

Achter Abschnitt.

Von den Quadrat- und Cubik-
zahlen, und der Ausziehung
ihrer Wurzeln.

§. 94.

Die Lehre von den stetigen geometrischen Proportionen führte uns oben (in §. 47.) auf die Begriffe von den Quadratzahlen und ihren Wurzeln, welche auch daselbst schon vorläufig erklärt worden sind. Hier kommen wir nun zu der, an gedachtem Orte versprochenen, ausführlicheren Betrachtung derselben. Zuvor-derst haben wir zur Erklärung der in dieser Lehre üblichen Sprache zu bemerken, daß überhaupt ein Product, das aus lauter gleichen Factoren besteht, eine Potenz oder Dignität des Factors, der etlichesmal in sich selbst multiplicirt wird, und ein solcher Factor die Wurzel der Potenz genannt werde. Die Anzahl der Factoren, durch deren Multiplication in einander eine Potenz entsteht, bestimmt den Grad derselben, welcher durch eine kleinere Ziffer, die man der Wurzel rechter Hand oben beseyt, bezeichnet wird; diese kleinere Ziffer heißt der Exponent der Potenz. Die zweyte, dritte und vierte Potenz haben ausserdem noch die eigenen Namen Quadrat, Cubus, Biquadrat, die übrigen aber werden bloß nach ihren Graden benannt. Demnach werden folgende Ausdrücke also gelesen:

- 5^2 das Quadrat oder die zweyte Potenz von 5
 7^3 der Cubus oder die dritte Potenz von 7
 9^4 das Biquadrat oder die vierte Potenz von 9
 15^8 die achte Potenz von 15.

Das Zeichen der Wurzel ist $\sqrt{}$, in dessen Oeffnung die Exponenten der Grade der Wurzeln eingeschrieben werden. Wenn aber dieses Zeichen ohne eine Ziffer steht, so wird jedesmal die Quadratwurzel dadurch angedeutet. Demnach werden folgende Ausdrücke also gelesen:

- $\sqrt{81}$ die Wurzel der zweyten Potenz oder die Quadratwurzel von 81
 $\sqrt[3]{648}$ die Wurzel der dritten Potenz oder die Cubikwurzel von 648
 $\sqrt[4]{264}$ die Wurzel der vierten Potenz oder die Biquadratwurzel von 264
 $\sqrt[5]{243}$ die Wurzel der fünften Potenz von 243.

§. 95.

Bey den Quadratzahlen, die wir zuerst betrachten, kommt es vornämlich auf die Auflösung von zwey Aufgaben an; die eine ist: jede vorgegebene Zahl in das Quadrat zu erheben, oder die Quadratzahl jeder vorgegebenen Zahl zu finden; die andere: aus jeder vorgegebenen Zahl, die man als ein Quadrat betrachtet, die Wurzel auszuziehen. Daß die Auflösung der ersten Aufgabe durch bloße Multiplication der vorgegebenen Zahl in sich selbst, bewerkstelliget werde, fließt aus dem allgemeinen Begriffe einer Potenz, und dem besondern einer Quadratzahl, wie solche im vorigen §. und oben in §. 47. angegeben worden sind. Hingegen mit der Auflösung der andern Aufgabe gehet es so leicht nicht. Von dem Satze, daß man, wenn man ein Product mit dem einen seiner Factoren dividirt, zum Quotienten den andern Factor erhalte, kann man hier, da zwar ein Product, aber keiner von dessen

Factoren gegeben ist, keine Anwendung machen, wozu man sich nicht entschließen will, ein gegebenes Quadrat durch eine Zahl nach der andern so lange zu dividiren, bis man endlich, wer weiß nach wie viel vergeblichen Versuchen? auf eine käme, welche einen Quotienten gäbe, der dem angenommenen Divisor gleich wäre. Aber wer sieht nicht, daß dies eine unermessliche Arbeit wäre? Mit leichterer Mühe könnte man die Wurzel eines gegebenen Quadrats dadurch finden, daß man verschiedene Zahlen nach und nach so lange in sich selbst multiplicirte, bis man auf eine käme, deren Quadrat dem vorgegebenen, dessen Wurzel gesucht werden soll, gleich wäre. Allein wenn auch dieses Verfahren von Seiten der Kürze und Bequemlichkeit noch einmal so viele Vorzüge hätte, als es wirklich hat, so würde es doch deswegen unzulässig seyn, weil in Wissenschaften, die alle ihre Anweisungen strenge erweisen sollen, überall kein Probiren Statt findet. Ehe wir aber nun zur richtigen Auflösung dieser Aufgabe fortschreiten, sind noch einige der in dieser Lehre gebräuchlichen Ausdrücke zu erläutern. Der Umstand, daß man nicht von jeder Quadratzahl die Wurzel genau finden kann, hat die Eintheilung der Quadratzahlen in vollkommene und unvollkommene veranlaßt. Vollkommene Quadratzahlen nämlich sind solche, deren Wurzeln man genau bestimmen kann, wie z. B. 4, 9, 25. Unvollkommene hingegen solche, aus welchen man die Wurzeln niemals genau, sondern nur durch Annäherung finden kann, wie z. B. die Zahlen 5, 7, 11 u. a. m. deren jede zur Wurzel eine ganze Zahl mit einem Bruche hat, welcher sich niemals nach aller Schärfe angeben läßt. Die Wurzeln der vollkommenen Quadratzahlen werden Rationalzahlen, die Wurzeln der unvollkommenen aber Irrationalzahlen genannt. Eine andere Eintheilung der Wurzeln gründet sich auf die Anzahl ihrer Theile. In dieser Hinsicht heißt eine Wurzel, die aus einer einfachen Ziffer besteht, eine monomische oder eintheilige, eine solche, die aus zwey Theilen besteht, eine binomische oder zweytheilige, eine solche aber, die mehr als zwey Theile hat, eine polynomische oder vietheilige.

Die eintheiligen Wurzeln der vollkommenen Quadratzahlen zu finden, hat nicht die geringste Schwierigkeit, da man sie alle in dem Einmaleins antrifft; sollte aber diese Anwendung davon jemanden nicht so gleich geläufig seyn, der kann sich aus demselben alle diese Wurzeln mit ihren Quadraten zu diesem Gebrauche in ein besonderes Täfelchen bringen, welches desto nöthiger ist, da wir bald sehen werden, daß zur Entdeckung der vielttheiligen Wurzeln die Kenntniß der eintheiligen unumgänglich nöthig ist, indem man zu den ersteren nicht anders, als vermittelst der letzteren gelangen kann. Setzt man in dem Täfelchen jede Quadratzahl einer eintheiligen Wurzel gerade unter ihre Wurzel, so stehet es also:

✓	1	2	3	4	5	6	7	8	9
□	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Da es nicht mehr als 9 einfache Zahlen giebt, so müssen alle vollkommene Quadratzahlen eintheiliger Wurzeln darin zu finden seyn.

Das Quadrat von 10 ist 100
 = = = = 100 = 10000
 = = = = 1000 = 1000000
 = = = = 10000 = 100000000 u. f. w.

Demnach bekommt das Quadrat, für jede Nulle die der Wurzel angehängt wird, ein Paar Nullen, und umgekehrt, die Wurzel, für jedes Paar Nullen, das dem Quadrate angehängt wird, eine Nulle weiter. Wenn daher eine der vorigen Quadratzahlen mit einem oder mehreren Paaren angehängter Nullen vorkommt, so kann ihre Wurzel eben so leicht gefunden werden. Man braucht nämlich zu dem Ende nur der Wurzel des Ziffern dieser Zahl eben so viele einzelne Nullen anhängen, als in dem Quadrate Paare derselben stehen. Z. B. die Wurzel von 3600 ist 60.

Die Wurzel von 640000 ist 800
 Die Wurzel von 25000000 ist 5000

Eben dies gilt auch von Zahlen, welche vorne Nullen bey sich führen, und zehntheilige Brüche bedeuten. Für jede dergleichen Nullen in der Wurzel stehen in dem Quadrate entweder zwey Nullen, oder eben so viele Stellen, von der letzten Ziffer an bis zu der Stelle der einfachen Einheiten, wovon man sich eben so leicht überzeugen kann, wenn man (nach §. 87. — 89.) die Erhebung ins Quadrat verrichtet. Z. B. das Quadrat von 0,03 ist 0,0009; das Quadrat von 0,05 ist 0,0025; das Quadrat von 0,009 ist 0,000081.

§. 97.

