

Vierter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 41.

Das Wesen alles Rechnens besteht eigentlich darin, daß man Zahlen nach gewissen Regeln aus einander erfindet. Daß wir aber bey der Berechnung der einen Zahl diese, und bey der Berechnung einer andern eine andere Regel wählen, das geschieht deswegen, weil wir uns bey einer jeden Zahl, die wir suchen, eine besondere Art gedenken, wie sie aus einer andern Zahl bestimmt wird. Z. B. man sucht die Zahl, welche aus 28 bestimmt wird, wenn 54 dazu kommen. Man wendet also diejenige Regel an, von welcher man weiß, daß nach ihr Zahlen vermittelt dieser Bestimmungsart aus einander hergeleitet werden können. Verlangt man hingegen die Zahl zu wissen, welche bestimmt wird, wenn 28, 54mal genommen wird, so folgt man einer andern Regel, und findet auch eine ganz andere Zahl. Ferner wenn man weiß, daß 100 Pfunde einer gewissen Waare 35 Reichsthaler gelten, und man möchte gerne den Preis von 780 Pfunden eben dieser Waare wissen, so ist offenbar, daß dieser Preis aus der Zahl 35 auf eben die Art bestimmt werden müsse, wie die Zahlen der Gewichte 100 und 780 aus einander bestimmt werden. Man muß also wiederum eine andere Regel anwenden, um die gesuchte Zahl zu finden. Die Art nun, wie Größen und Zahlen aus einander entstehen, ist ihr Verhältniß. Es ist leicht

einzuſehen, daß einerley Zahl bald auf dieſe, bald auf eine andere Art entſtehen kann. Wenn man z. B. 6 zu 18 addirt, ſo entſteht 24; und wenn man 6, 4mal nimmt, ſo erhält man auch 24, aber auf eine ganz andere Art. Dort wurde nur zu der Zahl 6 die Zahl 18 geſetzt, welche der Unterſchied der Zahl 6 und der Zahl 24 war; Hier hingegen wurde die Zahl 6, 4mal zu ſich ſelbſt geſetzt. Wenn man 9 von 33 abzieht, ſo entſteht ebenfalls die Zahl 24, wie auch wenn man $\frac{1}{12}$ von 33, 8mal zu ſich ſelbſt addirt, und ſo wird man von dieſer einzigen Zahl 24 noch unendlich viele Beyſpiele geben können, in welchen ſie immer auf eine andere Weiſe entſtehet. Gleichwohl laſſen ſich alle noch ſo mannigfaltige Arten, wie Zahlen aus einander entſtehen können, unter folgenden zwey Hauptarten bringen: entweder entſteht nämlich eine Zahl aus einer andern durch Hinzufetzung oder Wegnehmung einer andern Zahl von dieſer, und dieſe Entſtehungsart der Zahlen heiſt ihr arithmetiſches Verhältniß; oder ſie entſtehet durch wiederholte Zuſammensetzung einer andern oder eines Theils derſelben, und dieſe Entſtehungsart heiſt das geometriſche Verhältniß derſelben. Daß eine oder das andere von dieſen Verhältniſſen hat allemal Statt, ſo oft man Zahlen aus einander beſtimmt oder herleitet.

§. 42.

Das Verhältniß zweyer Zahlen kann nicht ohne eine dritte Zahl eingesehen werden. Bey dem arithmetiſchen Verhältniſſe iſt dieſe Zahl der Unterſchied, und wird durch die Subtraction, bey dem geometriſchen aber iſt ſie der Quotient, und wird durch die Diviſion gefunden; ſie wird aber im letzten Falle nicht Quotient ſondern Exponent des Verhältniſſes genannt. So iſt z. B. bey den Zahlen 8 und 24 die Differenz, die ihr arithmetiſches Verhältniß anzeigt 16, der Exponent aber, der ihr geometriſches Verhältniß anzeigt, 3. Das natürlichſte Zeichen des arithmetiſchen Verhältniſſes iſt demnach das Zeichen der Subtraction, und das natürlichſte Zeichen des geometriſchen Verhältniſſes, das Zeichen der Diviſion. Das arithmetiſche Verhältniß der Zahlen 8 und 24 wird daher alſo ausgedrückt: $24 - 8$, ihr geometriſches Verhältniß aber alſo $24 : 8$. Die

Zahlen, welche auf die eine oder andere Art mit einander im Verhältnisse stehen, werden Glieder des Verhältnisses genannt, und zwar sieht man bey jedem Verhältnisse immer ein Glied als das vorhergehende, das andere als das nachfolgende an, wobey die Ordnung ganz willkürlich ist. Die vorhergehenden Glieder werden auch Vorderglieder, die nachfolgenden Hinterglieder genannt.

§. 43.

Wenn zwey Paare Zahlen einerley Unterschied haben, so hat das vorhergehende Glied zum folgenden bey dem einen Paare eben das arithmetische Verhältniß, wie bey dem andern, und man kann also diese arithmetischen Verhältnisse gleich nennen, weil sie sich durch nichts unterscheiden. So sind z. B. $12 - 4$ und $18 - 10$ zwey gleiche arithmetische Verhältnisse, oder es ist $12 - 4 = 18 - 10$. Zwey gleiche arithmetische Verhältnisse geben nun eine arithmetische Proportion. Diese enthält demnach 4 Glieder, wovon das erste und vierte die äusseren, das zweyte und dritte die mittleren heißen. Sind die mittleren Glieder einerley, so heißt die Proportion stetig oder zusammenhängend, sind sie aber verschieden, so heißt die Proportion abgesondert oder getrennt. So ist z. B. $15 - 9 = 9 - 3$ eine stetige, hingegen $17 - 8 = 11 - 2$ eine abgesonderte arithmetische Proportion; in der stetigen Proportion heißt das Glied, welches zweymal vorkommt, wie im vorigen Beyspiele 9, zwischen 15 und 3, das mittlere.

