

Sechster Abschnitt.

Von den Theilern der Zahlen.

§. 73.

Die Lehre von dem Aufheben der Brüche führte uns oben (§. 31.) auf das Bedürfnis, das größte gemeine Maaß zweyer Zahlen zu finden. Dasselbst wurde auch schon der Unterschied zwischen einfachen und zusammengesetzten Zahlen, samt den übrigen dazu gehörigen Grundbegriffen erklärt und kürzlich gezeigt, worauf es bey Auffuchung des gemeinen Maaßes mehrerer Zahlen hauptsächlich ankomme; aber die Auseinandersezung des dabey zu beobachtenden Verfahrens mußte, um eine allzulange Unterbrechung zu vermeiden, bis hieher verschoben werden. Ehe wir nun dazu schreiten können, muß der Unterschied der einfachen und zusammengesetzten Zahlen vorher noch etwas weiter entwickelt, und einige darauf beruhende Sätze von den Theilern der Zahlen vorausgeschickt werden.

§. 74.

Zusammengesetzte Zahlen sind (nach §. 31.) solche, welche durch Multiplication aus andern einfachen Zahlen entstanden sind; folglich sind vermöge des Gegensatzes, einfache Zahlen solche, welche nicht wiederum aus andern durch Multiplication entstanden sind. So sind z. B. alle geraden Zahlen, ausser der Zahl 2, zusammengesetzte, die Zahl 2 hingegen und die meisten ungeraden Zahlen einfache. Die einfachen Zahlen,

welche man sonst auch Primzahlen nennt, werden demnach als die Factoren der zusammengesetzten, und diese als die Producte von jeuen betrachtet, und hieraus erklären sich die Redensarten: eine Zahl aus ihren Factoren zusammensetzen, und sie in ihre Factoren zerfallen. Da nun alle Factoren eines Productes das Product auch ohne Rest dividiren, eine Zahl aber, die eine andere ohne Rest dividirt, ein Maaß oder ein Theiler der andern heißt, so sind mithin die Primzahlen die Maaße, oder die Theiler der zusammengesetzten; hingegen haben die Primzahlen kein anderes Maaß, als sich selbst und die Einheit. Dividirt nun einerley Zahl mehrere andere ohne Rest, so heißt sie das gemeinschaftliche Maaß dieser andern, und sie heißt ihr größtes gemeinschaftliches Maaß, wenn keine größere Zahl sie alle ohne Rest dividirt. Z. B. die Zahl 3 ist ein gemeinschaftliches Maaß der Zahlen 15, 24, 36, denn sie dividirt sie alle ohne Rest, und weil keine andere größere Zahl diese drey Zahlen auch ohne Rest dividirt, so ist die Zahl 3 ihr größtes gemeinschaftliches Maaß. Die Einheit ist demnach das gemeinschaftliche Maaß aller Zahlen, und jede Zahl ein Maaß, und zwar das größte Maaß, von ihr selbst. Haben mehrere Zahlen, die zwar selbst zusammengesetzte Zahlen sind, doch kein gemeinschaftliches Maaß, so werden sie Primzahlen unter sich genannt. So sind z. B. die Zahlen 8, 21, 25, an sich selbst keine Primzahlen, sondern zusammengesetzte, aber sie sind Primzahlen unter sich, weil sie kein gemeinschaftliches Maaß haben.

§. 75.

Die merkwürdigsten Eigenschaften der Theiler der Zahlen, so weit sie zu unserm gegenwärtigen Zwecke gehören, sind in folgenden Sätzen enthalten.

- I. Jede Zahl ist entweder eine Primzahl, oder eine aus Primzahlen zusammengesetzte Zahl.

Denn ist sie keine Primzahl, so besteht sie aus Factoren. Sind nun diese Factoren auch zusammengesetzt, so lassen sie sich aufs neue in Factoren zerfallen, und das so lange fort, bis man endlich auf Primzahlen

ten kommt. 3. B. die Zahl 360 ist eine zusammengesetzte Zahl, denn sie besteht aus den Factoren 12 und 30, oder es ist $360 = 12 \times 30$; diese beyden Factoren sind aber selbst auch zusammengesetzte Zahlen, denn der erstere läßt sich wiederum in die Factoren 3 und 4, der letztere hingegen in die Factoren 5 und 6 zerfallen; es ist also auch $360 = 3 \times 4 \times 5 \times 6$. Unter diesen sind nun die Zahlen 4 und 6 noch zusammengesetzt; zerfällt man also auch diese in ihre Factoren, so findet man endlich $360 = 3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 3$, und dies sind nun lauter Primzahlen.