Ehe wir nun die vollständige Anweisung zur Ausziehung der zweytheiligen und vielttheiligen Wurzeln geben können, muß vorher gezeigt werden, aus was für Theilen das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel bestehe. Denn wie bey der Division der Quotient nur dadurch erhalten wird, daß man nach und nach findet, wie oft der Divisor nach Tausendern, Hundertern, Zehnern, Einheiten, Zehnteln, Hundertteln, Tausendteln im Dividendus enthalten sey; eben so wird eine vielttheilige Wurzel nur dadurch herausgebracht, daß man nach und nach die Wurzeln von den Quadraten der Tausender, Hunderter, Zehner, Einheiten, Zehntel, Hundertel, Tausendtel, woraus die ganze Quadratzahl bestehet, auffindet. Es besteht aber das Quadrat einer jeden zweytheiligen Wurzel aus dem Quadrate des ersten Theils, dem doppelten Producte des ersten Theils in den zweyten, und dem Quadrate des zweyten Theils, welches, wenn man I, den ersten und II, den zweyten Theil der Wurzel, und die rechter Hand oben beygesetzte Ziffer 2, das Quadrat bedeuten läßt, kürzlich also ausgedrückt werden kann:

$$I^2 + 2 \times I \times II + II^2$$

Zum Beweis mache man das Quadrat von 75, aber so, daß man alle Partialproducte hinschreibt, wie sie sich durch die Multiplication ergeben, und sie am Ende erst in eine Summe zusammenzieht.

$$\begin{array}{r}
 75 \quad 75 \\
 \hline
 75 \quad 75
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi^2 &= 25 = 5 \times 5 = \text{Quadrat der 5 Einer} \\
 \Pi \times \text{I} &= 35 = 5 \times 70 = \text{Product der 5 Einer} \\
 &\quad \text{in die 7 Zehner} \\
 \text{I} \times \Pi &= 35 = 70 \times 5 = \text{Product der 7 Zehner} \\
 &\quad \text{in die 5 Einer} \\
 \text{I}^2 &= 49 = 70 \times 70 = \text{Quadrat der 7 Zehner.} \\
 \hline
 5625 &= \square 75 = \text{Quadrat der ganzen} \\
 &\quad \text{Zahl.}
 \end{aligned}$$

Die Zahl 5625 als die ganze Quadratzahl von 75 ist also aus 49 Hundertern, zweymal 35 Zehnern, und 25 Einern zusammengesetzt, von welchen die 49 Hunderter das Quadrat der 7 Zehner, als des ersten Theils der Wurzel, von den beyden 35 Zehnern die einen das Product aus den 7 Zehnern in die 5 Einer, die andern das Product aus den 5 Einern in die 7 Zehner, folglich beyde zusammen das doppelte Product aus dem ersten in den zweyten Theil der Wurzel, und endlich die 25 Einer das Quadrat von den 5 Einern, als dem zweyten Theile der Wurzel sind. Demnach ist also, wenn man die Zahl 75 als eine zweytheilige Wurzel betrachtet, deren erster Theil 70, der andere aber 5 ist,

$$75^2 = (70 + 5)^2 = 70^2 + 2 \times 70 \times 5 + 5^2$$

Daß das, was so eben von dem Quadrate der Zahl 75 gezeigt worden ist, von den Quadraten aller andern zweytheiligen Wurzeln gleichmäßig gelten müsse, erhellet daraus, weil jede zweytheilige Wurzel zum ersten Theile Zehner, zum zweyten aber Einer hat, und das Quadrat eines Zehners, das heißt das Product eines Zehners in einen Zehner immer Hunderter, so wie das Product eines Zehners in einen Einer, oder eines Einers in einen Zehner immer Zehner, und das Quadrat eines Einers, das heißt das Product eines Einers in einen Einer immer Einer giebt.

Eben so findet man z. B. das Quadrat von 84:

$$\begin{array}{r} 84 \\ 84 \\ \hline 336 \\ 672 \\ \hline 7056 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 84 &= 80 + 4 \\ 84^2 &= 80^2 + 2 \times 80 \times 4 + 4^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 6400 \\ 640 \\ 16 \\ \hline 7056 \end{array}$$

Das Quadrat von 96:

$$\begin{array}{r} 96 \\ 96 \\ \hline 576 \\ 864 \\ \hline 9216 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 96 &= 90 + 6 \\ 96^2 &= 90^2 + 2 \times 90 \times 6 + 6^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 8100 \\ 1080 \\ 36 \\ \hline 9216 \end{array}$$

§. 98.

Um das Quadrat einer vieltheiligen Wurzel auf diese Art zu finden, hat man bloß das eben gezeigte Verfahren mehrmals zu wiederholen. Die Wurzel mag nämlich so viel Theile haben, als man will, so nehme man zuerst die Ziffern derselben von allen höheren Ordnungen zusammen, und sehe sie als den ersten Theil, die Ziffer der Einheiten aber als den zweyten Theil der Wurzel an, hierauf mache man (nach dem vorigen §.) das Quadrat des ersten Theils, das doppelte Product aus dem ersten Theile in den zweyten und das Quadrat des zweyten Theils, aber so, daß man die vorzunehmenden Multiplicationen und Erhebungen ins Quadrat nicht wirklich verrichtet, sondern bloß durch die gehörigen Zeichen andeuter, so wird die Wurzel von dem Quadrate des ersten Theils noch eine vieltheilige, zum wenigsten noch eine zweytheilige Wurzel seyn. Man theile also diese aufs Neue durch Absonderung ihrer niedrigsten Ziffer in zwey Theile, nehme wiederum die Quadrate dieser beyden Theile, und das doppelte Product aus dem ersten Theile in den zweyten, und so setze man dieses Verfahren fort, bis man endlich auf einen ersten Theil kommt, der nur eine einzige Ziffer hat. Nachdem man nun von diesem und seinem zugehörigen zweyten Theile, wie bey allen vorhergehenden, die Quadrate, sammt dem doppelten Producte aus dem ersten Theile in den zweyten, in den Factoren hingesezt, so mache man alle diese Producte

und Quadrate, von dem letzten an bis auf das erste hinauf, wirklich, aber so, daß man dabey das erste Glied in allen Reihen, ausgenommen in der letzten, übergeht, weil das erste Glied einer jeden vorhergehenden Reihe in der nachfolgenden entwickelt ist; diese Producte und Quadrate setze man sodann genau untereinander, und addire sie, so wird ihre Summe das Quadrat der ganzen vorgegebenen Zahl seyn.

3. B. das Quadrat von 365:

$$\begin{array}{r}
 365 = 360 + 5 \\
 365^2 = 360^2 + 2 \times 360 \times 5 + 5^2 \\
 300^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 60 + 60^2 \\
 \hline
 365^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 60 + 60^2 + 2 \times 360 \times 5 + 5^2
 \end{array}$$

365	90000
<u>355</u>	36000
1825	3600
2190	3600
<u>1095</u>	<u>25</u>
133225	133225

Das Quadrat von 5875:

$$\begin{array}{r}
 5875 = 5870 + 5 \\
 5875^2 = 5870^2 + 2 \times 5870 \times 5 + 5^2 \\
 5870^2 = 5800^2 + 2 \times 5800 \times 70 + 70^2 \\
 5800^2 = 5000^2 + 2 \times 5000 \times 800 + 800^2 \\
 \hline
 5875^2 = 5000^2 + 2 \times 5000 \times 800 + 800^2 + \\
 2 \times 5800 \times 70 + 70^2 + 2 \times 5870 \times 5 + 5^2
 \end{array}$$

5875	25000000
<u>5875</u>	8000000
29375	640000
41125	812000
47000	4900
<u>29375</u>	58700
34515625	<u>25</u>
	34515625

Das Quadrat von 21756:

$$\begin{aligned}
21756 &= 21750 + 6 \\
21756^2 &= 21750^2 + 2 \times 21750 \times 6 + 6^2 \\
21750^2 &= 21700^2 + 2 \times 21700 \times 50 + 50^2 \\
21700^2 &= 21000^2 + 2 \times 21000 \times 700 + 700^2 \\
21000^2 &= 20000^2 + 2 \times 20000 \times 1000 + 1000^2 \\
21756^2 &= 20000^2 + 2 \times 20000 \times 1000 + 1000^2 \\
&\quad + 2 \times 21000 \times 700 + 700^2 + 2 \times 21700 \times 50 + 50^2 \\
&\quad + 2 \times 21750 \times 6 + 6^2
\end{aligned}$$

21756	400000000
21756	40000000
130536	1000000
108780	29400000
152292	490000
11756	2170000
43512	2500
473323536	261000
	36
	473323536

Das Quadrat von 254326:

$$\begin{aligned}
254326 &= 254320 + 6 \\
254326^2 &= 254320^2 + 2 \times 254320 \times 6 + 6^2 \\
254320^2 &= 254300^2 + 2 \times 254300 \times 20 + 20^2 \\
254300^2 &= 254000^2 + 2 \times 254000 \times 300 + 300^2 \\
254000^2 &= 250000^2 + 2 \times 250000 \times 4000 + 4000^2 \\
250000^2 &= 200000^2 + 2 \times 200000 \times 50000 + 50000^2 \\
254326^2 &= 200000^2 + 2 \times 200000 \times 50000 + 50000^2 \\
&\quad + 2 \times 250000 \times 4000 + 4000^2 + 2 \times 254000 \times 300 \\
&\quad + 300^2 + 2 \times 254300 \times 20 + 20^2 + 2 \times 254320 \times 6 \\
&\quad + 6^2
\end{aligned}$$

254326	40000000000
<u>254326</u>	20000000000
1525956	25000000000
508652	20000000000
762978	160000000
1017304	152400000
1271630	90000
508652	10172000
<u>64681714276</u>	400
	3051840
	36
	<u>64681714276</u>

§. 99.