§. 44.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden äusseren Glieder der Summe der beyden mittleren gleich.

Es sey die abgesonderte arithmetische Proportion $9 - 4 = 21 - 16$, so ist in derselben die Summe der beyden äusseren Glieder $9 + 16$, welches 25 beträgt, und die Summe der beyden mittleren Glieder ist $4 + 21$, welches auch 25 giebt. Oder es sey die stetige arithmetische Proportion $13 - 8 = 8 - 3$, so ist in derselben

die Summe der beyden äusseren Glieder $= 13 + 3$, welches 16 ausmacht, und die Summe der beyden mittleren Glieder $= 8 + 8 = 2 \times 8$, welches auch wiederum 16 giebt. In einer stetigen arithmetischen Proportion ist demnach die Summe der beyden äusseren Glieder dem doppelten mittleren Gliede gleich.

Daß dieser Satz ganz allgemein von jeder arithmetischen Proportion gelte, erhellet aus folgenden Gründen. Nach dem vorigen §. besteht jede arithmetische Proportion aus zwey gleichen arithmetischen Verhältnissen. Die Gleichheit dieser Verhältnisse aber beruhet darauf, daß zwischen den beyden Paaren von Zahlen, welche die Verhältnißglieder ausmachen, einerley Unterschied Statt findet, d. h. daß das erste Glied um eben so viel größer ist, als das zweyte, um wie viel das dritte größer ist, als das vierte; oder: daß der Ueberschuß der Einheiten, die ausser dem zweyten Gliede noch im ersten enthalten sind, dem Ueberschusse der Einheiten, die ausser dem vierten Gliede noch im dritten enthalten sind, gleich ist. Demnach besteht in jeder arithmetischen Proportion die Summe der beyden äusseren Glieder

- a) aus dem zweyten Gliede,
- b) aus dem Ueberschusse der Einheiten, die das erste Glied noch ausser dem zweyten enthält, d. h. der Differenz der Glieder (denn diese zwey Stücke zusammen sind dem ersten Gliede gleich)
- c) aus dem vierten Gliede.

Die Summe der beyden mittleren Glieder aber besteht

- a) aus dem zweyten Gliede
- b) aus dem vierten Gliede
- c) aus dem Ueberschusse der Einheiten, die das dritte Glied noch ausser dem vierten enthält, d. h. der Differenz der Glieder (denn diese zwey Stücke zusammen sind dem dritten Gliede gleich.)

Da man nun, so oft man Gleiches zu Gleichem addirt, gleiche Summen erhält, hier aber die summirenden Theile beyderseits einander stückweise gleich sind;

so müssen nothwendig jedesmal auch die beyden Summen einander gleich werden.

§. 45.

Aus dem vorigen wichtigen Satze fließen nun nachstehende Folgerungen:

- I. Das vierte Glied einer abgesonderten arithmetischen Proportion findet man, wenn man von der Summe der beyden mittleren das erste Glied subtrahirt; und das dritte Glied einer stetigen arithmetischen Proportion findet man, wenn man von dem doppelten mittleren Gliede das erste subtrahirt. Z. B. es seyen die drey Glieder der abgesonderten arithmetischen Proportion, 15, 6, 21, und man bezeichne das vierte Glied, welches gesucht wird, durch G, so ist:

$$15 - 6 = 21 - G$$

Hier ist also $G + 15 = 6 + 21 = 27$ (nach dem vorigen §.) Das heißt: es müssen zu dem gesuchten Gliede noch 15 addirt werden, damit es der Zahl 27 gleich wird; offenbar muß also die Zahl 27 um 15 größer seyn, als das gesuchte Glied, und dieses wird folglich gefunden, wenn man von 27 die Zahl 15 abzieht; es ist also

$$G = 27 - 15 = 12$$

Oder es sey das erste Glied einer stetigen arithmetischen Proportion 37, das mittlere Glied 24, und man soll das dritte Glied derselben finden; bezeichnet man abermals das gesuchte dritte Glied mit G, so ist die Proportion:

$$37 - 24 = 24 - G$$

Hier ist $G + 37 = 24 + 24 = 48$; folglich, wenn man beyderseits 37 abzieht, (denn Gleiches von Gleichem abgezogen, läßt gleiche Reste.)

