

Zweiter Abschnitt.

Von den gebrochenen Zahlen oder Brüchen.

§. 16.

Es ist oben (§. 1.) gezeigt worden, daß eine Zahl entstehe, indem man Eins oder die Einheit etlichemal wiederholt nehme. Nun ist aber die Einheit, die auf diese Art wiederholt genommen wird, entweder für sich selbst ein Ganzes, wie z. B. ein Thaler, ein Dukaten und dergl., oder sie ist nicht für sich selbst ein Ganzes, sondern nur ein bestimmter Theil eines Ganzen, wie z. B. ein halber Thaler, ein Viertels-Dukaten. Wird die erstere Einheit, die für sich selbst ein Ganzes ist, etlichemal wiederholt genommen, so entsteht aus dieser Wiederholung eine ganze Zahl, wie z. B. ein Thaler, sechsmaal wiederholt genommen, 6 Thaler giebt. Wird aber die letztere Einheit, die nicht selbst ein Ganzes, sondern nur ein Theil eines andern Ganzen ist, etlichemal wiederholt genommen, so kann auch aus dieser Wiederholung keine ganze Zahl entstehen, wenn man sie nicht gerade so oft, oder zwey = drey = vier = u. s. w. mal so oft wiederholt, als das Ganze, wovon sie selbst ein Theil ist, Theile hat; z. B. aus einer Einheit, die der vierte Theil von einem Ganzen oder $\frac{1}{4}$ ist, kann nur dadurch eine ganze Zahl entstehen, daß man sie 4mal oder 2×4 , das heißt 8mal oder 3×4 das ist 12mal wiederholt, denn 4mal $\frac{1}{4}$ ist so viel als 1 oder 1; 8mal $\frac{1}{4}$ ist $\frac{8}{4}$ oder 2; 12mal $\frac{1}{4}$ ist $\frac{12}{4}$ oder 3 u. s. w. In als

len andern Fällen entstehet aus der Wiederholung einer solchen Einheit, die nicht selbst ein Ganzes, sondern nur ein bestimmter Theil eines andern Ganzen ist, entweder eine Zahl, die auch wiederum nur ein Theil eines andern Ganzen ist, wie z. B. wenn $\frac{1}{4}$ dreymal wiederholt wird, die Zahl $\frac{3}{4}$ entstehet, oder es entstehet daraus eine Zahl, die das Ganze selbst ein oder etlichemal, und noch einen Theil davon enthält; z. B. wenn die gebrochene Einheit $\frac{1}{7}$ siebenmal wiederholt wird, so entstehet die gebrochene Zahl $\frac{7}{7}$, welche das Ganze selbst einmal und noch außerdem $\frac{6}{7}$ von demselben enthält, denn $\frac{7}{7}$ ist so viel als 1 und $\frac{6}{7}$ oder $\frac{7}{7} = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1 + \frac{6}{7}$. Wird aber eben diese gebrochene Einheit $\frac{1}{4}$ neunmal wiederholt, so entstehet daraus die gebrochene Zahl $\frac{9}{4}$, welche das Ganze selbst zweymal und überdies noch $\frac{1}{4}$ von demselben enthält, denn $\frac{9}{4}$ ist so viel als 2 und $\frac{1}{4}$ oder $\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$.

Diese gebrochenen Zahlen nennt man nun Brüche, und zwar ächte Brüche, wenn sie nur einen gewissen Theil von einem Ganzen, ein oder etlichemal genommen, wie z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ u. s. w., unächte aber, wenn sie das Ganze selbst, und noch überdies einen gewissen Theil von ihm ein oder etlichemal enthalten, wie z. B. $\frac{7}{4}$, $\frac{15}{5}$ u. s. w. Diejenige Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile das Ganze getheilt sey, wird der Nenner, diejenige hingegen, welche anzeigt, wie oft einer von diesen gleichen Theilen des Ganzen genommen sey, wird der Zähler des Bruchs genannt; und wenn man anzeigen will, daß ein gewisses Ganzes in 7 gleiche Theile getheilet, und der siebente Theil dreymal genommen sey, oder daß von diesen 7 gleichen Theilen 3 vorhanden seyen, so ziehet man einen Querstrich, und schreibt über den Strich den Zähler 3 und unter denselben den Nenner 7 dieses Bruchs folgenderstalt $\frac{3}{7}$, und diesen Ausdruck liest man: drey Siebentel.