Aus den bisherigen Betrachtungen über die Zusammensetzung der Quadratzahlen fließen folgende Sätze:

- I. Das Quadrat einer jeden Zahl, die mit mehr, als zwey, Ziffern geschrieben wird, hat mehr, als vier Ziffern.
- II. Von einer Zahl, die drey oder vier Ziffern hat, muß die Quadratwurzel zwey Ziffern, und kann nicht mehr haben.
- III. Wenn eine Zahl von drey oder vier Ziffern von der rechten gegen die linke in Klassen getheilt wird, deren jede zwey Ziffern, oder die linke nur eine enthält, so steckt in der linken Klasse das Quadrat des Zehners und etwas von dem doppelten Producte des Einers in den Zehner in der rechten Klasse aber das übrige dieses Productes sammt dem Quadrate des Einers der Wurzel.
- IV. Das größte Quadrat, das in der linken Klasse steckt, ist das Quadrat des Zehners der Wurzel.
- V. Zieht man daher von dem Quadrate des Zehners ein ihm gleiches Quadrat ab, so bleibt das doppelte Product aus dem Einer in den Zehner sammt dem Quadrate des Einers der Wurzel übrig.
- VI. Zieht man aber von der in der linken Klasse befindlichen Zahl, wofern sie keine vollkommene Qua-

dratzahl ist, das nächstkleinere Quadrat ab; so muß das übrig bleiben, was von dem doppelten Producte des Einers in den Zehner zu dem Quadrate des Zehners übergetragen worden ist.

VII. Das Product aus dem Einer in den Zehner ist allemal von der Ordnung der Zehner; wenn nun ein Product aus zwey Factoren durch den einen von beyden, oder ein Product aus drey Factoren durch zwey derselben dividirt wird, so findet man zum Quotienten den übrigen Factor. Wenn man demnach das doppelte Product aus dem ersten Theile in den zweyten, oder aus dem Zehner in den Einer der Wurzel durch den doppelten ersten Theil dividirt, so muß man dadurch den andern Theil, oder den Einer der Wurzel erhalten, dessen doppeltes Product in den ersten Theil sammt seinem Quadrate von dem zuerst erhaltenen Reste abgezogen nichts übrig lassen muß, wenn anders die vorgegebene Zahl eine vollkommene Quadratzahl ist, weil alsdann alle Theile, die sie enthält, nach und nach von ihr weggenommen worden sind.

VIII. Wenn zu der Wurzel ein neuer Theil hinzukommt, so kommt zu dem Quadrate ein doppeltes Product aus der Summe aller vorhergehenden Theile in den neuen und das Quadrat des neuen Theils hinzu. Wenn also eine vieltheilige Wurzel um einen Theil wächst, so kommt zu ihrem Quadrate eben so was hinzu, als zu dem Quadrate einer eintheiligen Wurzel hinzukommt, wenn sie um einen Theil vermehrt oder eine zweythellige aus ihr wird. Was hier der zweyte Theil ist, ist dort der neue, statt des dortigen ersten Theils ist hier die Summe aller vorhergehenden Theile.

IX. Jedes Quadrat bestehet aus den Quadraten aller Theile der Wurzel und aus den doppelten Producten der Summen aller ersten Theile in jeden nächstfolgenden, z. B. des ersten und zweyten in den dritten, des ersten, zweyten und dritten in

den vierten, des ersten, zweyten, dritten und vierten in den fünften u. s. w.

- X. Wenn man eine Zahl von der rechten Hand gegen die linke in Klassen eintheilt, so daß jede Klasse zwey Ziffern oder die erste bey der linken Hand auch nur eine bekommt, so hat die Zahl so viele Klassen, als ihre Wurzel Ziffern hat.
- XI. das größte Quadrat, das in der höchsten Klasse steckt, ist das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel.
- XII. Was noch überdies in der höchsten Klasse steckt, zu der höchsten Ziffer der nächstfolgenden Klasse gerechnet, enthält das doppelte Product aus dem höchsten Theile der Wurzel in den nächstfolgenden. Und was nach Abzug dieses Products übrig bleibt, samt der niedrigsten Ziffer der zweyten Klasse, enthält das Quadrat des zweyten Theils der Wurzel, und folglich können aus den beyden höchsten Klassen die beyden höchsten Theile der Wurzel (nach Nro. V — VII.) gefunden werden.
- XIII. Was nach diesem Verfahren übrig bleibt, zu der höchsten Ziffer der dritten Klasse genommen, enthält das doppelte Product aus den ersten beyden Theilen zusammen in den dritten, und was nach Abzug dieses doppelten Products übrig bleibt, nebst der niedrigsten Ziffer der dritten Klasse, enthält das Quadrat des dritten Theils der Wurzel, den man also finden kann, wenn man die ersten beyden zusammen als einen ansieht, und damit, und mit der höchsten Ziffer der dritten Klasse, nebst der übrig gebliebenen höheren aus der zweyten, eben so verfährt, wie man mit dem ersten Theile und der höchsten Ziffer der zweyten Klasse, nebst den übrig gebliebenen höheren aus der ersten verfuhr, um den zweyten Theil zu finden.
- XIV. Da man jedesmal so viele Ziffern, als man von der Wurzel schon gefunden hat, zusammen als einen einzigen Theil von der Ordnung der

niedrigsten Ziffer unter den gefundenen, und die nächste Ziffer, die man sucht, als den zweyten Theil ansehen kann, so kann man überhaupt jeden nächstfolgenden Theil der Wurzel eben so finden, wie man aus dem ersten Theile den zweyten findet, und eben so prüfen, ob man ihn richtig gefunden habe, indem man nämlich sein Quadrat und sein doppeltes Product in den ersten Theil zusammen addirt und von der niedrigsten Ziffer der Klasse, woraus man ihn gefunden hat, und den nächsthöheren noch übrigen abzieht. Und so giebt jede Klasse eine neue Ziffer der Wurzel.

§. 100.

Auf den Sätzen des vorigen §. beruht nun das ganze Verfahren, das man bey der Ausziehung der Quadratwurzel zu beobachten hat. Soll also zuerst aus einer Zahl, die drey oder vier Ziffern hat, die Quadratwurzel ausgezogen werden, so verfare man folgendermaßen:

- I. Man theile die Zahl von der rechten gegen die linke Hand in Klassen, so daß jede zwey Ziffern, oder auch die linke nur eine enthält.
- II. Man suche, was für einer Ziffer ihr Quadrat so groß, oder zunächst kleiner ist als die linke Klasse, so ist dieses Quadrats Wurzel der Zehner der gesuchten Quadratwurzel, oder derselben erster Theil.
- III. Man ziehe dieses Quadrat ab, so enthält der Rest noch das doppelte Product aus diesem ersten Theile in den zweyten und das Quadrat des zweyten Theils; und zwar steckt, wofern man das nächstkleinere Quadrat abgezogen hat, in dem, was sich von diesem Reste noch in der linken Klasse befindet, und in der höchsten Ziffer der rechten Klasse zusammen das doppelte Product aus dem ersten Theile in den zweyten, und vielleicht noch etwas darüber.

IV. Man verdopple also den gefundenen ersten Theil der Wurzel, und dividire damit das, was sich von dem vorhin erwähnten Reste noch in der linken Klasse befindet, sammt der höchsten Ziffer der rechten Klasse, als eine Zahl betrachtet, oder wofern in der linken Klasse nichts übrig geblieben ist, die höchste Ziffer der rechten Klasse allein; in welcher Absicht man dieses doppelte Product so unterzuschreiben hat, daß seine niedrigste Ziffer unter die niedrigste Ziffer dieser Zahl oder unter die höchste Ziffer der rechten Klasse zu stehen kommt.

V. Der Quotient, den man hierdurch erhält, ist nicht kleiner, er kann aber wohl größer seyn, als der zweyte Theil der Wurzel.

VI. Man multiplicire ihn also mit dem doppelten ersten Theile und schreibe dieses Product unter das Doppelte des ersten Theils, weil es von eben der Ordnung ist.

VII. Man mache ferner das Quadrat des zweyten Theils des Quotienten und schreibe desselben niedrigste Ziffer in die Stelle der Einer, die höhere aber in die Stelle der Zehner.

VIII. Man addire die nach Nro VI u. VII. gefundenen Zahlen, so ist ihre Summe entweder:

a) eben so groß, als der (nach Nro III.) erhaltene Rest, und dann ist der gefundene Quotient die Wurzel; oder:

b) sie ist kleiner, als der gedachte Rest, und dann ist der Quotient kleiner, als die eigentliche Wurzel, aber diese ist um keine ganze Einheit größer, sonst hätte man (nach Nro V.) den zweyten Theil des Quotienten um eins größer gefunden. In diesem Falle kennt man also zwey Zahlen, die nur um eins unterschieden sind, zwischen welche die Wurzel fallen muß; oder endlich:

c) sie ist größer, als der gedachte Rest, und dann ist der zweyte Theil des Quotienten zu groß

angenommen. Man vermindere ihn also so lange, bis man auf einen zweyten Theil kommt, der so beschaffen ist, daß die Summe seines doppelten Products in den ersten Theil und seines Quadrats, entweder eben so groß, oder kleiner ist, als der (nach Nro III.) gefundene Rest, wovon sodann im ersten Falle das gilt, was bey (a) im andern aber was bey (b) gesagt worden ist.