$$G = 48 - 37 = 11$$

- II. Das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion findet man, wenn man die Summe der beyden äußeren Glieder halbird. Z. B. es sey

das erste Glied der stetigen arithmetischen Proportion 23, das dritte 11, und man soll das mittlere finden. Bezeichnet man wiederum das gesuchte mittlere Glied durch G, so ist die Proportion:

$$23 - G = G - 11$$

Hier ist $23 + 11 = G + G$ oder $2G = 34$, das heißt, das gesuchte Glied doppelt genommen ist so groß, als die Zahl 34, die Zahl 34 ist also selbst das Doppelte von dem gesuchten Gliede, und mithin das gesuchte Glied die Hälfte von 34; demnach ist

$$G = \frac{34}{2} = 17$$

Das mittlere Glied einer arithmetischen Proportion oder die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen zwey andern Zahlen nennt man auch das arithmetische Mittel; und auf eine ganz ähnliche Art, wie man das arithmetische Mittel zwischen zwey Zahlen findet, wird auch im gemeinen Leben sowohl, als in den Wissenschaften aus mehreren Zahlen der Durchschnitt oder die Mittelzahl gefunden, wenn man die Summe derselben durch ihre Anzahl dividirt. Gesezt z. B. es wäre an einem Orte beobachtet worden, daß zehn Jahre nach einander Kinder an den Pocken nach folgenden Zahlen gestorben wären:

im 1ten Jahre	11
im 2ten	17
im 3ten	9
im 4ten	21
im 5ten	32
im 6ten	19
im 7ten	12
im 8ten	25
im 9ten	28
im 10ten	16
10)	190 19

so giebt die Summe aller dieser Zahlen, durch ihre Anzahl dividirt, den Durchschnitt oder die Mittelzahl der Kinder, von denen man annehmen darf, daß sie an diesem Orte alle Jahre von den Pocken aufgerieben werden.

Und solcher Mittelzahlen bedient man sich in allen Fällen mit Vortheil, wenn man keinen Grund hat, unter mehreren Zahlen eine vor den übrigen zu wählen, da man dann solchergestalt eine findet, welche von der Wahrheit nie weit abweichen kann, und ihr immer um so viel näher kommen muß, je größer die Anzahl der beobachteten Fälle ist.

§. 46.

Zwey geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie einerley Exponenten haben. Zwey gleiche geometrische Verhältnisse geben eine geometrische Proportion. Bey diesen heißen die beyden vorhergehenden Glieder und die beyden nachfolgenden, jedes Paar unter sich, gleichnamige oder ähnlich liegende; alle übrigen Benennungen bleiben wie bey der arithmetischen Proportion.

Auch ist noch zu bemerken, daß, wenn der Name Proportion schlechthin, ohne ein Beywort gebraucht wird, man jedesmal die geometrische Proportion darunter versteht, weil die Alten nur diese Proportion allein betrachtet haben, und folglich zu ihrer Unterscheidung kein Beywort nöthig hatten.

§. 47.

In jeder geometrischen Proportion ist das Product der beyden äußeren Glieder dem Producte der beyden mittleren gleich.

Es sey die abgesonderte geometrische Proportion:

$$2 : 6 = 4 : 12 \text{ (welches gelesen wird:}$$

Wie sich verhält 2 zu 6, so verhält sich 4 zu 12) so ist das Product der beyden äußeren Glieder $= 2 \times 12 = 24$ und das Product der beyden mittleren $= 6 \times 4 = 24$.

Oder es sey die stetige Proportion:

$$4 : 6 = 6 : 9$$

so ist das Product der beyden äußeren Glieder $= 4 \times 9 = 36$ und das Product der beyden mittleren $= 6 \times 6 = 36$. Da aber bey der stetigen Proportion die beyden

mittleren Glieder einerley sind, so ist in dieser das Product der beyden äußeren Glieder dem Producte des mittleren Glieds durch sich selbst gleich. Da nun ein Product, das entsteht, wenn man eine Zahl durch sich selbst multiplicirt, das Quadrat oder die Quadratzahl von dieser Zahl heißt; so ist in jeder stetigen Proportion das Product der beyden äußeren Glieder dem Quadrate des mittleren Glieds gleich.

Daß dieser Satz allgemein von jeder geometrischen Proportion gelte, davon kann man sich aus folgenden Gründen überzeugen:

Nach dem vorigen §. besteht jede geometrische Proportion aus zwey gleichen geometrischen Verhältnissen, und die Gleichheit dieser Verhältnisse beruhet darauf, daß sie beyde einerley Exponenten haben. Sie haben aber einerley Exponenten, wenn das erste Glied im zweyten eben so oft enthalten ist, als das dritte im vierten, das heißt, wenn das zweyte Glied ein Product aus dem ersten in den Exponenten, und das vierte Glied ein Product aus dem dritten in denselben Exponenten ist, welcher übrigens eben sowohl eine gebrochene, als eine ganze Zahl seyn kann. Macht man nun die Producte der äußeren und mittleren Glieder, so hat

das Product der äußeren Glieder zu seinen Factoren

- a) das erste Glied,
- b) den Exponenten,
- c) das dritte Glied, (denn das Product aus den letzten beyden, ist dem vierten Gliede gleich.)

Das Product der mittleren Glieder aber hat zu Factoren

- a) das erste Glied,
- β) den Exponenten, (denn das Product aus diesen beyden, ist dem zweyten Gliede gleich)
- γ) das dritte Glied.

Da man nun, so oft man Gleiches mit Gleichem multiplicirt, gleiche Producte erhält, hier aber die Factoren beyderseits stückweise gleich sind, so müssen noth-

wendig jedesmal auch die beyden Producte einander gleich werden.

§. 48.

Aus dem vorigen Lehrsatze, welcher die Grundlage der ganzen Lehre von den Proportionen ausmacht, fließen nachstehende Folgerungen.