II. Eine Zahl, die in einem von den Factoren eines Products aufgehet, muß auch in dem Producte selbst aufgehen; denn sie ist alsdann auch ein Factor des Products. 3. B. die Zahl 42 ist ein Product aus den Factoren 6 und 7, oder es ist $42 = 6 \times 7$. Nun gehet in dem einen Factor 6 die Zahl 3 auf, folglich muß eben diese Zahl 3 auch in dem Producte 42 aufgehen.

Denn wenn man die Zahl 6 in ihre Factoren zerfällt, so findet man $6 = 2 \times 3$, und demnach $42 = 2 \times 3 \times 7$, folglich ist die Zahl 3 auch ein Factor des Products 42, und muß also nothwendig in demselben aufgehen.

III. Eine Zahl, die in zwey andern Zahlen aufgehet, muß auch in der Summe dieser beyden Zahlen aufgehen.

Denn da sie in den beyden Zahlen aufgehet, so ist sie sowohl in der einen als in der andern ein oder etlichemal, folglich in beyden zusammen etlichemal, ohne Rest enthalten, und gehet also in der Summe der beyden Zahlen auf. 3. B. die Zahl 7 gehet sowohl in der Zahl 14 als in der Zahl 56 auf, denn sie ist in der ersten zweymal und in der letzten achtmal enthalten, sie muß also auch in der Summe 70 dieser beyden Zahlen aufgehen, da sie so oft darin enthalten ist, als in beyden Summanden zusammen, nämlich $8 + 2$ mal, das ist, 10mal.

IV. Eine Zahl, die in der Summe zweyer Zahlen und in einer von den beyden Zahlen selbst aufgehet, muß auch in der andern aufgehen.

Denn da sie, nach der Voraussetzung, in einer von den beyden Zahlen, und in der Summe ein oder etlichemal ohne Rest enthalten ist, so muß sie auch in der andern ein oder etlichemal ohne Rest enthalten seyn, und also auch in derselben aufgehen. Z. B. die Zahl 98 ist die Summe der Zahlen 35 und 63, oder es ist $98 = 35 + 63$. Nun gehet die Zahl 7 in der Summe 98, und in dem einen von den Summanden 63 auf, denn 7 ist in 98 14mal und in 63 9mal enthalten, folglich muß eben diese Zahl 7 auch in dem andern Summanden 35 etlichemal enthalten seyn, und also darin aufgehen; wie sich dies auch wirklich verhält, indem 7 in 35 5mal enthalten ist.

V. Wenn von zwey Zahlen die kleinere in der größeren aufgehet, so ist sie das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen.

Denn da die kleinere in ihr selbst, und, nach der Voraussetzung, auch in der größeren aufgehet, so ist sie ein gemeinschaftliches Maaß von beyden, und zwar das größte gemeinschaftliche Maaß, weil offenbar keine größere Zahl in der kleineren aufgehen kann. Z. B. die Zahl 45 ist das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 90 und 45, denn sie gehet in der Zahl 90 auf, da sie zweymal darin enthalten ist, sie gehet aber in ihr selbst auf, weil sie gerade einmal in ihr enthalten ist; aber eine größere Zahl, als die Zahl 45 selbst ist, kann unmöglich in derselben aufgehen, folglich ist die Zahl 45 das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen 90 und 45.

VI. Wenn von zwey Zahlen die kleinere in der größeren nicht aufgehet, so kann das gemeinschaftliche Maaß von beyden nicht größer seyn, als der Rest, welcher sich bey der Division der größeren durch die kleinere ergibt.

Denn die größere Zahl besteht aus dem Producte der kleineren in den Quotienten und dem Reste, oder die größere ist die Summe des Productes der kleineren in den Quotienten, und des Restes. Ein gemeinschaftliches Maaß beyder Zahlen gehet also in der Summe des Productes aus der kleineren in den Quotienten und

des Restes, und (nach Nro. II.) in dem Producte der kleineren in den Quotienten selbst, welches der eine von den Summanden dieser Summe ist, auf, und muß daher (nach Nro. IV.) auch im Reste, als dem andern Summanden, aufgehen, kann also nicht größer seyn, als dieser Rest. 3. B. es seyen die zwey Zahlen 75 und 36, wenn man die erstere derselben durch die letztere dividirt, so findet man zum Quotienten 2 und zum Rest 3; demnach ist $75 = 2 \times 36 + 3$, und folglich gehet ein gemeinschaftliches Maaß der beyden Zahlen 75 und 36 in der Summe des Productes 2×36 der kleineren Zahl 36 in den Quotienten 2, und des Restes 3, und in dem Producte 2×36 der kleineren Zahl 36 in den Quotienten 2 auf, und muß daher auch in dem Reste 3 aufgehen, kann also nicht größer, als dieser, seyn.