IX. Die Regeln V — VIII. lassen sich folgendermaßen in eine zusammenziehen:

Man schreibe rechter Hand neben das Doppelte des ersten Theils den gefundenen zweyten Theil des Quotienten, und multiplicire die Zahl, die nun aus dem doppelten ersten und dem gefundenen zweyten Theile des Quotienten bestehet, mit diesem zweyten Theile, so erhält man das doppelte Product aus dem ersten Theile in den zweyten sammt dem Quadrate des zweyten Theils des Quotienten auf einmal, und hat nur noch zu untersuchen, welcher von den drey unter Nro. VIII. begriffenen Fällen Statt finde.

Der Beweis von der Richtigkeit dieses Verfahrens fließt aus den Sätzen I — VII. des vorigen §.

Die Probe, ob man im Rechnen nicht gefehlt habe, kann nach geendigter Rechnung damit angestellt werden, daß man den gefundenen Quotienten mit sich selbst multiplicirt, und im Falle von Nro. VIII. (b) den zuletzt erhaltenen Rest zu diesem Producte addirt, wo sodann, wofern man richtig gerechnet hat, die gegebene Zahl wieder herauskommen muß.

Beispiele.

$$\begin{array}{r}
 7 \overline{) 84} \overline{) 28} \\
 \underline{12} \quad \underline{4} \\
 384 \\
 2 \times 1 = (4) 8 \\
 2 \times 1 \times 11 + 11 \underline{2} = 384 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 \overline{) 29} \overline{) 23} \\
 \underline{12} \quad \underline{4} \\
 129 \\
 2 \times 1 = (4) 3 \\
 2 \times 1 \times 11 + 11 \underline{2} = 129 \\
 \hline
 \end{array}$$

N 2

$$\begin{array}{r}
 9 \overline{) 6131} \\
 \underline{1^2 9} \\
 61 \\
 \underline{2 \times 1 = (6) 1} \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{61}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 19 \overline{) 36144} \\
 \underline{1^2 16} \\
 336 \\
 \underline{2 \times 1 = (8) 4} \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{336}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 37 \overline{) 2161} \\
 \underline{1^2 36} \\
 121 \\
 \underline{2 \times 1 = (12) 1} \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{121}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 98 \overline{) 0199} \\
 \underline{1^2 81} \\
 1701 \\
 \underline{2 \times 1 = (18) 9} \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{1701}
 \end{array}$$

§. 101.

Soll aus einer Zahl, die mehr als 4 Ziffern hat, es mögen ihrer hernach so viel seyn, als man will, die Quadraturwurzel gezogen werden, so hat man folgende Regeln zu beobachten:

- I. Man theile die Zahl von der rechten gegen die linke in Klassen, deren jede zwey Ziffern, oder die höchste auch nur eine enthält, so wird die Wurzel so viel Ziffern haben, als Klassen herauskommen.
- II. Man suche was für einer Ziffer ihr Quadrat der höchsten Klasse gleich, oder zunächst kleiner ist; diese Ziffer ist die höchste der Wurzel, deren Quadrat man von der höchsten Klasse der gegebenen Zahl abziehen muß.
- III. Zu dem, was in dieser Klasse übrig bleibt, nehme man die folgende Klasse, und schreibe unter

die höchste Ziffer derselben die niedrigste Ziffer des verdoppelten gefundenen Theils der Wurzel, die höheren Ziffern dieses doppelten aber nach der Ordnung weiter gegen die linke Hand zu. Mit diesem Doppelten dividire man in die Ziffern, welche darüber stehen, und nehme den Quotienten für den nächstfolgenden Theil der Wurzel an.

IV. Diesen Quotienten multiplicire man mit dem Doppelten des ersten Theils, und schreibe das Product auch so, daß es sich unter dem Anfange dieses Doppelten anfängt.

V. Man mache auch das Quadrat des Quotienten und fange es unter der niedrigsten Ziffer der Klasse, aus deren höchsten Ziffer man den Quotienten gefunden hat, zu schreiben an, so daß die höhere Ziffer dieses Quadrats unter die höchste Ziffer der erwähnten Klasse zu stehen kommt.

VI. Man addire dieses doppelte Product des ersten Theils der Wurzel in den Quotienten, und das Quadrat des zweyten Theils; wenn sich nun deren Summe von den darüber stehenden Zahlen abziehen läßt, so ist der Quotient der gesuchte Theil der Wurzel. Ist aber die gedachte Summe größer, als das, was über ihr steht, so muß man den Quotienten so lange vermindern, bis der Abzug geschehen kann.

VII. Zu dem, was hiebey übrig bleibt, ziehe man die folgende Klasse herunter, sehe so viele Ziffern von der Wurzel, als man schon gefunden hat, zusammen als den ersten Theil derselben an, und verfahre, um daraus den nächstfolgenden zu finden, (nach Nro. III — VI.)

VIII. Diese Arbeit setze man fort, bis man alle Ziffern der Wurzel bis mit auf den Einer gefunden hat; und wenn alsdann in den Stellen der Einer und Zehner noch etwas übrig bleibt, so ist die gefundene Zahl zunächst kleiner als die Wurzel, so daß, wenn man diese Zahl um eins vermehrte, sie größer, als die Wurzel seyn würde.

IX. Die Regeln IV — VI lassen sich eben so, wie beyrn
vorigen §. VI — VIII in eine zusammenziehen.

Der Beweis von der Richtigkeit dieses Verfahrens
ist in den Sätzen VII — XIII des §. 99. enthalten.

Die Probe wird wiederum dadurch gemacht, daß
man den gefundenen Quotienten mit sich selbst multi-
plicirt, und wenn zuletzt ein Rest geblieben ist, solchen
zu dem Producte addirt, wo sodann die Summe, wo-
fern man richtig gerechnet hat, die gegebene Zahl wie-
der herstellen muß.

Beispiele.

$\begin{array}{r} 1 63 84 138 \\ 1^2 = 1 \\ \hline 63 \\ 2 \times 1 = (2)2 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 44 \\ \hline 1984 \\ 2 \times 1 = (24)8 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 1984 \end{array}$	$\begin{array}{r} 97 61 44 988 \\ 1^2 = 81 \\ \hline 1661 \\ 2 \times 1 = (18)8 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 1504 \\ \hline 15744 \\ 2 \times 1 = (196)8 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 15744 \end{array}$
--	--

$\begin{array}{r} 1 33 63 36 1156 \\ 1^2 = 1 \\ \hline 33 \\ 2 \times 1 = (2)1 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 21 \\ \hline 1263 \\ 2 \times 1 = (22)5 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 1125 \\ \hline 13836 \\ 2 \times 1 = (230)6 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 13836 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 66 18 24 2768 \\ 1^2 = 4 \\ \hline 366 \\ 2 \times 1 = (4)7 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 329 \\ \hline 3718 \\ 2 \times 1 = (54)6 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 3276 \\ \hline 44224 \\ 2 \times 1 = (552)8 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 44224 \end{array}$
--	--

$\begin{array}{r} 26 26 56 25 5125 \\ 1^2 \underline{25} \\ 126 \\ 2 \times 1 = (10)1 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{101} \\ 2556 \\ 2 \times 1 = (102)2 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{2044} \\ 51225 \\ 2 \times 1 = (1024)5 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{51221} \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 30 06 25 6025 \\ 1^2 \underline{36} \\ 30 \\ 2 \times 1 = (12) \\ 3006 \\ 2 \times 1 = (120)2 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{2404} \\ 60225 \\ 2 \times 1 = (1204)5 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{60225} \end{array}$
$\begin{array}{r} 1 23 45 43 21 11111 \\ 1^2 \underline{1} \\ 23 \\ 2 \times 1 = (2)1 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{21} \\ 245 \\ 2 \times 1 = (22)1 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{221} \\ 2443 \\ 2 \times 1 = (222)1 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{2221} \\ 22221 \\ 2 \times 1 = (2222)1 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{22221} \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 00 02 00 01 10001 \\ 1^2 \underline{1} \\ 00020001 \\ 2 \times 1 = (2000)1 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{20001} \\ 00020001 \\ 2 \times 1 = (2000)1 \\ 2 \times 1 \times 11 + 11^2 \underline{20001} \end{array}$

§. 102.