§. 17.

Es ist zu manchen Absichten dienlich, die Entstehung der Brüche noch auf folgende zweyerley Arten zu betrachten:

- I. Es ist offenbar, daß, wenn man alle Einheiten einer Zahl in eine bestimmte Anzahl von Theilen

theilte, man dadurch die Zahl selbst, welche immer ihren Einheiten zusammen genommen gleich ist, in eben so viele Theile eintheilen würde. Und diese Division unterscheidet sich von der bisher gebrauchten nur allein darin, daß bey der ersteren der Dividendus auch kleiner seyn kann, als der Divisor, welches bey der letztern nicht angeht. Demnach kann man einen jeden Bruch als den Quotienten betrachten, welcher entsteht, wenn der Zähler des Bruchs durch seinen Nenner dividirt wird. 3. B. $\frac{3}{4}$ Gulden ist der Quotient, welcher entsteht, wenn man 3 Gulden in 4 gleiche Theile theilt; denn der vierte Theil von drey Gulden ein mal genommen, ist eben so groß, als der vierte Theil von einem Gulden drey mal genommen.

- II. Bey den Zahlen, deren wir uns bisher bedient haben, sahen wir nicht auf die Art der Einheiten, wovon diese Zahlen gewisse Mengen enthielten. Es ist aber leicht einzusehen, daß man bey'm Rechnen auch zugleich die Art der Einheiten, woraus die Zahlen bestehen, mit in Betrachtung ziehen könne. Solche Zahlen, wobey man auf die Art der Einheiten, woraus sie zusammengesetzt sind, nicht achtet, heißen unbenannte Zahlen, solche hingegen, wobey man zugleich auf die Art der Einheiten, woraus sie bestehen, Rücksicht nimmt; heißen benannte Zahlen. So sind 3. B. 3, 7, 12, u. d. m. unbenannte, hingegen 3 Pferde, 7 Gulden, 12 Meilen u. dergl. m. benannte Zahlen; denn bey den letzteren ist die Art der Einheit, wovon sie gewisse Mengen enthalten, bestimmt, und man kann sich daher keine andere, als gerade diese, darunter gedenken; bey den ersteren hingegen ist die Art der Einheit unbestimmt gelassen, und man hat daher noch freye Wahl, an ihre Stelle zu setzen, was für eine man will, oder man kann sich unter den Zahlen 3, 7, 12 u. dergl. Dinge vorstellen, was für welche man will. Einen jeden Bruch kann man sich nun als eine Zahl von der letzten Art, oder als eine benannte Zahl vorstellen, wenn man den Zähler des Bruchs für die Zahl selbst, seinen Nenner aber für den Namen der

Zahl anseheth. Der Bruch $\frac{3}{5}$ kann daher auch geschrieben werden $\frac{3}{5}$ Fünftel, und ein Ausdruck wie der andere sagt, daß das Ganze in 5 Theile getheilt und von diesen 5 Theilen 3 vorhanden seyen, oder daß 3 Dinge vorhanden seyen, deren jedes ein Fünftel oder der fünfte Theil des Ganzen seye. Ist aber der Name des Ganzen angegeben, worauf der Bruch sich bezieht, oder welchem der Theil zugehört, wovon in dem Bruche ein bestimmtes Vielfaches genommen ist, wie in dem Bruche $\frac{3}{4}$ Centner, so wird der Name für den Zähler des Bruchs durch Combination seines Namens mit jenem Namen des Ganzen gebildet, in dem vorigen Beyspiele also: 3 Viertelscentner.

§. 18.

Unter mehreren Brüchen von einerley Nenner, ist derjenige der größte, welcher den größten Zähler, und derjenige der kleinste, welcher den kleinsten Zähler hat, auch ist derjenige zwey = drey = vier = u. s. w. mal größer, als ein anderer, dessen Zähler zwey = drey = vier = u. s. w. mal größer ist, als der Zähler des andern, und mithin ist auch derjenige zwey = drey = vier = u. s. w. mal kleiner, als ein anderer, dessen Zähler nur der zweyte, dritte, vierte u. s. w. Theil von dem Zähler des andern ist.