VII. Wenn von zwey Zahlen die kleinere in der größeren nicht aufgehet, aber wohl der Rest in der kleineren, so ist der Rest das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen.

Denn wenn der Rest in der kleineren Zahl aufgehet, so gehet er (nach Nro. II.) auch in dem Producte der kleineren Zahl in den Quotienten auf, er gehet aber auch in sich selbst auf, und folglich (nach Nro. III.) auch in der Summe des Productes der kleineren Zahl in den Quotienten und des Restes, das ist in der größeren Zahl, und ist also ein gemeinschaftliches Maaß der beyden Zahlen und zwar nach (Nro. VI.) das größte. 3. B. es seyen die zwey Zahlen 86 und 28, dividirt man die größere durch die kleinere, so findet man zum Reste 2. Dieser Rest 2 gehet nun in der kleineren Zahl 28 auf und folglich auch in dem Producte 3×28 der kleineren Zahl 28 in den Quotienten 3; er gehet aber auch in sich selbst auf, und folglich auch in der Summe $3 \times 28 + 2$ des Productes der kleineren Zahl in den Quotienten, und des Restes, welche Summe der größeren Zahl 86 gleich ist; dieser Rest ist also ein gemeinschaftliches Maaß der beyden Zahlen 86 und 28, und er ist das größte gemeinschaftliche Maaß derselben, weil in ihm selbst keine größere Zahl aufgehen kann.

VIII. Wenn von zwey Zahlen die kleinere in der größeren, und auch der Rest in der kleineren, nicht aufgehet, so ist das größte gemeinschaftliche Maaß der kleineren Zahl und des Rests auch das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden ersten Zahlen.

Denn hätten die beyden Zahlen noch ein größeres Maaß, so müßte dasselbe (nach Nro. VI.) auch im Reste aufgehen, und wäre folglich ein gemeinschaftliches Maaß der kleineren Zahl und des Rests, und zwar noch größer als das, was vorher schon als das größte angenommen war, welches widersprechend ist. Z. B. es seyen die beyden Zahlen 96 und 34, von dieser gehet die kleinere in der größeren nicht auf, sondern es bleibt bey der Division der Rest 28, aber auch dieser Rest gehet in der kleineren 34 nicht auf. Nun ist die Zahl 2 das größte gemeinschaftliche Maaß der kleineren Zahl 34 und des Rests 28; wäre diese nun nicht auch das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden ersten Zahlen 96 und 34, sondern hätten diese noch ein größeres, so müßte dasselbe auch in dem Reste 28 aufgehen, und wäre folglich ein gemeinschaftliches Maaß der kleineren Zahl 34, und des Rests 28, und zwar wäre es noch größer, als die Zahl 2, welche man vorher schon als das größte gemeinschaftliche Maaß der kleineren Zahl 34 und des Rests 28 angenommen hatte, welches ein offener Widerspruch ist.

§. 76.

Wenn man nun das größte gemeinschaftliche Maaß zweyer Zahlen finden soll, so verfahre man also:

- I. Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; gehet diese in ihr auf, so ist sie selbst das größte gemeinschaftliche Maaß beyder Zahlen. Z. B. so ist die Zahl 14 das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen 14 und 56, und die Zahl 17 das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen 136 und 17.

