 5,2937337 = \text{Log. } 196668. \end{array}$$

Die im vorigen §. gefundene Zahl 4981824 hat zu Factoren die Zahlen 4961; und 1296; nun ist

$$\begin{array}{rcl} \text{Log. } 4 & = & 0,6020600 \\ \text{Log. } 961 & = & 2,9827234 \\ \text{Log. } 1296 & = & 3,1126050 \\ \hline \end{array}$$

folglich $6,6973884 = \text{Log. } 4981824$, genau so, wie er im vorigen §. gegeben war.

§. 137.

Um zu einer gemischten Zahl den zugehörigen Logarithmen zu finden, verwandle man entweder den der ganzen Zahl angehängten Bruch in einen Decimalbruch, hänge ihr solchen wiederum an, und betrachte nun die vier höchsten Ziffern der ganzen Zahl mit dem angehängten Decimalbruche als Ganze, führe sodann die Rechnung nach §. 134, und bestimme am Ende die

Kennziffer nach Maaßgabe der in der vorgegebenen Zahl enthaltenen Ganzen; oder, man verwandle die gegebene gemischte Zahl in einen unächten Bruch, und verfahre alsdann nach §. 132. Z. B.

Man verlangt den Logarithmen von $97382\frac{3}{4}$; da $97382\frac{3}{4} = 97382,75$; so ist die Rechnung (nach §. 134.) folgende:

$$\begin{array}{r} \text{Log. } 9739 = 3,9885144 \\ - \text{Log. } 9738 = 3,9884698 \\ \hline \text{Differenz} = 0,0000446 \end{array}$$

demnach

$$1 : 0,275 = 0,0000446 : \text{G}$$

$$\text{mithin } \text{G} = 0,0000122$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. } 9738 = 3,9884698 \\ + 122 \\ \hline 3,9884820 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 1 \\ \hline \text{folglich } 4,9884820 = \text{Log. } 97382,75 \end{array}$$

Nach §. 132. aber stehet die Rechnung also:

$$\text{Es ist } 97382\frac{3}{4} = \frac{389531}{4}$$

Nun ist

$$\begin{array}{r} \text{Log. } 3896 = 3,5906189 \\ \text{Log. } 3895 = 3,5905075 \\ \hline \text{Differenz} = 0,0001114 \end{array}$$

demnach

$$1 : 0,31 = 0,0001114 : \text{G}$$

$$\text{folglich } \text{G} = 0,0000345$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. } 3895 = 3,5905075 \\ + 345 \\ \hline 3,5905420 \\ + 2 \\ \hline 3,5905420 \end{array}$$

$$- \text{Log. } 4 = 0,6020600$$

$$\text{mithin } = 4,9884820 = 97382\frac{3}{4}$$

wiederum genau so, wie nach der ersten Art.

§. 138.

Ist ein negativer Logarithme gegeben, und es soll die ihm zugehörige Zahl gefunden werden, so ist diese

ein Bruch, dessen Zähler die Einheit, und dessen Nenner die dem gegebenen Logarithmen, als positiv betrachtet, zugehörige Zahl ist.

Verlangt man aber die gesuchte Zahl in Form eines Decimalbruchs, so bringe man zuerst den negativen Logarithmen nach §. 132. auf eine solche Form, daß er an der Stelle der Kennziffer eine Null bekomme, und rückwärts so viele negative Einheiten bey sich führe, als seine negative Kennziffer erfordert, hierauf suche man nach §. 135. die seinen Decimalziffern, als positiv betrachtet, zugehörige Zahl, und setze dieser so viele Nullen vor, als die dem Logarithmen rückwärts angehängte negative Zahl Einheiten enthält; von diesen Nullen schneide man endlich die erste durch das Decimalzeichen ab, so erhält man die gesuchte Zahl in Form eines Decimalbruchs. Die Gründe dieses Verfahrens sind aus §. 127. 128. Nro II. leicht einzusehen. §. V.