Gesetzt man habe die Brüche $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{10}$, so ist der letzte $\frac{9}{10}$ der größte unter ihnen allen, und er ist gerade dreyimal so groß, als der erste, $\frac{3}{10}$, und mithin ist dieser dreyimal kleiner, als der letzte $\frac{9}{10}$. Dies wird sogleich deutlich seyn, wenn man, wie man nach dem vorigen (§.) mit allen Brüchen richtig thun kann, diese Brüche als benannte Zahlen anseheth, und sie auch so schreibt. Auf diese Art erhält man 3, 5, 7 und 9 Zehntel, d. h., Dinge, deren jedes ein Zehntel oder der zehnte Theil eines Ganzen ist, und nun ist es gewiß eben so einleuchtend, daß 9 Zehntel größer, als 3, 5 und 7 Zehntel, und daß 9 Zehntel gerade dreyimal so groß seyn, als 3 Zehntel, als es einleuchtend ist, daß 9 Gulden größer, als 3, 5 und 7 Gulden, und daß sie gerade dreyimal so groß seyn, als 3 Gulden. Die Zahlen 3, 5, 7 und 9 drücken hier beyderseits Dinge von einerley

Art aus, nämlich das eine mal Gulden, das andere mal Zehntel; demnach ist nothwendig diejenige unter ihnen die größte, in welcher die Einheit am öftesten wiederholt ist, oder welche die größte Menge von Einheiten enthält, und diejenige ist zwey = drey = u. f. w. mal so groß, als eine andere, welche eine zwey = drey = u. f. w. mal so große Menge von Einheiten enthält, als diese andere; und mithin ist auch diejenige zwey = drey = u. f. w. mal kleiner, als eine andere, deren Einheiten nur dem zweyten — dritten u. f. w. Theile von den Einheiten der andern gleich sind.

Hingegen unter mehreren Brüchen von einerley Zähler ist derjenige der größte, welcher den kleinsten Nenner und derjenige der kleinste, welcher den größten Nenner hat; auch ist derjenige zwey = drey = vier u. f. w. mal größer, als ein anderer, dessen Nenner zwey = drey = vier = u. f. w. mal kleiner ist, als der Nenner des andern; derjenige aber zwey = drey = vier = u. f. w. mal kleiner, als ein anderer, dessen Nenner zwey = drey = vier = u. f. w. mal größer ist, als der Nenner des andern. 3. B. unter den Brüchen $\frac{4}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{15}$ ist der erste $\frac{4}{2}$ der größte, und der letzte $\frac{4}{15}$ der kleinste, auch ist der erste $\frac{4}{2}$ zweymal so groß, als der dritte $\frac{4}{10}$, und drey mal so groß, als der vierte $\frac{4}{15}$, und mithin ist auch der dritte $\frac{4}{10}$ zweymal — und der vierte $\frac{4}{15}$ drey mal kleiner, als der erste $\frac{4}{2}$.

Man wird keine Schwierigkeit finden, dies einzusehen, wenn man sich wiederum nach dem vorigen (§.) alle diese Brüche als benannte Zahlen, und ihre Nenner als die Namen dieser Zahlen vorstellt, welche die Art der Einheit bezeichnen, wovon diese Zahlen gewisse Mengen enthalten, als in dem gegenwärtigen Falle, Fünftel, Achtel, Zehntel und Fünfzehntel des Ganzen. Man vergleiche nun diese Arten der Einheiten unter sich, so wird man bald einsehen, daß eine Einheit, die ein Fünftel, oder der fünfte Theil eines Ganzen ist, größer seyn müsse, als eine solche, die nur ein Achtel, Zehntel oder Fünfzehntel, d. h., der achte, zehnte oder fünfzehnte Theil eben dieses Ganzen ist, und daß ein Fünftel eines Ganzen zweymal so groß sey, als ein Zehntel und drey mal so groß als ein Fünfzehntel eben dieses