14) 56)4

17) 136)8

II. Wenn aber die kleinere Zahl in der größeren nicht aufgehet, so dividire man die kleinere Zahl mit dem Reste; gehet nun der Rest in der kleineren Zahl auf, so ist dieser Rest das größte gemeinschaftliche Maaß beyder Zahlen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 21) 49)2 \\ \underline{42} \\ 7) 21)3 \\ \underline{21} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12) 66)5 \\ \underline{60} \\ 6) 12)2 \\ \underline{12} \\ \hline \end{array}$$

III. Bleibt aber bey der zweyten Division auch wieder ein Rest, so dividire man damit abermal den letzten Divisor, und fahre so immer fort, bis man zuletzt auf einen Rest kommt, welcher im vorigen Divisor aufgehet, so ist dieser Rest das größte gemeinschaftliche Maaß der ersten beyden Zahlen. Bekommt man aber bey diesem Verfahren zum letzten Reste 1, so ist dies eine Anzeige, daß die beyden gegebenen Zahlen kein anderes gemeinschaftliches Maaß, als die Einheit, haben, also Primzahlen unter sich sind. Z. B. es soll das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen 34 und 66 gefunden werden, so stehet die Rechnung also:

$$\begin{array}{r} 34) 66)1 \\ \underline{34} \\ 32) 34)1 \\ \underline{32} \\ 2) 32)16 \\ \underline{32} \\ \hline \end{array}$$

Eben so findet man das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 176 und 284, 256 und 1388, 125 und 365.

$$\begin{array}{r}
 176) 284 \overline{) 1} \quad 256) 1388 \overline{) 5} \quad 125) 365 \overline{) 2} \\
 \underline{176} \quad \underline{1280} \quad \underline{250} \\
 108) 176 \overline{) 1} \quad 108) 256 \overline{) 2} \quad 115) 125 \overline{) 1} \\
 \underline{108} \quad \underline{216} \quad \underline{115} \\
 68) 108 \overline{) 1} \quad 40) 108 \overline{) 2} \quad 10) 115 \overline{) 11} \\
 \underline{68} \quad \underline{80} \quad \underline{110} \\
 40) 68 \overline{) 1} \quad 28) 40 \overline{) 1} \quad 5) 10 \overline{) 2} \\
 \underline{40} \quad \underline{28} \quad \underline{10} \\
 28) 40 \overline{) 1} \quad 12) 28 \overline{) 2} \\
 \underline{28} \quad \underline{24} \\
 12) 28 \overline{) 2} \quad 4) 12 \overline{) 3} \\
 \underline{24} \quad \underline{12} \\
 4) 12 \overline{) 3} \\
 \underline{12}
 \end{array}$$

Der Beweis der Richtigkeit dieses Verfahrens erhellt:

für Nro I. aus Nro V. des vorigen §.

für Nro II. aus Nro VII. des vorigen §.

für Nro III. aus Nro VIII. des vorigen §.

Denn da im dritten Falle der nach dem eben beschriebenen Verfahren gefundene Rest das größte gemeinschaftliche Maaß für das letzte Paar Zahlen ist, so ist er es auch (nach Nro. VIII. des vorigen §.) für das vorhergehende Paar, und so immer weiter zurück für alle vorhergehenden Paare bis auf das erste.

§. 77.

Sind aber mehr als zwei Zahlen gegeben, und man soll ihr größtes gemeinschaftliches Maaß finden, so ordne man diese Zahlen nach ihrer Größe, so, daß die kleinste die erste, und die größte die letzte wird; alsdann suche man zuerst das größte gemeinschaftliche Maaß der ersten beyden Zahlen. Hat man dieses gefunden, so betrachte man es nun als die erste Zahl und suche von dieser und von der dritten Zahl das größte gemeinschaftliche Maaß. Dieses betrachte man hierauf wiederum als die erste Zahl, und suche nun

eben so von dieser und der vierten das größte gemeinschaftliche Maaß, und so fahre man immer fort, bis man mit allen gegebenen Zahlen zu Ende ist, so ist das größte gemeine Maaß des letzten Paares Zahlen auch das größte gemeinschaftliche Maaß aller gegebenen Zahlen.

Der Beweis der Richtigkeit dieses Verfahrens fließt aus eben den Gründen, wie im vorigen §.

3. B. es soll das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 105, 60, 25, 135 gesucht werden.

$\begin{array}{r} 25 \\ 60 \\ 105 \\ 135 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 25) 60 \overline{) 2} \\ \underline{50} \\ 10 25 \overline{) 2} \\ \underline{20} \\ 5 \overline{) 10 \overline{) 2} \\ \underline{10} \end{array}$	$\begin{array}{r} 5) 105 \overline{) 21} \\ \underline{10} \\ 5 \\ \underline{5} \end{array}$	$\begin{array}{r} 5) 135 \overline{) 27} \\ \underline{10} \\ 35 \\ \underline{35} \end{array}$
---	---	---	---

Eben so findet man das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 85, 119, 51, 153.