- I. Das vierte Glied einer abgesonderten Proportion findet man, wenn man das Product der mittleren Glieder durch das erste Glied dividirt; und das dritte Glied einer stetigen Proportion findet man, wenn man das Quadrat des mittleren Glieds mit dem ersten Gliede dividirt.

Es sey die abgesonderte geometrische Proportion:

$$4 : 6 = 8 : G$$

Wo G das gesuchte vierte Glied bedeutet, so ist (nach dem vorigen §.)

$$4 \times G = 6 \times 8$$

und daher, wenn man beyderseits mit 4 dividirt,

$$G = \frac{6 \times 8}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

Oder es sey die stetige Proportion:

$$2 : 4 = 4 : G$$

Wo G wiederum das gesuchte Glied bedeutet, so ist (nach dem vorigen §.)

$$2 \times G = 4 \times 4$$

und daher, wenn man beyderseits mit 2 dividirt,

$$G = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

- II. Da (nach dem vorigen §.) in jeder stetigen Proportion das Quadrat des mittleren Glieds dem Producte der beyden äußeren gleich, folglich dieses Product selbst ein Quadrat ist, so würde man aus den gegebenen beyden äußeren Gliedern und ihrem zugleich bekannten Producte, das mittlere Glied finden können, wenn man nur wüßte, was für eine Zahl, wenn sie mit sich selbst multiplicirt wird, jenes Product hervorbrächte. Diese

Zahl heißt die Quadratwurzel von jenem Producte, und das Verfahren, dessen man sich bedient, um aus einer gegebenen Quadratzahl ihre Wurzel zu finden, wird das Ausziehen der Quadratwurzel genannt.

Demnach wird das mittlere Glied einer stetigen Proportion gefunden, wenn man aus dem Producte der äußeren Glieder die Quadratwurzel auszieht.

Die Quadratwurzeln von den Quadraten der Zahlen von 1 bis 10 hat man in dem Einmaleins. Um diejenigen Quadratwurzeln, welche über 10 gehen, zu finden, muß man eine eigene arithmetische Operation anwenden, deren Erklärung in der Folge ein besonderer Abschnitt gewidmet werden wird.

Es seyen z. B. die beyden äußeren Glieder einer stetigen Proportion 2 und 8, und man soll das mittlere Glied finden. Bezeichnet man dieses, als das gesuchte, mit G , so ist

$$2 : G = G : 8.$$

Demnach $G \times G$ oder das Quadrat von $G = 2 \times 8 = 16$. Folglich die Wurzel von G oder das gesuchte mittlere Glied $= 4$.

Es seyen ferner die beyden äußeren Glieder einer stetigen Proportion 3 und 27, und man soll das mittlere Glied finden, so ist

$$3 : G = G : 27.$$

Demnach das Quadrat von $G = 3 \times 27 = 81$ und folglich die Wurzel dieses Quadrats, oder das gesuchte mittlere Glied $= 9$.

Es seyen die beyden äußeren Glieder 2 und 18, man soll das mittlere Glied finden, so ist

$$2 : G = G : 18.$$

Demnach das Quadrat von $G = 2 \times 18 = 36$, mithin die Wurzel dieses Quadrats, oder $G = 6$.

Es seyen gegeben die beyden äußeren Glieder 4 und 16, man soll das mittlere Glied finden, so ist

$$4 : G = G : 16.$$

Demnach das Quadrat von $G = 4 \times 16 = 64$, davon die Wurzel, oder $G = 8$.

§. 49.

Wenn vier Zahlen so beschaffen sind, daß das Product der beyden äußeren dem Producte der beyden mittleren gleich ist, so stehen die vier Zahlen in einer geometrischen Proportion.

Es sey das Product der beyden äußeren Glieder $= 5 \times 18$, und das Product der beyden mittleren $= 15 \times 6$, so ist $5 : 15 = 6 : 18$ eine geometrische Proportion. Daß aber der Satz nicht nur bey diesem Beispiele zutreffe, sondern allgemein wahr sey, läßt sich folgendermaßen zeigen:

Sind die Producte der äußeren und mittleren Glieder der gleich, so müssen es auch deren Factoren seyn, denn nur Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt gleiche Producte. Allein nach der Voraussetzung sind die beyden äußeren und die beyden mittleren Glieder vier verschiedene Zahlen. Sollen sie also doch, wenn man jene zwey und diese zwey miteinander multiplicirt, gleiche Producte geben, so ist dies nur unter einer einzigen Bedingung möglich, wenn nämlich unter jedem Paare eine zusammengesetzte Zahl sich befindet, und zwar so, daß der zusammengesetzte Factor unter den äußeren Gliedern zu seinen Factoren hat: 1) den einfachen Factor der mittleren, 2) noch einen andern, den wir in Ermangelung einer schicklicheren Benennung der Kürze wegen Subfactor nennen wollen, der zusammengesetzte Factor unter den mittleren Gliedern hingegen zu Factoren hat: 1) den einfachen Factor der äußeren, 2) den nämlichen Subfactor. Denn nur dadurch allein werden die Factoren, und folglich auch die Producte, beyderseits gleich. Nun zeigt (nach §. 42.) der Subfactor bey dem Producte der äußeren Glieder das Verhältniß des einfachen Factors der mittleren Glieder zum zusammengesetzten der äußeren, bey dem Producte der mittleren Glieder hingegen das Verhältniß des einfachen Factors der äußeren Glieder zum zusammengesetzten der mittleren. Dieser Subfactor ist also der Exponent der genannten Verhältnisse, und da er beyderseits gleich ist, so sind folglich

(nach §. 46.) auch die Verhältnisse einander gleich; das heißt, der einfache Factor der äußeren Glieder hat zum zusammengesetzten der mittleren eben das Verhältniß, was der einfache Factor der mittleren zum zusammengesetzten der äußeren Glieder hat, oder diese vier Glieder stehen in geometrischer Proportion.