Ganzen; und daß mithin ein Fünfzehntel nur der dritte Theil und ein Zehntel nur die Hälfte eines Fünftels von ebendemselben Ganzen sey. Und hieraus wird man von selbst den Schluß machen müssen, daß die Größe der Einheit, deren Arten die Nenner der Brüche bezeichnen, überhaupt von der Zahl der Theile abhänge, in welche das Ganze, worauf sie sich beziehet, getheilt worden ist, und daß also, wenn man ein Ganzes zuerst in irgend eine beliebige Anzahl, und hernach in eine zwey- drey- viermal so große Anzahl gleicher Theile theilt, die Einheit eines Theils von der ersten Theilung die größte, und zwey- drey- viermal so groß sey, als die Einheit eines Theils von der zweyten, dritten, vierten Theilung, und daß folglich die letztere zwey- drey- viermal kleiner sey, als die erstere. Was aber von diesen Einheiten selbst gilt, das gilt auch von den Zahlen, welche entstehen, wenn man von ihnen allen Gleichvielfaches nimmt, weil dadurch die Größe der einen, in Ansehung der andern nicht verändert wird; ist also $\frac{1}{5}$ größer als $\frac{1}{15}$, so ist auch $\frac{2}{5}$ größer, als $\frac{4}{15}$, und ist $\frac{1}{5}$ dreymal so groß, als $\frac{1}{15}$, so ist auch $\frac{4}{5}$ dreymal so groß, als $\frac{4}{15}$, und folglich ist umgekehrt, da $\frac{1}{15}$ dreymal kleiner, als $\frac{1}{5}$ ist, auch $\frac{4}{15}$ dreymal kleiner, als $\frac{4}{5}$.

Man stelle sich, um die Sache noch deutlicher einzusehen, vor, das Ganze, worauf sich die Brüche $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{15}$, beziehen, sey 1 Gulden, so ist $\frac{1}{5}$ Gulden = 12 Kreuzer, oder 1 Zwölfskreuzerstück, also $\frac{4}{5}$ Gulden = 4 Zwölfskreuzerstücke, $\frac{1}{15}$ Gulden aber ist = 6 Kreuzer, oder 1 Sechskreuzerstück, mithin $\frac{4}{15}$ Gulden = 4 Sechskreuzerstücke, endlich $\frac{1}{5}$ Gulden = 4 Kreuzer oder = 1 Bazen, folglich $\frac{4}{5}$ Gulden = 4 Bazen. Demnach ist $\frac{4}{5}$ Gulden = 12 Bazen, 2mal so viel, als $\frac{4}{15}$ Gulden = 6 Bazen und dreymal so viel, als $\frac{4}{15}$ Gulden = 4 Bazen.

§. 19.

Das, was so eben erwiesen worden ist, führt uns nun auf folgende neue und wichtige Lehrsätze von den Brüchen.

- I. Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, so kann dies auf zweyerley Arten gesche-

hen, entweder dadurch, daß man! den Zähler des Bruchs mit dieser Zahl multiplicirt, oder dadurch, daß man seinen Nenner mit eben dieser Zahl dividirt.

Denn da nach dem vorigen (§.) ein Bruch bey einerley Nenner um so viel größer ist, je größer sein Zähler, und bey einerley Zähler um so viel größer, je kleiner sein Nenner ist, so wird allerdings ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt, d. h., er wird um so vielmal größer gemacht, als er vorher war, wie vielmal diese Zahl die Einheit enthält, wenn man entweder bey unverändertem Nenner seinen Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt, oder bey unverändertem Zähler seinen Nenner mit der ganzen Zahl dividirt. Soll z. B. der Bruch $\frac{1}{2}$ mit der Zahl 3 multiplicirt werden, so erhält man, wenn man seinen Zähler 3 mit dieser Zahl multiplicirt, den Bruch $\frac{3}{2}$, dividirt man aber seinen Nenner 15 durch eben diese Zahl 3, so erhält man den Bruch $\frac{1}{5}$. Allein diese beyden Brüche $\frac{3}{2}$ und $\frac{1}{5}$ sind einander gleich, denn bey dem ersten ist zwar das Ganze in drey mal mehr Theile getheilt, und folglich ist auch jeder einzelne Theil drey mal kleiner, als bey dem letzten, aber von diesen drey mal kleineren Theilen sind auch in dem ersten $\frac{3}{2}$ gerade drey mal so viel genommen, als in dem letzten Bruch $\frac{1}{5}$ von den drey mal größern Theilen des Ganzen genommen sind.