$\begin{array}{r} 51 \\ 85 \\ 119 \\ 153 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 51) 85 \overline{) 1} \\ \underline{51} \\ 34 51 \overline{) 1} \\ \underline{34} \\ 17 34 \overline{) 2} \\ \underline{34} \end{array}$	$\begin{array}{r} 18) 119 \overline{) 6} \\ \underline{102} \\ 17 17 \overline{) 1} \\ \underline{17} \end{array}$	$\begin{array}{r} 17) 153 \overline{) 9} \\ \underline{153} \end{array}$
---	--	--	--

Eben so kann man auch das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 46, 115, 138, 92, 207, 161 finden.

$\begin{array}{r} 46 \\ 92 \\ 115 \\ 138 \\ 161 \\ 207 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 46) 92 \overline{) 2} \\ \underline{92} \\ 23 46 \overline{) 2} \\ \underline{46} \end{array}$	$\begin{array}{r} 46) 115 \overline{) 2} \\ \underline{92} \\ 23 46 \overline{) 2} \\ \underline{46} \end{array}$	$\begin{array}{r} 23) 138 \overline{) 6} \\ \underline{138} \end{array}$	$\begin{array}{r} 23) 161 \overline{) 7} \\ \underline{161} \end{array}$	$\begin{array}{r} 23) 207 \overline{) 9} \\ \underline{207} \end{array}$
---	--	---	--	--	--

§. 78.

Die in den beyden vorigen §§. gegebenen Regeln das größte gemeinschaftliche Maaß, oder den größten gemeinschaftlichen Theiler zweyer oder mehrerer Zahlen zu finden, sind ganz allgemein, und gelten für alle Fälle, die gegebenen Zahlen mögen seyn, welche man immer will. Es giebt aber auch einige besondere Kennzeichen, deren man sich zur Auffuchung der gemeinschaftlichen Theiler mehrerer Zahlen öfters mit Vortheil und Bequemlichkeit bedienen kann. Die merkwürdigsten derselben werden in folgenden Sätzen angegeben:

I. Alle Zahlen, deren letzte Ziffer eine von diesen ist: 0, 2, 4, 6, 8, oder, mit einem Worte, alle geraden Zahlen lassen sich durch 2 dividiren; denn sie sind alle durch Zusammensetzung der Zahl 2 mit andern Zahlen entstanden.

II. Alle Zahlen, deren letzte Ziffer 5 oder 0 ist, lassen sich durch 5 dividiren, denn sie sind auch durch Zusammensetzung der Zahl 5 mit andern Zahlen entstanden.

III. Alle Zahlen, welche am Ende eine 0 haben, die sonst auch runde Zahlen genannt werden, lassen sich durch 10 dividiren; eben so lassen sich alle Zahlen, die am Ende zwey Nullen haben, durch 100, alle die am Ende drey Nullen haben, durch 1000 u. s. w. dividiren; denn sie sind durch Zusammensetzung der letzteren mit andern Zahlen entstanden.

IV. Alle Zahlen, welche, wenn man ihre Ziffern alle als einfache Einheiten ansieht, und von denselben 3 so oft wegwirft, als man kann, nichts übrig lassen, oder welche, wenn man ihre Ziffern ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit ihrer Ordnungen addirt, eine Zahl geben, die sich durch 3 dividiren läßt, lassen sich auch durch 3 dividiren.

Denn wenn man die Zahlen, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. durch 3 multiplicirt, so bekommt man zu Producten

lauter Summen, welche 3 verschiedenemal enthalten, es ist nämlich $1 \times 3 = 3$, $2 \times 3 = 3 + 3$, $3 \times 3 = 3 + 3 + 3$ u. s. w.; diese Summen aber werden vermittelt unserer gewöhnlichen Ziffern dergestalt geschrieben, daß man 3×3 oder 9 verschiedenemal wegwirft und nur die übrigen 3 oder $3 + 3$ behält; wie man z. B. anstatt $3 + 3 + 3 + 3$ schreibt 12, welches, wenn man die Ziffern ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit ihrer Ordnungen addirt, nur 3 giebt. Demnach werden alle Producte, welche entstehen, indem eine Zahl, was für eine man will, durch 3 multiplicirt wird, durch Ziffern ausgedrückt, welche sich durch 3 dividiren lassen, wenn man mit ihnen auf die angewiesene Art verfährt. Z. B. die Zahl 65847 giebt, wenn man ihre Ziffern auf die angezeigte Art addirt, 30, diese Zahl aber ist durch 3 theilbar, folglich läßt sich auch die erstere durch 3 dividiren.