Soll aus einem Bruche die Quadratwurzel ausgezogen werden, so ist diese ein Bruch, der zum Zähler hat die Quadratwurzel aus dem Zähler, und zum Nenner die Quadratwurzel aus dem Nenner des gegebenen. Denn es folgt aus der Lehre von der Multiplication der Brüche überhaupt und aus dem Begriffe einer Quadratzahl ins Besondere, daß das Quadrat eines Bruchs ein Bruch ist, den man erhält, wenn man den gegebenen Bruch mit sich selbst multi-

plicirt d. h. wenn man das Quadrat seines Zählers zum Zähler und das Quadrat seines Nenners zum Nenner macht. Z. B. $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}$; $\sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{5}{12}$.

§. 103.

Soll endlich aus einer gemischten Zahl die Quadratwurzel gezogen werden, so hat man dieselbige nach §. 20. Nro. 11. in einen unächten Bruch zu verwandeln, und alsdann die Ausziehung der Wurzel nach den vorigen §. zu verrichten. Z. B.

$$\sqrt{8\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{289}{36}} = \frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}; \sqrt{10\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{169}{16}} \\ = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}.$$

§. 104.

Wenn man die Quadrate der Zahlen, nach der Ordnung, wie sie in dem Wurzeltäfelchen (§. 96.) auf einander folgen, betrachtet, und sie mit der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. vergleicht, so findet man, daß zwischen jede zwey der ersten verschiedenen der letztern fallen, z. B. zwischen 4 und 9 die Zahlen 5, 6, 7, 8, zwischen 9 und 16 die Zahlen 10, 11, 12, 13, 14, 15 und so immer mehrere, je weiter man die Vergleichung fortsetzt. Alle diese Zahlen können keine ganze Zahlen zu Wurzeln haben. Denn wenn z. B. die Zahl 7 eine ganze Zahl zur Wurzel haben sollte, so müßte diese größer seyn als 2, die Wurzel von 4, und kleiner als 3, die Wurzel von 9, weil die Zahl 7 zwischen die Zahlen 4 und 9 in der Reihe der Quadrate fällt. Da es nun keine ganze Zahl giebt, die größer als 2 und kleiner als 3 wäre, so kann auch die Zahl 7 keine ganze Zahl zur Wurzel haben. Und eben so verhält es sich auch mit allen übrigen Zahlen dieser Art. Da aber zwischen jede zwey ganze Zahlen unendlich viele gebrochene fallen, so sollte man denken, es müßte sich unter diesen unendlich vielen Brüchen für jede ganze Zahl wenigstens eine genaue Wurzel finden lassen. Gleichwohl ist es so weit gefehlt, daß dem also wäre, daß vielmehr die Wurzeln aller Zahlen, welche zwischen zwey Quadratzahlen fallen, durch unsere angenommenen Zahlzeichen weder

geschrieben noch ausgesprochen, also überall nicht ausgedrückt werden können, ungeachtet es an sich nicht widersprechend ist, Zahlen zu gedenken, welche die Eigenschaft hätten, daß sie, wenn sie mit sich selbst multiplicirt würden, diejenigen Zahlen hervorbrächten, welche zwischen die Quadratzahlen hineinfallen. Man wird auch leicht einsehen, daß dies beydes wohl zusammen bestehen könne, wenn man sich nur erinnert, daß unendlich viele ächte und unächte Brüche, die als gemeine Brüche gar wohl geschrieben und ausgesprochen werden können, sich als Decimalbrüche niemals mit erschöpfender Genauigkeit ausdrücken lassen.

Daß nun eben dieses auch bey den Wurzeln der unvollkommenen Quadratzahlen der Fall sey, kann durch folgende Schlüsse dargethan werden:

- I. Hat man einen Bruch auf seine kleinste Benennung gebracht, so kann auch dessen Quadrat nicht weiter auf eine kleinere Benennung gebracht werden.

Denn sollte dies geschehen können, so müßte (nach S. 31. 81. 102.) der Zähler und Nenner dieses Quadrats ein gemeinschaftliches Maaß haben, welches bey einem Bruche dessen Wurzel schon auf die kleinste Benennung gebracht worden, unmöglich ist. Denn da der Zähler und Nenner des Quadrats keine andere einfache Zahlen zu Factoren haben, als der Zähler und Nenner der Wurzel, so müßte dieselbe einfache Zahl, welche ein Factor vom Zähler und Nenner des Quadrats seyn sollte, auch ein Factor vom Zähler und Nenner der Wurzel seyn, und folglich die letztere noch auf eine kleinere Benennung gebracht werden können, welches unserer Voraussetzung widerspricht.

- II. Das Quadrat eines eigentlichen Bruchs, er sey ein ächter oder unächter, kann also unmöglich eine ganze Zahl seyn.

Denn man mache das Quadrat der Wurzel, nachdem man diese zuvor auf die kleinste Benennung gebracht, so müßte dieses Quadrat, um einer ganzen Zahl gleich zu werden, auf die kleinste überall mögliche

Benennung, nämlich auf die Benennung 1, gebracht werden können. Da sich aber dieses Quadrat (nach Nro I.) durchaus nicht auf eine kleinere Benennung bringen läßt, so kann es noch viel weniger auf die kleinste, überall mögliche, Benennung gebracht werden.

III. Jede ganze Zahl, die keine ganze Zahl zur Wurzel hat, kann folglich auch keinen Bruch zur Wurzel haben, oder kann auch nicht das Quadrat eines Bruchs seyn.

Denn wenn dies wäre, so müßte das Quadrat eines Bruchs eine ganze Zahl seyn können, welches (nach Nro II.) unmöglich ist.

IV. Läßt sich aber von einer Zahl weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl angeben, die sie zur Wurzel hätte, so läßt sich die Wurzel dieser Zahl überall nicht angeben. Nun ist das Erste bey allen unvollkommenen Quadratzahlen der Fall (nach Nro. I — III.), also auch das Letzte.

§. 105.

Gleichwohl kann man den Wurzeln solcher Zahlen so nahe kommen, als man will. Man bedient sich dazu des nämlichen Verfahrens, welches oben in §. 92. gezeigt worden ist, um einen Quotienten, der sich nicht genau angeben läßt, doch so genau, als es die jedesmalige Absicht erfordert, aus. drücken, und darin bestehet, daß man nach Anhängung einer beliebigen Anzahl von Nullen, die Arbeit, so lange man es nöthig findet, fortsetzt, mit dem einzigen Unterschiede, daß man hier die Nullen immer paarweise anhängen muß, weil, wenn man annimmt, daß die Wurzel Zehnthelchen enthalte, das Quadrat Hunderttheilchen, wenn aber die Wurzel Hunderttheilchen enthalten solle, das Quadrat Zehntausendtheilchen enthalten muß, u. s. w. so daß man also für jedes dem Quadrate angehängte Paar Nullen eine neue Ziffer der Wurzel bekommt, wie man oben bey der Division für jede einzelne, dem Dividendus angehängte, Nulle eine neue

Ziffer des Quotienten bekam. Auch kann diese Anhängung der Nullen hier eben so, wie dort, entweder gleich Anfangs, nachdem man den Ort der einfachen Einheiten bestimmt, auf einmal, oder, wenn man zuvor die Ausziehung der Wurzel so weit verrichtet, als man damit kommen konnte, erst nach und nach bey dem jedesmaligen Reste, geschehen. Endlich erhellet aus den nämlichen Gründen, wie bey der Division, daß man diese Annäherung so weit treiben könne, als man nur will, und daß man auf diese Art der gesuchten Wurzel um so viel näher komme, je mehr Nullen man dem Quadrate angehängt hat.

$$\begin{array}{r}
 1 \overline{) 47 \overline{) 62 \overline{) 23 \overline{) 1214,99}}} \\
 \underline{1^2 = 1} \\
 2 \times 1 = (2) 1 \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 44 \\
 \underline{362} \\
 2 \times 1 = (24) 1 \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 241 \\
 \underline{12123} \\
 2 \times 1 = (242) 4 \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 9696 \\
 \underline{242700} \\
 2 \times 1 = (2428) 9 \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 218601 \\
 \underline{2409900} \\
 2 \times 1 = (24298) 9 \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 2186901 \\
 \underline{222999}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 41|60|23|644,96 \\
 1^2 = 36 \\
 \hline
 560 \\
 2 \times 1 = (12)4 \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 496 \\
 \hline
 6423 \\
 2 \times 1 = (128)4 \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 4136 \\
 \hline
 128700 \\
 2 \times 1 = (1288)9 \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 116001 \\
 \hline
 1269900 \\
 2 \times 1 = (12898)9 \\
 2 \times 1 \times 11 + 11^2 = 1160901 \\
 \hline
 108999
 \end{array}$$

§. 106.