Man verlangt die Zahl, welche dem Logarithmen — 7,6756335 zugehört so ist die Rechnung diese:

$$\text{nächst größerer Logarithme} = 3,6756867$$

$$\text{nächst kleinerer Logarithme} = 3,6755951$$

$$\text{Differenz} = 916$$

$$\text{gegebener Logarithme} = 7,6756335$$

$$\text{nächst kleinerer Logarithme} = 3,6755951$$

$$\text{Differenz} = 384$$

Demnach

$$916 : 384 = 1 : G$$

$$\text{und hieraus } G = 0,419$$

Folglich ist die Zahl, welche dem Logarithmen, als positiv betrachtet zugehört, 47384190, und mithin der Bruch, der ihm als einem negativen Logarithmen zugehört $\frac{1}{47384190}$.

Verlangt man diesen Bruch sogleich in Form eines Decimalbruchs, so verwandle man den gegebenen Logarithmen auf folgende Art in einen positiven:

$$+ 8,0000000 - 8$$

$$- 7,6756335$$

$$\hline 0,3243665 - 8$$

Nun suche man für diesen Logarithmen, als positiv betrachtet, die zugehörige Zahl, wie folgt:

$$\text{nächst größerer Logarithme} = 3,3244882$$

$$\text{nächst kleinerer Logarithme} = 3,3242825$$

$$\text{Differenz} = 2057$$

$$\text{gegebener Logarithme} = 0,3243665$$

$$\text{nächst kleinerer Logarithme} = 3,3242825$$

$$\text{Differenz} = 840$$

Demnach

$$2057 : 840 = 1 : G$$

und hieraus $G = 0,408$

Folglich die verlangte Zahl $= 2110408$; setzt man nun dieser 8 Nullen vor, wie die dem Logarithmen angehängte Zahl -8 fordert, und schneidet man alsdann die erste derselben durch das Decimalzeichen ab, so erhält man den gesuchten Decimalbruch $0,00000002110408$, von dessen Richtigkeit man sich leicht versichern kann, wenn man den durch das erstere Verfahren gefundenen Bruch nach den gewöhnlichen Regeln in einen Decimalbruch verwandelt.

Eben so findet man auch

$$-3,6253124 = \text{Log. } \frac{1}{4226} = \text{Log. } 0,0002369661$$

Hieraus erhellet zugleich, daß man Logarithmen, die zwar eine positive Kennziffer haben, aber rückwärts eine negative Zahl bey sich führen, zuerst auf die Kennziffer 0 reduciren, und alsdann auf die eben gezeigte Art behandeln müsse. So ist z. B.

$$2,5450224 - 5 = 0,5450224 - 3 = \text{Log. } \frac{1}{5307699} = \text{Log. } 0,0035077$$

§. 139.

Was die Logarithmen negativer Zahlen betrifft, so muß man dabey unterscheiden, ob der Logarithme bloß als Erleichterungsmittel der Zahlenrechnung, oder ob er, wie bey höheren Rechnungen oft geschieht, als eine Größe eigener Art in irgend einer Verbindung mit andern Größen, vorkommt. Im ersten Falle ist der

Logarithme unbedingt möglich, und mit dem Logarithmen eben dieser Zahl, als positiv genommen, einverlehen; denn das negative Zeichen beziehet sich alsdenn bloß auf den bey Einleitung der Rechnung angenommenen Fall, der durch Veränderung der Zeichen in einen andern ähnlichen verwandelt worden ist. Wird also die Rechnung diesem ursprünglich angenommenen Falle, durch gehörige Abänderung der Bedingungen, angepaßt, so verwandelt sich die negative GröÙe in eine positive. Im andern Falle hingegen ist ein solcher Logarithme nur unter der Bedingung möglich, wenn er das Verhältniß einer negativen Zahl, als positiv genommen, zur positiven Einheit angiebt. Da man aber bey allen Rechnungen die positive Einheit zum Grunde legt, folglich wenn vom Logarithmen einer negativen Zahl die Frage ist, eigentlich den Logarithmen verstehen muß, der das Verhältniß einer negativen Zahl zur positiven Einheit angeben soll, so muß man unter dieser Einschränkung, sagen, daß, wenigstens im gemeinen Systeme, die Logarithmen negativer Zahlen unmöglich seyen. Denn eine unmögliche GröÙe ist ein, aus Merkmalen, die einander aufheben, zusammengesetzter Begriff, eine ungereimte Antwort des Calculs auf eine ungereimte Frage, wodurch man etwas sucht, was durch das Angenommene bereits ausgeschlossen ist. Da nun das gemeine logarithmische System nur für positive Zahlen eingerichtet ist, so müssen wir nothwendig auf solche Ausdrücke gerathen, sobald wir, in der zuletzt angegebenen Bedeutung, Logarithmen negativer GröÙen suchen.