Eben so lassen sich auch die Zahlen 81740652 und 291750261 durch 3 dividiren, denn eine wie die andere giebt durch das beschriebene Verfahren 33, welches durch 3 theilbar ist.

V. Eben dieses gilt auch von der Zahl 9. Um den Grund davon einzusehen darf man nur in dem vorigen Satze und Beweis allenthalben anstatt 3, schreiben 3×3 . Z. B. die Zahl 26158302 giebt, wenn man ihre Ziffern auf die mehrerwähnte Art zusammenzählt, 27, da nun diese Zahl durch 9 theilbar ist, so läßt sich auch die erstere durch 9 dividiren. Eben so lassen sich die Zahlen 35072945 und 719086473 durch 9 dividiren, denn die erstere giebt, wenn man sie nach dem angewiesenen Verfahren behandelt, 36, und die letztere 45, welche beyde Zahlen durch 9 theilbar sind.

§. 79.

Wenn zwey Zahlen gegeben sind, und man soll die kleinste ihnen meßbare Zahl finden, so können die gegebenen Zahlen entweder Primzahlen oder zusammengesetzte Zahlen seyn.

- I. Wenn die gegebenen Zahlen Primzahlen unter sich sind, so multiplicire man die eine durch die andere, und das Product wird die kleinste ihnen beyden meßbare Zahl seyn. Z. B. die kleinste den beyden Zahlen 7 und 13 meßbare Zahl ist 91.

Denn da die gegebenen Zahlen in der ihnen meßbaren Zahl aufgehen müssen, so müssen sie Factoren derselben, und diese muß folglich ein Product von ihnen seyn. Da sie aber, nach der Voraussezung, als Primzahlen kein gemeinschaftliches Maaß haben, so giebt es kein kleineres Product von ihnen beyden, als dasjenige, welches entsteht, wenn man die eine mit der andern multiplicirt, und folglich ist das solchergestalt erhaltene Product die kleinste ihnen beyden meßbare Zahl.

- II. Wenn die gegebenen Zahlen zusammengesetzte Zahlen sind, so suche man (nach S. 76.) ihr größtes gemeinschaftliches Maaß, dividire durch dasselbe die eine von beyden, und multiplicire mit dem erhaltenen Quotienten die andere, so ist das Product die kleinste ihnen meßbare Zahl. So ist z. B. die kleinste den beyden 8 und 36 meßbare Zahl 72.

Denn da die gegebenen Zahlen, nach der Voraussezung, zusammengesetzte sind, so sind sie Producte, deren jedes aus dem gemeinschaftlichen Maaße beyder und aus einem eigenthümlichen Factor zusammengesetzt ist. Dividirt man nun die eine mit dem größten gemeinen Maaße beyder, so erhält man zum Quotienten ihren kleinsten eigenthümlichen Factor; multiplicirt man nun mit diesem die andere Zahl, so gehen, weil diese andere Zahl auch das größte gemeine Maaß beyder Zahlen als einen Factor enthält (nach S. 75. Nro II.), beyde Zahlen in diesem Producte auf. Da aber dieses Product durch Multiplication der einen Zahl in den kleinsten eigenthümlichen Factor der andern erhalten worden ist, so ist es die kleinste unter den Zahlen, worin die beyden gegebenen Zahlen aufgehen, und folglich die kleinste ihnen beyden meßbare Zahl.

§. 80.

Sind aber mehr als zwey Zahlen gegeben, und man soll die kleinste ihnen meßbare Zahl finden, so ordne man die gegebenen Zahlen nach ihrer Größe, so daß die kleinste die erste wird, alsdann suche man nach dem vorigen §. die kleinste den ersten beyden meßbare Zahl, zu dieser nehme man nun die dritte der gegebenen Zahlen, und suche eben so die kleinste diesen beyden meßbare Zahl, und so fahre man fort, bis man mit allen gegebenen Zahlen zu Ende ist, so ist die kleinste, dem letzten Paare meßbare, Zahl auch die kleinste allen gegebenen Zahlen meßbare Zahl.