Das oben gegebene Beyspiel ist demnach also anzusehen:

$$5 \times (3 \times 6) = 6 \times (3 \times 5)$$

wo nun 5 der einfache Factor der äußeren, 6 der einfache Factor der mittleren Glieder, und 3 der gemeinschaftliche Subfactor ist.

Daß übrigens die Benennungen: einfach und zusammengesetzt, hier bloß comparativ genommen seyen, wird kaum nöthig seyn, zu erinnern.

So oft man demnach zwey gleiche Producte hat, deren jedes aus zwey Factoren zusammengesetzt ist, so kann man daraus eine Proportion herleiten, indem man schließt: Wie sich verhält der eine Factor des einen Products zum einen Factor des andern, so verhält sich der zweyte Factor des andern Products zum zweyten Factor des ersten.

§. 50.

Jede geometrische Proportion läßt sich auf mannigfaltige Art abändern, und bleibt bey allen Veränderungen immer eine geometrische Proportion, so lange man zeigen kann, daß nach geschehener Veränderung das Product der beyden äußeren Glieder dem Producte der beyden mittleren noch gleich sey, denn dies ist nach dem vorigen §. das allgemeine Merkmal der zwischen vier Zahlen Statt habenden Proportionalität.

Es sey z. B. die geometrische Proportion:

$$6 : 18 = 8 : 24$$

so kann man sie auf folgende Arten verändern:

- I. Durch Verſetzung der Glieder, indem man nämlich ſetzt: Das Vorderglied zum Vordergliede, wie das Hinterglied zum Hintergliede, also:

$6 : 8 = 18 : 24$. Hier ist nun $6 \times 24 = 8 \times 18$, oder $144 = 144$.

II. Durch Umkehrung der Glieder, indem man setzt: Das Hinterglied zum Vordergliede, wie das Hinterglied zum Vordergliede, also:

$18 : 6 = 24 : 8$: hier ist abermal $18 \times 8 = 6 \times 24$, oder $144 = 144$.

III. Durch Addition der Glieder, indem man setzt:

1) Die Summe des Vorderglieds und Hinterglieds zum Hintergliede, wie die Summe des Vorderglieds und Hinterglieds zum Hintergliede, also:

$$(6 + 18) : 18 = (8 + 24) : 24 \text{ oder} \\ 24 : 18 = 32 : 24,$$

hier ist $24 \times 24 = 18 \times 32$, das ist $576 = 576$.

Oder indem man setzt:

2) Das Vorderglied zur Summe des Vorderglieds und Hinterglieds, wie das Vorderglied zur Summe des Vorderglieds und Hinterglieds, also:

$$6 : (6 + 18) = 8 : (8 + 24) \text{ oder} \\ 6 : 24 = 8 : 32; \text{ hier ist } 6 \times 32 = 8 \times 24, \\ \text{oder } 192 = 192.$$

IV. Durch Subtraction der Glieder, indem man setzt:

1) Wie der Unterschied des Vorderglieds und Hinterglieds zum Hintergliede, so der Unterschied des Vorderglieds und Hinterglieds zum Hintergliede, also:

$$(18 - 6) : 18 = (24 - 8) : 24, \text{ oder} \\ 12 : 18 = 16 : 24.$$

Hier ist $12 \times 24 = 18 \times 16$, oder $288 = 288$.

Oder indem man setzt:

2) Wie der Unterschied des Vorderglieds und Hinterglieds zum Vordergliede, so der Unterschied des Vorderglieds und Hinterglieds zum Vordergliede, also:

$$(18 - 6) : 6 = (24 - 8) : 8 \text{ oder}$$

$$12 : 6 = 16 : 8.$$

Hier ist $12 \times 8 = 6 \times 16$, oder $96 = 96$.

V. Durch Addition und Subtraction der Glieder zugleich, indem man setzt:

1) Wie die Summe des Vorderglieds und Hinterglieds zum Unterschiede des Vorderglieds und Hinterglieds, so die Summe des Vorderglieds und Hinterglieds zum Unterschiede des Vorderglieds und Hinterglieds, also:

$$(6 + 18) : (18 - 6) = (8 + 24) : (24 - 8)$$

o d e r:

$$24 : 12 = 32 : 16.$$

Hier ist $24 \times 16 = 12 \times 32$, oder $384 = 384$.

Oder indem man setzt:

2) Wie der Unterschied des Vorderglieds und Hinterglieds zur Summe des Vorderglieds und Hinterglieds, so der Unterschied des Vorderglieds und Hinterglieds zur Summe des Vorderglieds und Hinterglieds, also:

$$(18 - 6) : (6 + 18) = (24 - 8) : (8 + 24)$$

o d e r:

$$12 : 24 = 16 : 32.$$

Hier ist abermal $12 \times 32 = 24 \times 16$, oder $384 = 384$.