Eben so wird die Ausziehung der Quadratwurzel auch bey Decimalbrüchen verrichtet, nur daß bey diesen wenn man eine vorgegebene Quadratzahl in ihre Klassen abtheilt, ein Theilungszeichen allemal durch das Decimalzeichen gehen, oder unmittelbar vor demselben eine Klasse sich endigen muß, weil man sonst nicht bestimmen könnte, von welcher Ordnung die gefundenen Ziffern der Wurzel wären. Wenn daher in einer solchen Quadratzahl nach dem Decimalzeichen eine ungerade Zahl von Ziffern folgt, so muß man sie durch Anhängung einer Null zuvor in eine gerade verwandeln. Uebrigens sind die Gründe der Rechnung die nämlichen, wie bey ganzen Zahlen.

$$\begin{array}{r}
 0,00|39|70|0,063 \\
 36 \\
 \hline
 370 \\
 (18)3 \\
 \hline
 369 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0,05|17|83|0,227 \\
 4 \\
 \hline
 117 \\
 (4)2 \\
 \hline
 84 \\
 \hline
 3383 \\
 (44)7 \\
 \hline
 3129 \\
 \hline
 254
 \end{array}$$

0,01|19|01|70| 0,1090

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 1901 \\
 (209 \\
 1881 \\
 \hline
 2070
 \end{array}$$

9|01|35|84|70| 30,022

$$\begin{array}{r}
 9 \\
 013584 \\
 (600)2 \\
 12004 \\
 \hline
 158070 \\
 (6004)2 \\
 120084 \\
 \hline
 37986
 \end{array}$$

§. 107.

Nach dieser ausführlichen Anleitung zur Ausziehung der Quadratwurzel kann nun die Ausziehung der Cubikwurzel nicht mehr schwer fallen. Für das erste ist hievon zu bemerken, daß alles, was oben in §. 95. von den Quadratzahlen gesagt worden ist, nach gehöriger Abänderung der Benennungen, auch gleichmäßig von den Cubikzahlen gelte. Auch für die Cubikzahlen aller eintheiligen Wurzeln kann man sich eben so, und, zu gleicher Absicht, wie es oben (in §. 96.) für die Quadratzahlen der ebengenannten Wur ein geschehen ist, ein Wurzeitäfelchen verfertigen, welches, wenn man auch die Quadratzahlen dieser Wurzeln darein aufnimmt, folgende Gestalt bekommt.

✓	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Der Cubus von 10 ist 1000
 " " " " 100 " 1000000
 " " " " 1000 " 1000000000
 " " " " 10000 " 1000000000000 u. f. w.

Hieraus kann man schon sehen, nach welchem Gesetze das Zunehmen der Nullen in der Wurzel fortschreite; der Cubus bekommt nämlich für jede Nulle, die der Wurzel angehängt wird, drey Nullen, und die

Wurzel für jede drey Nullen, die dem Cubus angehängt werden, eine Nulle weiter. Die Anwendung dieses Gesetzes ist derjenigen vollkommen ähnlich, welche in §. 96. von dem Gesetze des übereinstimmenden Fortschreitens der Nullen in den Quadraten und deren Wurzeln auf die Ausziehung der letzteren gemacht wurde; auch gilt dieses Gesetz, wie das zuletzt genannte, von Decimalbrüchen ebensowohl, als von ganzen Zahlen.

§. 108.

Bevor die Ausziehung der Cubikwurzel gründlich gezeigt werden kann, muß erst die Zusammensetzung einer Cubikzahl aus den verschiedenen Theilen ihrer Wurzel, wie wir es oben (in §. 97.) bey den Quadratzahlen gethan haben, untersucht werden. Da sich alle Wurzeln, so viele Theile sie auch immer haben mögen, auf zweytheilige zurückführen lassen, indem man alle Ziffern der höheren Ordnungen zusammengenommen als den ersten Theil, die Ziffer der Einheiten aber als den zweyten Theil betrachtet, so ist es auch hier für alle Fälle hinreichend, zu wissen, wie die Cubikzahl einer zweytheiligen Wurzel aus den verschiedenen Theilen ihrer Wurzel zusammengesetzt werde. Es besteht aber der Cubus einer jeden zweytheiligen Wurzel aus dem Cubus des ersten Theils, dem dreysfachen Producte aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten Theil, dem dreysfachen Producte aus dem Quadrate des zweyten Theils in den ersten Theil, und dem Cubus des zweyten Theils, welches, wenn man den Cubus einer Zahl durch die derselben rechter Hand oben beygesetzte Ziffer 3 bezeichnet, und übrigen die in §. 97. gebrachten Zeichen beybehält, durch folgende allgemeine Formel kürzlich ausgedrückt werden kann:

$$I^3 + 3 \times I^2 \times II + 3 \times I \times II^2 + II^3$$

Um zu sehen, wie alle in dieser Formel begriffenen Theile der Wurzel nach und nach in den Cubus hineinkommen, mache man zuerst das Quadrat der Zahl 86 so, daß man jeden einzelnen Theil desselben besonders hinschreibt, wie man ihn durch die Multiplication erhält.

$$\begin{array}{r} 86 \\ 86 \\ \hline \end{array}$$

$$II^2 = 36 = 6 \times 6 = \text{Quadrat der 6 Einer.}$$

$$II \times I = 48 = 6 \times 8 = \text{Product der 6 Einer in die 8 Zehner.}$$

$$I \times II = 48 = 8 \times 6 = \text{Product der 8 Zehner in die 6 Einer.}$$

$$I^2 = 64 = 8 \times 8 = \text{Quadrat der 8 Zehner.}$$

$$3796$$

Wenn man nun jeden dieser einzelnen Theile des Quadrats von 86 aufs Neue mit den beyden Theilen der Wurzel, nämlich mit den 6 Einern und den 8 Zehnern besonders multiplicirt, so erhält man alle Theile des Cubus von 86 nach einander in der Ordnung, wie sie in denselben hineinkommen.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$II^3 = 216 = \text{Cubus der 6 Einer, oder des zweyten Theils}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 80 \\ \hline \end{array}$$

$$I \times II^2 = 2880 = \text{Product der 8 Zehner in das Quadrat der 6 Einer, oder des ersten Theils in das Quadrat des zweyten.}$$

$$\begin{array}{r} 480 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$I \times II^2 = 2880 = \text{Product des ersten Theils in das Quadrat des zweyten.}$$

$$\begin{array}{r} 480 \\ 80 \\ \hline \end{array}$$

$$I^2 \times II = 38400 = \text{Product aus dem Quadrat des ersten Theils in den zweyten}$$

$$\begin{array}{r} 480 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$I \times II^2 = 2880 = \text{Product des ersten Theils in das Quadrat des zweyten.}$$

$$\begin{array}{r}
 480 \\
 80 \\
 \hline
 1^2 \times 11 = 38400 = \text{Product aus dem Quadrate des er-} \\
 \text{sten Theils in den zweyten.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6400 \\
 6 \\
 \hline
 1^2 \times 11 = 38400 = \text{Product aus dem Quadrate des er-} \\
 \text{sten Theils in den zweyten.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6400 \\
 80 \\
 \hline
 1^3 = 512000 = \text{Cubus des ersten Theils.}
 \end{array}$$

Setzt man nun alle diese einzelnen Theile gehörig untereinander und addirt sie, so giebt ihre Summe den Cubus der Zahl 86.

$$\begin{array}{r}
 86 \\
 86 \\
 \hline
 516 \\
 688 \\
 \hline
 7396 \\
 86 \\
 \hline
 44376 \\
 59168 \\
 \hline
 636056
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 512000 \\
 38400 \\
 38400 \\
 38400 \\
 2880 \\
 2880 \\
 2880 \\
 216 \\
 \hline
 636056
 \end{array}$$

Kürzer erhält man das nämliche, wenn man die Rechnung nach der obigen Formel führt, wo sie alsdann also stehet:

$$86^3 = (80 + 6)^3 = 80^3 + 3 \times 80^2 \times 6 + 3 \times 80 \times 6^2 + 6^3$$

$$\begin{array}{rcl}
 1^3 & = & 80^3 = 512000 \\
 3 \times 1^2 \times 11 & = & 3 \times 80^2 \times 6 = 115200 \\
 3 \times 1 \times 11^2 & = & 3 \times 80 \times 6^2 = 8640 \\
 11^3 & = & 6^3 = 216 \\
 & & \hline
 & & 636056
 \end{array}$$

§. 109.