- II. Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl dividirt werden, so kann dies auch auf zweyerley Arten geschehen, nämlich entweder dadurch, daß man den Zähler des Bruchs durch die ganze Zahl dividirt, oder dadurch, daß man seinen Nenner durch diese Zahl multiplicirt.

Denn da nach dem vorigen (§.) ein Bruch bey einerley Nenner um so viel kleiner ist je kleiner sein Zähler, und bey einerley Zähler um so viel kleiner, je größer sein Nenner ist, so wird immer ein Bruch mit einer ganzen Zahl dividirt, d. h., er wird um so vielmal kleiner gemacht, als er vorher war, wie vielmal diese ganze Zahl die Einheit enthält, wenn

man entweder bey unverändertem Nenner seinen Zähler mit der ganzen Zahl dividirt, oder bey unverändertem Zähler seinen Nenner mit dieser Zahl multiplicirt. Wenn z. B. der Bruch $\frac{1}{2}$ durch die Zahl 4 dividirt werden soll und man dividirt wirklich seinen Zähler 12 durch die Zahl 4, so erhält man den Bruch $\frac{3}{4}$, multiplicirt man aber seinen Nenner 16 mit eben dieser Zahl 4, so erhält man den Bruch $\frac{1}{4}$, und diese beyden Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{4}$ sind wiederum einander gleich, denn bey dem ersten ist zwar das Ganze in viermal weniger Theile getheilt, und jeder dieser einzelnen Theile ist folglich auch viermal größer, als bey dem letzteren, dagegen aber sind auch von den viermal größeren Theilen des ersten Bruchs $\frac{3}{4}$ gerade viermal weniger genommen, als von den viermal kleineren Theilen des letzteren Bruchs $\frac{1}{4}$.

III. Ein Bruch behält seinen Werth unverändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt.

Nach dem vorigen (S.) wird ein Bruch um so vielmal größer, wie vielmal größer man bey einerley Nenner seinen Zähler macht, und er wird im Gegentheil um so vielmal kleiner, wie vielmal größer man bey einerley Zähler seinen Nenner macht. Macht man daher den Zähler und den Nenner eines Bruchs beyde gleichvielmal größer, d. h., multiplicirt man seinen Zähler und Nenner mit einerley Zahl, so wird der Bruch durch die erste Veränderung, nämlich durch die Multiplication des Zählers, gerade um so vielmal größer, wie vielmal er durch die zweyte Veränderung, nämlich durch die Multiplication des Nenners, kleiner gemacht wird, und folglich bleibt er in der That unverändert. Z. B. wenn der Bruch $\frac{3}{5}$ im Zähler und Nenner mit der Zahl 5 multiplicirt wird, so wird daraus $\frac{15}{25}$ und dieser Bruch ist dem vorigen an Werthe vollkommen gleich, denn der Bruch $\frac{3}{5}$ wurde zwar dadurch, daß man seinen Zähler 3 mit der Zahl 5 multiplicirte, 5mal größer gemacht, weil nun $\frac{15}{5}$ des Ganzen 5×3 mal, d. h., 15mal

genommen wurde, anstatt daß es vorhin nur 3mal genommen war; allein diese Vergrößerung wurde dadurch wieder aufgehoben, daß man auch den Nenner 5 des Bruchs $\frac{3}{5}$ mit eben dieser Zahl multiplicirte, denn dadurch wurde nun das Ganze in $5 \times 5 = 25$ Theile getheilt, anstatt daß es vorhin nur in 5 solcher Theile getheilt war. Da also durch diese Multiplication des Bruchs $\frac{3}{5}$ mit der Zahl 5 auf der einen Seite zwar fünfmal mehr Theile von dem Ganzen genommen wurde, aber auf der andern Seite jeder von diesen fünfmal mehreren Theilen auch fünfmal kleiner gemacht wurde, so mußte nothwendig der Bruch seinem Werthe nach unverändert bleiben.