VI. Durch Multiplication der Glieder, indem man entweder die beyden Vorderglieder oder die beyden Hinterglieder oder Vorder- und Hinterglieder zugleich mit einerley Zahl, oder die Vorderglieder mit einer und die Hinterglieder mit einer andern Zahl multiplicirt.

1) Multiplicirt man in der Proportion $6 : 18 = 8 : 24$ die beyden Vorderglieder mit der Zahl 2, so erhält man die Proportion:

$$12 : 18 = 16 : 24,$$

und hier ist $12 \times 24 = 18 \times 16$, oder $288 = 288$.

2) Wenn man in der Proportion $6 : 18 = 8 : 24$ die beyden Hinterglieder mit der Zahl 3 multiplicirt, so wird daraus die Proportion:

$$6 : 54 = 8 : 72,$$

und in dieser ist $6 \times 72 = 8 \times 54$, oder $432 = 432$.

3) Wenn man in eben dieser Proportion die beyden Vorderglieder mit der Zahl 5 und die beyden Hinterglieder mit der Zahl 2 multiplicirt, so entstehet die Proportion:

$$30 : 36 = 40 : 48,$$

und dabey ist $30 \times 48 = 36 \times 40$, oder $140 = 140$.

4) Wenn man in der vorigen Proportion alle vier Glieder mit der Zahl 6 multiplicirt, so erhält man die Proportion:

$$36 : 108 = 48 : 144,$$

und in dieser ist $36 \times 144 = 108 \times 48$, oder $5184 = 5184$.

VII. Durch Division der Glieder, indem man entweder die beyden Vorderglieder oder die beyden Hinterglieder, oder Vorder- und Hinterglieder zugleich mit einerley Zahl, oder die Vorderglieder mit einer, und die Hinterglieder mit einer andern Zahl dividirt.

1) Wenn man in der Proportion $6 : 18 = 8 : 24$ die beyden Vorderglieder, bey unveränderten Hintergliedern, mit der Zahl 2 dividirt, so erhält man daraus die Proportion:

$$3 : 18 = 4 : 24,$$

und in dieser ist $3 \times 24 = 4 \times 18$, oder $72 = 72$.

2) Wenn man in der vorigen Proportion, bey unveränderten Vordergliedern, die beyden Hinterglieder mit der Zahl 3 dividirt, so erhält man die Proportion:

$$6 : 6 = 8 : 8,$$

und in dieser ist $6 \times 8 = 6 \times 8$, oder $48 = 48$.

3) Wenn man in eben dieser Proportion alle vier Glieder durch die Zahl 2 dividirt, so erhält man daraus die Proportion:

$$3 : 9 = 4 : 12,$$

und hierin ist $3 \times 12 = 4 \times 9$, oder $36 = 36$.

4) Wenn man endlich in eben dieser Proportion die beyden Vorderglieder mit der Zahl 2 und die beyden Hinterglieder mit der Zahl 6 dividirt, so entstehet daraus die Proportion:

$$3 : 3 = 4 : 4,$$

und hierin ist $3 \times 4 = 3 \times 4$, oder $12 = 12$.

VIII. Durch Multiplication und Division der Glieder zugleich, indem man die Veränderungen von Nro. VI. und VII. combinirt.

1) Wenn man in der Proportion $6 : 18 = 8 : 24$ die beyden Vorderglieder mit der Zahl 2 multiplicirt und die beyden Hinterglieder mit der Zahl 3 dividirt, so erhält man die Proportion:

$$12 : 6 = 16 : 8,$$

in welcher $12 \times 8 = 16 \times 6$ oder $96 = 96$ ist.

2) Wenn man in der Proportion $6 : 18 = 8 : 24$ die beyden Vorderglieder mit der Zahl 2 dividirt und die beyden Hinterglieder mit der Zahl 3 multiplicirt, so erhält man die Proportion:

$$3 : 54 = 4 : 72,$$

in welcher $3 \times 72 = 4 \times 54$ oder $216 = 216$ ist.

Die hier geführten Beweise aller dieser Sätze gesten zwar eigentlich nur für das gewählte Beyspiel; sie können aber leicht allgemein gemacht werden, wenn man die Glieder der dabey zum Grunde gelegten Proportion durch allgemeine Zeichen ausdrückt.

Wählt man z. B. zu Bezeichnung des ersten Gliedes die römische Ziffer I, zu Bezeichnung des dritten die römische Ziffer III, und zu Bezeichnung des Exponenten den Buchstaben E, so lässet sich das zweyte Glied durch $I \propto E$, und das

vierte durch III $\propto$ E ausdrücken, weil (nach S. 47.) jenes ein Product aus dem ersten in den Exponenten, dieses aber ein Product aus dem dritten in denselben Exponenten ist.

Und vermittelt dieser Zeichen kann man nun die Beweise der obigen Sätze leicht auf folgende Art allgemein machen:

Durch die Veränderung unter Nro. I wird aus der ursprünglichen Proportion

$$6 : 18 = 8 : 24 \text{ d. h. } I : I \propto E = III : III \propto E$$

diese

$6 : 8 = 18 : 24$ d. h. $I : III = I \propto E : III \propto E$; und die Zulässigkeit dieser Veränderung ist daraus erweislich, daß in der letzten Proportion so gut wie in der ersten das Product der äußeren Glieder dem Producte der mittleren gleich wird, denn es ist in einem Falle wie im andern $I \propto III \propto E = I \propto III \propto E$.