Hievon ist nun die Anwendung auf die Cubikzahlen vieltheiliger Wurzeln leicht zu machen. Soll näm-

lich der Cubus einer vieltheiligen Wurzel sohergestalt aus den Theilen der Wurzel zusammengesetzt werden, so sehe man alle Ziffern der Wurzel bis auf die Ziffer der Einer für den ersten, die Ziffer der Einer aber für den zweyten Theil der Wurzel an, und führe nun die Rechnung nach der im vorigen §. gegebenen allgemeinen Regel, so daß man alle Glieder nur durch ihre Factoren ausdrückt, und mit den gehörigen Zeichen unter einander verbindet. So lange nun der Cubus des ersten Theils noch eine vieltheilige Wurzel hat, so lange entwickle man denselben durch fortgesetzte Theilung der Wurzel nach der nämlichen Formel allemal wieder in einer neuen Reihe, bis man endlich auf einen ersten Theil kommt, der nur eine eintheilige Wurzel hat. Nun mache man alle die Producte, mit Uebergang des ersten Glieds einer jeden Reihe, das der letzten allein ausgenommen, wirklich und addire sie, so giebt ihre Summe den verlangten Cubus der gegebenen vieltheiligen Wurzel. Z. B. es sey der Cubus von 5678 so zu machen:

$$5678 = 5670 + 8$$

$$5678^3 = (5670 + 8)^3$$

$$(5670 + 8)^3 = \overline{5670^3} + 3 \times \overline{5670^2} \times 8 + 3 \times$$

$$\overline{5670^3} = \overline{5670 \times 8^2 + 8^3} \\ \overline{5670^3} = \overline{5600^3} + 3 \times \overline{5600^2} \times 70 + 3 \times \overline{5600} \\ \times \overline{70^2} + \overline{70^3}$$

$$\overline{5600^3} = \overline{5000^3} + 3 \times \overline{5000^2} \times 600 + 3 \times \overline{5000} \\ \times \overline{600^2} + \overline{600^3}$$

$$\begin{aligned} 5678^3 &= \overline{5000^3} + 3 \times \overline{5000^2} \times 600 + 3 \times \overline{5000} \\ &\times \overline{600^2} + \overline{600^3} + 3 \times \overline{5600^2} \times 70 + 3 \times \overline{5600} \\ &\times \overline{70^2} + \overline{70^3} + 3 \times \overline{5670^2} \times 8 + 3 \times \overline{5670} \\ &\times \overline{8^2} + \overline{8^3} \end{aligned}$$

125.....	=	$\overline{5000^3}$	5678
450.....	=	$3 \times \overline{5000^2} \times 600$	5678
540.....	=	$3 \times \overline{5000} \times \overline{600^2}$	45424
216.....	=	$\overline{600^3}$	34746
65856.....	=	$3 \times \overline{5600^2} \times 70$	33068
8232....	=	$3 \times \overline{5600} \times \overline{70^2}$	28390
343...	=	$\overline{70^3}$	3225684
7715736..	=	$3 \times \overline{5670^2} \times 8$	5678
108864.	=	$3 \times \overline{5670} \times \overline{8^2}$	257917472
512 =	8^3		225677788
			193438104
			161198420
183056925752			183056925752

Es soll der Cubus von 475 auf eben diese Art zusammengesetzt werden, so ist:

$$\begin{aligned}
 475 &= 470 + 5 \\
 \overline{475^3} &= (\overline{470 + 5})^3 \\
 (\overline{470 + 5})^3 &= \overline{470^3} + 3 \times \overline{470^2} \times 5 + 3 \times \overline{470} \times \overline{5^2} + \overline{5^3} \\
 \overline{470^3} &= \overline{400^3} + 3 \times \overline{400^2} \times 70 + 3 \times \overline{400} \times \overline{70^2} + \overline{70^3} \\
 \overline{475^3} &= \overline{400^3} + 3 \times \overline{400^2} \times 70 + 3 \times \overline{400} \times \overline{70^2} + \overline{70^3} \\
 &\quad + 3 \times \overline{470^2} \times 5 + 3 \times \overline{470} \times \overline{5^2} + \overline{5^3}
 \end{aligned}$$

64.....	=	$\overline{400^3}$	475
336.....	=	$3 \times \overline{400^2} \times 70$	475
588.....	=	$3 \times \overline{400} \times \overline{70^2}$	2375
343...	=	$\overline{70^3}$	3325
33135..	=	$3 \times \overline{470^2} \times 5$	1900
3525.	=	$3 \times \overline{470} \times \overline{5^2}$	225625
125 =	5^3		475
			1128125
			1579375
			902500
107171875			107171875

§. 110.

Wenn man das eben beschriebene Verfahren, eine Cubikzahl aus allen Theilen der Wurzel zusammen zu setzen, mit einiger Aufmerksamkeit betrachtet, so wird man leicht nachstehende Bemerkungen daraus ziehen können.

I. Der Cubus einer einzigen Ziffer kann nicht über drey Ziffern haben.

II. Von einer Zahl mit zwey Ziffern hat der Cubus zum wenigsten vier, er kann aber nicht mehr als sechs Ziffern haben.

III. Von einer Zahl, die mit vier, fünf, oder sechs Ziffern geschrieben wird, hat die Cubikwurzel weder mehr noch weniger als zwey Ziffern. Wenn man daher eine solche Zahl von der rechten Hand gegen die linke in Klassen theilt, so daß die rechte Klasse drey Ziffern, die linke aber eine, zwey, oder auch drey bekommt, so ergeben sich so viele Klassen, als die Wurzel Theile hat.

IV. Der größte Cubus, den die linke Klasse enthält, ist immer der Cubus des ersten Theils der Wurzel, auch ist dieser immer von der Ordnung der Tausender und die letzte Ziffer desselben die Nullen ungerechnet, kommt folglich an die vierte Stelle von dem Orte der einfachen Einheiten nach der Linken zu, seine übrigen Ziffern aber, deren höchstens noch zwey seyn können, stehen von da an weiter nach der Linken zu.

V. Das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten Theil endigt sich, die Nullen ungerechnet, in der nächstvorhergehenden Stelle zur Rechten, oder in der dritten Stelle von dem Orte der einfachen Einheiten an gegen die Linke zu, und dessen übrige Ziffern stehen gleichfalls von da weiter nach der Linken zu.

VI. Das dreyfache Product aus dem Quadrate des zweyten Theils in den ersten Theil endigt sich wieder um eine Stelle näher gegen die Rechte,

oder in der zweyten Stelle von dem Orte der einfachen Einheiten an gegen die Linke zu.

VII. Die Cubikzahl des zweyten Theils der Wurzel endigt sich allemal in der Stelle der einfachen Einheiten, ohne von da an weiter nach der Rechten sich zu erstrecken.

VIII. Der Cubus einer vieltheiligen Wurzel enthält die Cubikzahlen aller Theile der Wurzel, die dreyfachen Producte aus dem Quadrate jeder Summe aller vorhergehenden Theile in den nächstfolgenden, und die dreyfachen Producte aus jeder Summe aller vorhergehenden Theile in das Quadrat des nächstfolgenden.

IX. Theilt man die Cubikzahl einer vieltheiligen Wurzel von der Rechten gegen die Linke in Klassen, jede zu drey Ziffern, ausgenommen die letzte, welche auch zwey oder nur eine enthalten kann, so erhält man so viele Klassen, als die Wurzel Theile hat, und mit der letzten oder niedrigsten Ziffer einer jeden Klasse endigt sich allemal eine von den Cubikzahlen der Theile der Wurzel, deren übrige Ziffern sich noch weiter nach der linken Hand zu erstrecken können.

X. In der Mitte einer jeden Klasse endigt sich allemal das dreyfache Product aus dem Quadrate der nachfolgenden Ziffern der Wurzel in alle vorhergehenden Ziffern derselben.

XI. Am Anfange einer jeden Klasse aber endigen sich die dreyfachen Producte aus dem Quadrate der vorhergehenden Ziffern in die nachfolgenden. Beyde können von da noch weiter gegen die linke Hand zu sich erstrecken.

XII. Zu der ersten Klasse zur Linken ist, außer dem, was von den eben gedachten Producten in dieselbe herübergetragen worden, bloß der Cubus des ersten Theils der Wurzel enthalten; der Cubus der niedrigsten Ziffer der Wurzel aber ist immer auch der niedrigste Theil des Cubus der ganzen Zahl.

§. III.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun ungehindert zur wirklichen Ausziehung der Cubikwurzel fortgehen.

Eine Zahl, aus welcher die Cubikwurzel gezogen werden soll, hat entweder nicht mehr oder sie hat mehr als sechs Ziffern.

Hat die vorgegebene Cubikzahl nicht mehr als sechs Ziffern, so hat man folgendes Verfahren zu beobachten.

- I. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in zwey Klassen, so daß in die rechte drey Ziffern, in die linke aber die übrigen kommen; hierauf ziehe man von der linken Klasse den größten Cubus, der darin enthalten ist, ab, und setze dessen Wurzel, als den ersten Theil, oder den Zehner, der gesuchten Cubikwurzel, in den Quotienten.
- II. Zu dem nach Nro. I. gefundenen Reste ziehe man die rechte Klasse herunter, quadrire den gefundenen ersten Theil der Wurzel, nehme dieses Quadrat dreyimal, und fange dieses dreyfache Quadrat unter der höchsten Ziffer der letzten Klasse zu schreiben an, so daß die übrigen Ziffern desselben von da weiter gegen die Linke zu stehen kommen.
- III. Man dividire damit, die darüber stehenden Zahlen, so ist der Quotient nicht kleiner, er kann aber größer seyn als der zweyte Theil der Wurzel.
- IV. Man multiplicire ihn also mit dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils, und das Product fange man unter der höchsten Ziffer der rechten Klasse zu schreiben an.
- V. Hierauf mache man das Quadrat von dem zweyten Theile des Quotienten, multiplicire solches mit dem ersten Theile, nehme das Product dreyimal, und fange es unter der mittleren Ziffer der rechten Klasse zu schreiben an.

VI. Man mache nun auch den Cubus vom zweyten Theile des Quotienten, und fange solchen unter der niedrigsten Ziffer der rechten Klasse zu schreiben an.