§. 140.

Zu einem Beispiele von einem gedoppelten vortheilhaften Gebrauche der Logarithmen kann die oben (§. 118. II.) gegebene Aufgabe von dem Erfinder des Schachspiels dienen.

Zur Auflösung derselben hat man die 64te Potenz der Zahl 2 nöthig. Da nun (nach §. 129.) der Logarithme einer Potenz gefunden wird, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt, so ist

$$\text{Log. } 2^{64} = 64 \times \text{Log. } 2 = 19,2659200$$

Zu diesem Logarithmen findet man nach S. 135. die Zahl 18 446740 000 000 000 000.

Daß schon in der 8ten Stelle die Nullen anfangen, kommt daher, weil man nach S. 135. die zu einem Logarithmen gehörige Zahl nicht weiter als bis auf 7 Ziffern richtig finden kann, wie auch daselbst erinnert worden ist. Größere Tafeln würden die Zahl genauer geben. Wer aber keine solche hat, und doch die Gatte Potenz von 2 genau so, wie wir sie oben angegeben, zu finden wünschte, den können die Logarithmen noch auf einem andern Wege dazu führen der zwar nicht so leicht, wie der vorige, aber doch viel leichter und bequemer, als der Weg des fortgesetzten Multiplizirens ist. Wenn wir nämlich die beyden Hauptreihen des oben (S. 123.) betrachteten logarithmischen Systems noch einmal vor uns nehmen:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 10.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 10, 10.

so sehen wir bald, daß jedes nachfolgende Glied der arithmetischen Reihe die Summe, und jedes nachfolgende Glied der geometrischen Reihe das Product einiger vorhergehenden Glieder derselben Reihe ist. Nehmen wir nun dazu den Satz, daß der Logarithme eines Products die Summe der Logarithmen der Factoren ist (S. 129), und verbinden wir noch damit die oben schon gemachte Bemerkung, daß alle Glieder der geometrischen Reihe Potenzen der Zahl 2 enthalten, deren Exponenten die zugehörigen Glieder der arithmetischen Reihe, oder die Logarithmen sind, so ergiebt sich der Schluß leicht, daß jede beliebige Potenz der Zahl 2 vermittelst ihres Exponenten aus einem Paare, oder auch nur aus einer einzigen der vorhergehenden niedrigeren gefunden werden könne, ohne daß man nöthig hätte, erst alle vorhergehenden zu suchen.

Vermöge der eben angeführten Sätze ist nämlich jeder Exponent oder Logarithme die Summe einiger, oder das Doppelte eines, vorhergehenden niedrigeren. Da nun jeder Logarithme, der die Summe einiger andern ist, zu einer Zahl gehört, oder auf eine Zahl Anzeigethut, die ein Product ist, das diejenige Zahlen zu Factoren hat, welche den summirenden Zahlen des

Logarithmen zugehören, oder worauf jene Anzeige thun; so erhellet, daß jede beliebige Potenz der Zahl 2 gefunden werden könne, wenn man die den summirenden Zahlen des Exponenten dieser Potenz zugehörigen Zahlen der geometrischen Reihe in einander multiplicirt. 3. B. Man verlangt die 6te Potenz von 2, so ist

$$6 = \left\{ \begin{array}{l} 1+2+3 \\ 1+5 \\ 2+4 \\ 3+3 \end{array} \right\} \text{ und daher } 2^6 = \left\{ \begin{array}{l} 2 \times 4 \times 8 \\ 2 \times 32 \\ 4 \times 16 \\ 8 \times 8 \end{array} \right\} = 64$$

Soll also die 64te Potenz von 2 gefunden werden, und die geometrische Reihe geht nicht weiter, als bis zur 8ten Potenz dieser Zahl, so suche man auf die eben beschriebene Art zuerst aus der 8ten Potenz 16te, hieraus aus dieser die 32te und endlich aus der 32ten die 64te, wie folgt:

$$\begin{aligned} 2^8 &= 256 \\ 2^{16} &= 65536 \\ 2^{32} &= 4294967296 \\ 2^{64} &= 18446744073709551616 \end{aligned}$$