Durch die Veränderung unter Nro. II. wird aus der ursprünglichen Proportion

$$6 : 18 = 8 : 24 \text{ d. h. } I : I \propto E = III : III \propto E$$

diese

$18 : 6 = 24 : 8$ d. h. $I \propto E : I = III \propto E : III$; und die Zulässigkeit dieser Veränderung folgt wiederum daraus, daß auch hier das Product der äußeren so wie das Product der mittleren Glieder $= I \propto III \propto E$ wird.

Da nun auf diese Art die Nothwendigkeit der Gleichheit dieser beiden Producte aus einem allgemeinen, aus dem Begriffe der Proportion selbst abgeleiteten, Ausdrucke dargethan ist, unter welchen eben deswegen jede gedenkbare Proportion muß gebracht werden können, und da die Gleichheit der mehrerwähnten Producte (nach dem vorigen S.) das allgemeine Merkmal der zwischen vier Zahlen Statt findenden Proportionalität ist, so ist eben damit die Zulässigkeit jener Veränderungen in ihrer völligen Allgemeinheit erwiesen.

Ebenso kann man die Beweise der übrigen Sätze dieses und aller nachfolgenden S. S. bis zum Ende dieses Abschnitts allgemein machen.

Andere allgemeine Beweise derselben werden späterhin vermittelst der Buchstabenformeln gegeben werden.

§. 51.

Wenn zwey Proportionen von der Art sind, daß die Hinterglieder der einen den Vordergliedern der andern gleich sind, so verhält sich das erste Glied der ersten Proportion zum zweyten Glied der zweyten wie das dritte Glied der ersten zum vierten Gliede der zweyten. Z. B. es seyen die Proportionen:

$$\begin{array}{rcl} 4 : 9 & = & 12 : 27 \text{ und} \\ 9 : 11 & = & 27 : 33 \text{ so ist} \\ \hline 4 : 11 & = & 12 : 33 \end{array}$$

und in dieser Proportion ist $4 \times 33 = 11 \times 12$, oder $132 = 132$.

§. 52.

Wenn daher zwey Proportionen so beschaffen sind, daß die Hinterglieder der einen, den Hintergliedern der andern gleich sind, so verhält sich das erste Glied der ersten Proportion zum ersten Gliede der zweyten wie das dritte Glied der ersten zum dritten Gliede der zweyten. Z. B. es seyen die Proportionen:

$$\begin{array}{rcl} 3 : 7 & = & 6 : 14 \text{ und} \\ 4 : 7 & = & 8 : 14 \text{ so ist} \\ \hline 3 : 4 & = & 6 : 8 \end{array}$$

und in dieser ist $3 \times 8 = 4 \times 6$, oder $24 = 24$.

kehrt man hier die zweyte Proportion um, so hat man den Fall des vorigen §.

§. 53.

Wenn zwey Proportionen so beschaffen sind, daß die Vorderglieder der einen den Vordergliedern der andern gleich sind, so verhält sich auch das zweyte Glied der ersten Proportion zum zweyten Gliede der zweyten wie das vierte Glied der ersten zum vierten Gliede der zweyten. Z. B. es seyen die Proportionen:

$$\begin{array}{rcl}
 5 : 11 = 10 : 22 & \text{und} & \\
 5 : 15 = 10 : 30 & \text{so ist} & \\
 \hline
 11 : 15 = 22 : 30 & &
 \end{array}$$

und hierin ist $10 \times 30 = 15 \times 22$, oder $330 = 330$.

Rehrt man hier die erste Proportion um, so hat man den Fall des §. 50.

§. 54.

Wenn in zwey Proportionen das zweyte Glied der ersten dem ersten Gliede der zweyten, und das dritte Glied der ersten dem vierten Gliede der zweyten gleich ist, so verhält sich das erste Glied der ersten zum zweyten Gliede der zweyten wie das dritte Glied der zweyten zum vierten Gliede der ersten. Z. B. es seyen die Proportionen:

$$\begin{array}{rcl}
 6 : 16 = 15 : 40 & \text{und} & \\
 16 : 5 = 48 : 15 & \text{so ist} & \\
 \hline
 6 : 5 = 48 : 40 & &
 \end{array}$$

und hierin ist $6 \times 40 = 5 \times 48$, oder $240 = 240$.

§. 55.

Wenn daher in zwey Proportionen die mittleren Glieder der einen den mittleren Gliedern der andern gleich sind, so verhält sich das erste Glied der ersten zum ersten Gliede der zweyten wie das vierte Glied der zweyten zum vierten Gliede der ersten. Z. B. es seyen die Proportionen:

$$\begin{array}{rcl}
 7 : 18 = 21 : 54 & \text{und} & \\
 14 : 18 = 21 : 27 & \text{so ist} & \\
 \hline
 7 : 14 = 27 : 54 & &
 \end{array}$$

und hierin ist $7 \times 54 = 14 \times 27$, oder $378 = 378$.

Rehrt man hier die zweyte Proportion um, so hat man wiederum den Fall des vorigen §.

§. 56.