VII. Hierauf addire man die (nach Nro. IV — VI.) gefundenen Größen, so ist ihre Summe entweder eben so groß, oder größer, oder kleiner, als der Rest der ersten Klasse mit der zweyten zusammen genommen. Im ersten Falle ist der Quotient richtig die gesuchte Cubikwurzel. Im andern muß man den zweyten Theil des Quotienten so lange vermindern, und das Verfahren (von Nro. IV — VII.) wiederholen, bis man eine Summe bekommt, die nicht größer ist, als der gedachte Rest samt der rechten Klasse.

Im dritten Falle endlich ist die gesuchte Wurzel größer als der gefundene Quotient, aber nicht um eine ganze Einheit. Man kann folglich alsdann zwey Zahlen angeben, die nur um eins unterschieden sind, und zwischen welche die gesuchte Wurzel fällt.

$ \begin{array}{r} 110 \overline{) 592} 48 \\ \underline{64} \\ 46592 \\ 3 \times 1^2 \times 11 = (48) \\ 3 \times 1^2 \times 11 = 384 \\ 3 \times 1 \times 11^2 = 768 \\ 11^3 = 512 \\ \hline 46592 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 117 \overline{) 649} 49 \\ \underline{64} \\ 53649 \\ 3 \times 1^2 \times 11 = (48) \\ 3 \times 1^2 \times 11 = 432 \\ 3 \times 1 \times 11^2 = 972 \\ 11^3 = 729 \\ \hline 53649 \end{array} $
$ \begin{array}{r} 42 \overline{) 875} 35 \\ \underline{27} \\ 15875 \\ 3 \times 1^2 \times 11 = (27) \\ 3 \times 1^2 \times 11 = 135 \\ 3 \times 1 \times 11^2 = 225 \\ 11^3 = 125 \\ \hline 15875 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 9 \overline{) 261} 21 \\ \underline{8} \\ 1261 \\ 3 \times 1^2 \times 11 = (12) \\ 3 \times 1^2 \times 11 = 12 \\ 3 \times 1 \times 11^2 = 6 \\ 11^3 = 1 \\ \hline 1261 \end{array} $

§. 112.

Wenn hingegen die vorgegebene Zahl, woraus die Cubikwurzel gezogen werden soll, mehr als sechs Ziffern hat, so verfähre man folgendermaßen:

- I. Man theile die Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen, so daß jede Klasse drey Ziffern enthält, bis auf die erste bey der Linken, welche auch zwey oder nur eine enthalten kann, so hat die Wurzel so viele Ziffern als man Klassen erhält.
- II. Aus den beyden höchsten Klassen suche man die beyden höchsten Theile der Wurzel ganz nach der für den ersten Fall gegebenen Anweisung.
- III. Zu dem, was nach Beobachtung dieser Anweisung von den beyden höchsten Klassen übrig bleibt, ziehe man die nächstfolgende Klasse herunter, betrachte nun die beyden gefundenen Ziffern des Quotienten zusammen als den ersten Theil, und die, welche man zunächst finden soll, als den zweyten Theil der Wurzel, und suche die dritte Ziffer desselben nach den für den ersten Fall gegebenen Regeln.
- IV. Hat man diese gefunden, so sehe man jetzt die drey gefundenen Ziffern des Quotienten zusammen als den ersten, die nun zu findende vierte aber als den zweyten Theil der Wurzel an, und suche aus den ersten drey Ziffern derselben die vierte, eben so wie man aus den ersten zwey die dritte gefunden hat, und dies Verfahren setze man so lange fort, als noch Ziffern zu finden übrig sind. Der Beweis ist für den ersten Fall in den Sätzen I — VII. für den andern in den Sätzen VIII — XII. des 110. §. enthalten.

$$\begin{array}{r}
 9|638|375|215 \\
 \hline
 8 \\
 1938 \\
 3 \times 3 \times 1^2 = (12) \\
 3 \times 1^2 \times 11 = 12 \\
 3 \times 1 \times 11^2 = 6 \\
 11^3 = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1261 \\
 \hline
 677375 \\
 3 \times 3 \times 1^2 = (1323) \\
 3 \times 1^2 \times 11 = 6615 \\
 3 \times 1 \times 11^2 = 1575 \\
 11^3 = 125 \\
 \hline
 677375
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 485|587|656|786 \\
 \hline
 343 \\
 142587 \\
 3 \times 3 \times 1^2 = (147) \\
 3 \times 1^2 \times 11 = 1176 \\
 3 \times 1 \times 11^2 = 1344 \\
 11^3 = 512 \\
 \hline
 131552
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11035656 \\
 3 \times 3 \times 1^2 = (18252) \\
 3 \times 1^2 \times 11 = 109512 \\
 3 \times 1 \times 11^2 = 8424 \\
 11^3 = 216 \\
 \hline
 11035656
 \end{array}$$

§. 113.

Daß die Wurzeln derjenigen Zahlen, welche zwischen die vollkommenen Cubikzahlen hineinfallen, oder der unvollkommenen Cubikzahlen sich niemals genau angeben lassen, kann auf dieselbe Art und durch die nämlichen Schlüsse erwiesen werden, deren wir uns oben

in §. 104. bedient haben, um dies von den Wurzeln der unvollkommenen Quadratzahlen zu zeigen; wobey abermal als bekannt vorausgesetzt wird, daß man, um die Cubikzahl eines Bruchs zu erhalten, oder um einen Bruch in den Cubus zu erheben, sowohl seinen Zähler als seinen Nenner in den Cubus erheben, und daß man umgekehrt, um die Cubikwurzel eines Bruchs zu erhalten, sowohl aus seinem Zähler, als aus seinem Nenner die Cubikwurzel ausziehen müsse. Nichtsdestoweniger aber kann man auch die Wurzeln unvollkommener Cubikzahlen so genau finden, als man sie irgend nöthig haben mag, und zwar durch eine Näherungsmethode, die derjenigen, welche wir in §. 105. zur Ausziehung der Quadratwurzel aus unvollkommenen Quadratzahlen angegeben haben, ganz ähnlich, und nur darin von ihr unterschieden ist, daß hier die Nullen in Klassen, deren jede ihrer drey enthält, der unvollkommenen Cubikzahl gleich Anfangs, oder erst am Ende dem jedesmaligen Reste, angehängt werden, weil, wie man durch die Multiplication leicht finden kann, in der Cubikzahl eines Decimalbruchs von der letzten Ziffer an bis zum Orte der einfachen Einheiten immer dreyimal so viel Ziffern stehen, als in der Wurzel; wo man sodann für jede angehängte Klasse Nullen eine neue Ziffer der Wurzel von den niedrigeren Ordnungen erhält. Das nämliche gilt auch von den Cubikwurzeln der Decimalbrüche, wobey man abermal das, was in §. 106. in Absicht des Theilungszeichens erinnert worden ist, in Acht zu nehmen hat.

3. B. man verlangt die Cubikwurzel von 6321045 bis auf Hunderttheile.

$$\begin{array}{r}
 6 \overline{) 321045} 184,89 \\
 \underline{I} \\
 5321 \\
 3 \times 3 \times 1^2 = (3) \\
 3 \times 1^2 \times II = 24 \\
 3 \times I \times II^2 = 192 \\
 \underline{II^3 = 512} \\
 4832 \\
 489045 \\
 3 \times 3 \times 1^2 = (972) \\
 3 \times 1^2 \times II = 3888 \\
 3 \times I \times II^2 = 864 \\
 \underline{II^3 = 64} \\
 397504 \\
 91541000 \\
 3 \times 3 \times 1^2 = (101568) \\
 3 \times 1^2 \times II = 812544 \\
 3 \times I \times II^2 = 35328 \\
 \underline{II^3 = 512} \\
 81608192 \\
 9932808000 \\
 3 \times 3 \times 1^2 = (10245312) \\
 3 \times 1^2 \times II = 92207808 \\
 3 \times I \times II^2 = 449064 \\
 \underline{II^3 = 729} \\
 9225272169 \\
 70753531
 \end{array}$$

Man verlangt die Cubikwurzel von 126,52 bis auf Hunderttheile.

$$\begin{array}{r}
 126, | 520 | 5,02 \\
 125 \\
 \hline
 1520 \\
 3 \times 1^2 = (75) \\
 \hline
 1520000 \\
 3 \times 1^2 \times 1^2 = (7500) \\
 3 \times 1^2 \times 11 = 15000 \\
 3 \times 1 \times 11^2 = 600 \\
 11^3 = 8 \\
 \hline
 1506008 \\
 \hline
 13992
 \end{array}$$

Man verlangt die Cubikwurzel von 0,0000065 in
Tausendtheilen.

$$\begin{array}{r}
 0, | 000 | 006 | 500 | 0,018 \\
 1 \\
 \hline
 5500 \\
 3 \times 1^2 = (3) \\
 3 \times 1^2 \times 11 = 24 \\
 3 \times 1 \times 11^2 = 192 \\
 11^3 = 512 \\
 \hline
 4832 \\
 \hline
 668
 \end{array}$$