Der Beweis wird, eben so, wie die Auflösung, auf den vorigen §. zurückgeführt. Z. B. die kleinste den drey Zahlen 6, 54, 72 meßbare Zahl wird also gefunden:

Gegebene Zahlen, 6, 54, 72.

$$\begin{array}{r} 6) 54 \overline{) 9} \\ \underline{54} \end{array}$$

54 = kleinste meßbare Zahl der beyden 6 und 54.

$$\begin{array}{r} 54) 72 \overline{) 1} \\ \underline{54} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18) 54 \overline{) 3} \\ \underline{54} \end{array}$$

72

3

216 = kleinste meßbare Zahl der drey gegebenen 6, 54 und 72.

Zweytes Beyspiel

die kleinste den fünf Zahlen 5, 6, 8, 9, 12 meßbare Zahl zu finden.

$$5 \times 6 = 30 = \text{kleinste meßbare Zahl der beyden 5 und 6.}$$

$$\begin{array}{r}
 8) 30 \overline{) 3} \\
 \underline{24} \\
 6) 8 \overline{) 1} \\
 \underline{6} \\
 2) 6 \overline{) 3} \\
 \underline{6} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2) 30 \overline{) 15} \\
 \underline{2} \\
 10 \overline{) 120} \\
 \underline{10} \\
 \hline
 \end{array}
 = \text{kleinste meßbare Zahl der}$$

drey Zahlen 5, 6, 8.

$$\begin{array}{r}
 9) 120 \overline{) 13} \\
 \underline{9} \\
 30 \\
 \underline{27} \\
 3) 9 \overline{) 3} \\
 \underline{9} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 13) 120 \overline{) 40} \\
 \underline{12} \\
 0 \overline{) 360} \\
 \hline
 \end{array}
 = \text{kleinste meßbare Zahl der}$$

vier Zahlen 5, 6, 8, 9.

$$\begin{array}{r}
 12) 360 \overline{) 30} \\
 \underline{36} \\
 0 \overline{) 60} \\
 \underline{30} \\
 \hline
 \end{array}
 = \text{kleinste meßbare Zahl der}$$

fünf gegebenen Zahlen 5, 6, 8, 9, 12.

§. 81.

Die bisherigen Lehren von dem Maaße und den Theilern der Zahlen finden ihre nächste und häufigste Anwendung bey dem Aufheben der Brüche und der Reduction derselben zu einerley Benennung.

Soll ein Bruch so aufgehoben werden, daß er auf den kleinsten möglichen Ausdruck gebracht werde, und

sein Zähler und Nenner sind so beschaffen, daß sie sich leicht in ihre einfachen Factoren zerfallen lassen, so ist die Sache am geschwindesten geschehen, wenn man beyde durch ihre einfachen Factoren ausdrückt. Denn alsdann ergeben sich sogleich die einfachen Factoren, welche beyde mit einander gemein haben, und womit man also beyde dividiren, oder welche man in beyden gegen einander wegstreichen kann. Z. B. der Bruch $\frac{20}{36}$ kann leicht aufgehoben werden, wenn man seinen Zähler und Nenner in ihre einfachen Factoren zerfällt, und mit dem, welcher beyden gemeinschaftlich ist, beyde dividirt; denn man findet auf diese Art $\frac{20}{36} = \frac{4 \times 5}{7 \times 5} = \frac{4}{7}$. Eben so findet man $\frac{18}{54} = \frac{3 \times 6}{9 \times 6} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Sind hingegen der Zähler und Nenner eines Bruchs von der Art, daß sich ihre einfachen Factoren nicht leicht finden lassen, so suche man (nach §. 76.) das größte gemeinschaftliche Maaß derselben, und dividire beyde damit, alsdann giebt der Quotient den kleinsten Ausdruck, auf welchen dieser Bruch gebracht werden kann. Z. B. es soll der Bruch $\frac{153}{172}$ auf den kleinsten Ausdruck gebracht werden, so findet man für das gemeinschaftliche Maaß des Zählers und Nenners die Zahl 9, und wenn man damit dividirt, so erhält man zum Quotienten $\frac{17}{19}$. Eben so findet man für den Bruch $\frac{372}{11}$ den kleinsten Ausdruck $\frac{6}{11}$.

§. 82.