Wenn man in zwey Proportionen die Glieder der einen durch die Glieder der andern nach der Reihe multiplicirt, so geben auch diese Producte eine Proportion. Es seyen die beyde Proportionen:

$$\begin{array}{l} 4 : 8 = 7 : 14 \\ 2 : 6 = 5 : 15 \end{array}$$

man multiplicire der Reihe nach alle Glieder der ersten durch die gleichnamigen Glieder der zweyten, so werden die Producte $2 \times 4 : 6 \times 8 = 5 \times 7 : 14 \times 15$, oder $8 : 48 = 35 : 210$ und dies ist wieder eine Proportion, denn es ist in derselben $8 \times 210 = 48 \times 35$, oder $1680 = 1680$.

§. 57.

Wenn zwey oder mehrere Verhältnisse so beschaffen sind, daß immer das Hinterglied des einen das Vorderglied im nächstfolgenden ist, so sagt man, das Verhältniß des ersten Glieds zum letzten sey aus allen diesen Verhältnissen, oder aus andern, die ihnen gleich sind, zusammengesetzt. Z. B. wenn man die Verhältnisse hat,

$$\begin{array}{l} 2 : 4 = 5 : 10 \\ 4 : 8 = 6 : 12 \\ 8 : 16 = 7 : 14 \text{ u. f. w.} \end{array}$$

so heißt das Verhältniß $2 : 8$ aus den beyden Verhältnissen $2 : 4$ und $4 : 8$, oder den ihnen gleichen Verhältnissen $5 : 10$ und $6 : 12$ zusammengesetzt, eben so heißt das Verhältniß $2 : 16$ aus den Verhältnissen $2 : 4$, $4 : 8$ und $8 : 16$, oder den ihnen gleichen Verhältnissen $5 : 10$, $6 : 12$ und $7 : 14$ zusammengesetzt. Die Bezeichnung der zusammengesetzten Verhältnisse ist folgende:

$$2 : 8 = \left\{ \begin{array}{l} 2 : 4 \\ 4 : 8 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 5 : 10 \\ 6 : 12 \end{array} \right\} \quad 2 : 16 = \left\{ \begin{array}{l} 2 : 4 \\ 4 : 8 \\ 8 : 16 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 5 : 10 \\ 6 : 12 \\ 7 : 14 \end{array} \right\}$$

§. 58.

Wenn ein Verhältniß aus zwey gleichen Verhältnissen zusammengesetzt ist, so heißt es ein zweymal höheres oder duplicirtes, ist es aus drey gleichen Verhältnissen zusammengesetzt, so heißt es ein dreymal höheres oder triplicirtes Verhältniß, u. s. w. das ist, wenn:

$$2 : 4 = 5 : 10$$

$$4 : 8 = 5 : 10$$

$$8 : 16 = 5 : 10 \text{ so ist}$$

$$2 : 8 = \left\{ \begin{array}{l} 2 : 4 \\ 4 : 8 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 5 : 10 \\ 5 : 10 \end{array} \right\} \quad 2 : 16 = \left\{ \begin{array}{l} 2 : 4 \\ 4 : 8 \\ 8 : 16 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 5 : 10 \\ 5 : 10 \\ 5 : 10 \end{array} \right\}$$

und man sagt 2 : 8 stehe im zweymal höheren oder duplicirten Verhältnisse von dem Verhältnisse 2 : 4 oder 5 : 10, und 2 : 16 stehe in dem dreymal höheren oder triplicirten Verhältnisse von dem Verhältnisse 2 : 4 oder 5 : 10. Umgekehrt nennt man das einfache Verhältniß 2 : 4 oder 5 : 10 in Ansehung des zweymal höheren oder duplicirten, 2 : 8, das zweymal niedrigere oder subduplicirte, und in Ansehung des dreymal höheren oder triplicirten, 2 : 16, das dreymal niedrigere oder subtriplicirte. Und im Allgemeinen heißt ein zusammengesetztes Verhältniß ein um so vielmal höheres Verhältniß, als die Anzahl der einzelnen Verhältnisse, woraus es zusammengesetzt ist, beträgt. Und im Gegentheil heißt das einfache Verhältniß ein um so vielmal niedrigeres Verhältniß, als die Anzahl der einzelnen Verhältnisse beträgt, woraus das zusammengesetzte bestehet.

§. 59.

Wenn das Verhältniß zweyer Zahlen aus mehreren Zahlenverhältnissen zusammengesetzt ist, so verhält sich die erste Zahl zur zweyten wie das Product aller Vorderglieder zum Producte aller Hinterglieder in den einfachen Zahlenverhältnissen. Z. B. es sey:

$$\begin{array}{rcl}
 2 : 4 & = & 5 : 10 \\
 4 : 8 & = & 6 : 12 \\
 8 : 16 & = & 7 : 14 \quad \text{so ist} \\
 \hline
 2 : 8 & = & 5 \times 6 : 10 \times 12 \\
 & & \text{oder}
 \end{array}$$

$$2 : 8 = 30 : 120$$

Denn hier ist $8 \times 30 = 2 \times 120$ oder $240 = 240$.

Eben so ist auch $2 : 16 = 5 \times 6 \times 7 : 10 \times 12 \times 14$
 oder $2 : 16 = 210 : 1680$.

Denn hier ist $2 \times 1680 = 16 \times 210$ oder $3360 = 3360$.