Wenn mehrere Brüche gegeben sind, welche auf die kleinste gemeinschaftliche Benennung gebracht werden sollen, so suche man (nach §. 80.) die kleinste allen Nennern der gegebenen Brüche meßbare Zahl, dividire alsdann diese mit jedem der gegebenen Nenner und multiplicire den, einem jeden Nenner zugehörigen, Zähler mit dem jedesmaligen Quotienten, so giebt das solchergestalt gefundene Product den neuen Zähler eines jeden Bruchs, die zuerst gefundene Zahl aber ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner aller gegebenen Brüche. Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet aus folgenden Gründen:

Die kleinste allen Nennern der gegebenen Brüche meßbare Zahl ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner dieser Brüche. Dividirt man diesen mit jedem der gegebenen Nenner, so findet man zum Quotienten eben die Zahl, womit der gegebene Nenner multiplicirt werden mußte, um ihn zum kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu machen. Multiplicirt man also mit dem gefundenen Quotienten den, solchem Nenner zugehörigen, Zähler, so wird der Bruch im Zähler und Nenner gleichviel vergrößert, folglich (nach §. 19. Nro III.) ohne Veränderung seines Werths auf einen andern Ausdruck gebracht; und da der Nenner dieses neuen Bruchs die kleinste allen Nennern der gegebenen Brüche meßbare Zahl ist, so ist er auch ihr kleinster gemeinschaftlicher Nenner.

3. B. es sollen folgende Brüche $\frac{33}{184}$, $\frac{41}{360}$, $\frac{55}{456}$, auf die kleinste gemeinschaftliche Benennung gebracht werden, so sieht die Rechnung also:

184, 360, 402, 456
größtes gemeinsames Maaß der
beyden 184 und 360 = 8.

$$\begin{array}{r} 184 \cancel{L} \\ 176 \end{array} \quad \begin{array}{r} 184 \cancel{L} \\ 176 \end{array}$$

$$8) 184 \cancel{L} 23$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ 23 \\ \hline 1080 \\ 720 \end{array}$$

$$8) 176 \cancel{L} 22$$

8280 = kleinste meßbare Zahl von 184
und 360.

402) 8280 $\cancel{L} 20$ größtes gemeinsames
804 Maaß der beyden
240) 402 $\cancel{L} 1$ 402 und 8280 = 6.

$$6) 402 \cancel{L} 67$$

$$\begin{array}{r} 402 \cancel{L} \\ 240 \end{array} \quad \begin{array}{r} 402 \cancel{L} \\ 240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8280 \\ 67 \\ \hline 5796 \\ 4968 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 162 \cancel{L} \\ 162 \end{array} \quad \begin{array}{r} 162 \cancel{L} \\ 156 \end{array}$$

$$6) 78 \cancel{L} 13$$

554760 = kleinste meßbare Zahl von 402
und 8280.

$$\begin{array}{r}
 456 \overline{) 554760} 1216 \\
 \underline{456} \\
 987 \\
 \underline{912} \\
 756 \\
 \underline{456} \\
 3000 \\
 \underline{2736} \\
 264
 \end{array}$$
 größtes gemeinsames Maasß
 der beyden 456 und
 554760 = 24.

$$\begin{array}{r}
 24 \overline{) 456} 19 \\
 \underline{24} \\
 216 \\
 \underline{216} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 264 \overline{) 456} 1 \\
 \underline{264} \\
 192 \overline{) 264} 1 \\
 \underline{192} \\
 72 \overline{) 192} 2 \\
 \underline{144} \\
 48 \overline{) 72} 1 \\
 \underline{48} \\
 24 \overline{) 48} 2 \\
 \underline{48} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 554760 \\
 \underline{19} \\
 499284 \\
 \underline{55476} \\
 10540440 = \text{kleinste meßbare Zahl von 456} \\
 \text{und 554760 und folglich von} \\
 \text{allen gegebenen Nennern.}
 \end{array}$$

Erstes Beyspiel.

Gegebene Brüche.	$\frac{33}{184}$,	$\frac{41}{360}$,	$\frac{55}{456}$,	$\frac{77}{402}$
Quotienten.	57285,	29279,	23115,	26220
Neue Zähler.	1893485,	1200439,	1271325,	2018940
Kleinster Nenner.	10540440			

Zweytes Beyspiel.

Gegebene Brüche.	$\frac{5}{11}$,	$\frac{11}{27}$,	$\frac{13}{63}$
Quotienten.	9,	7,	3
Neue Zähler.	45,	77,	39
Kleinster Nenner.	189		

Drittes Beyspiel.

Gegebene Brüche.	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{6}{7}$,	$\frac{7}{9}$,	$\frac{5}{8}$
Quotienten.	168,	126,	42,	72,	56,	63
Neue Zähler.	336,	378,	210,	432,	392,	315
Kleinster Nenner.	504					