Nach eben dem vorigen (§.) wird auch ein Bruch um so vielmal kleiner gemacht, um wie vielmal kleiner man bey einerley Nenner seinen Zähler macht; und er wird im Gegentheil um so vielmal größer, um wie vielmal kleiner man bey einerley Zähler seinen Nenner macht. Wird also der Zähler und Nenner eines Bruchs gleich vielmal kleiner gemacht, d. h., wird der Zähler und der Nenner eines Bruchs durch einerley Zahl dividirt, so wird der Bruch durch die erste Veränderung, nämlich durch die Division des Zählers, um so vielmal kleiner gemacht, um wie vielmal er durch die zweyte Veränderung, nämlich durch die Division des Nenners, wiederum größer gemacht wird, und folglich muß er im Grunde unverändert bleiben. Z. B. wenn der Bruch $\frac{21}{21}$ durch die Zahl 3 im Zähler und Nenner dividirt wird, so erhält man daraus den Bruch $\frac{7}{7}$ und dieser ist dem vorigen vollkommen gleich. Denn dadurch daß man den Nenner 21 mit der Zahl 3 dividirte, wurde zwar der Bruch selbst dreyimal größer gemacht, indem das Ganze, worauf er sich beziehet, in dreyimal weniger Theile getheilt, und folglich jeder von den Theilen des Ganzen, die er enthält, dreyimal größer gemacht wurde, als vorhin. Diese Vergrößerung aber wurde dadurch wieder aufgehoben, daß man auch den Zähler 21 dieses Bruchs mit eben dieser Zahl 3 dividirte, indem solchergestalt von den Theilen des Ganzen, worauf sich der Bruch beziehet, dreyimal weniger genommen wurden, als vorhin. Wenn also ein Bruch im Zähler und Nenner mit einerley Zahl dividirt wird, so wird zwar das Ganze, worauf sich der

Bruch beziehet, dadurch in so viel weniger Theile getheilt, und jeder einzelne Theil, folglich auch der ganze Bruch wird dadurch um so vielmal größer, wie vielmal die ganze Zahl, womit man ihn dividirt hat, die Einheit enthält. Aber er wird auf der andern Seite zugleich dadurch wieder um eben so vielmal kleiner gemacht, daß man nun von seinen größeren Theilen gerade so vielmal weniger nimmt, wie vielmal größer man sie gemacht hat, und folglich bleibt der Bruch seinem Werthe nach unverändert.

§. 20.

Aus Nro. I. des vorigen (§.) fließen nun wiederum folgende neue Sätze:

- I. Wenn man einen Bruch mit seinem Nenner multiplicirt, so ist das Product dem Zähler gleich.

Denn nach Nro. I. des vorigen (§.) wird ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt, wenn man seinen Zähler damit multipliciret. Wird aber der Zähler eines Bruchs mit seinem Nenner multiplicirt, so wird, da der Nenner jedesmal anzeigt, in wie viel Theile das Ganze, worauf sich der Bruch beziehet, getheilt worden sey, der Zähler hingegen anzeigt, wie viel von diesen Theilen vorhanden seyen, jeder der durch den Zähler angegebenen Theile des Ganzen gerade so vielmal genommen, in wie viel Theile das Ganze selbst getheilt worden ist, und folglich muß man dadurch eine Anzahl von Theilen des Ganzen erhalten, die das Ganze selbst so oft enthält, als der Zähler die Einheit; das Product also, das man auf diese Art erhält, muß dem Zähler selbst am Werthe gleich seyn. Denn da alle Theile eines Ganzen zusammen genommen, dem Ganzen selbst gleich sind, so muß auch das Zweyfache, Dreyfache und überhaupt jedes Vielfache aller Theile des Ganzen dem Zweyfachen, Dreyfachen und überhaupt jedem Gleichvielfachen des Ganzen selbst gleich seyn. Z. B. wenn man den Bruch $\frac{2}{3}$ mit seinem Nenner 3 multiplicirt, so erhält man den Bruch $\frac{2 \cdot 3}{3}$, dieser aber

ist dem Zähler 3 des vorigen Bruchs gleich, denn er enthält die 3 Theile des Ganzen 8mal genommen, oder welches einerley ist, die 8 Theile, worin das Ganze getheilt worden ist, und folglich auch das Ganze selbst 3mal. Daß der Bruch $\frac{24}{8}$ der Zahl 3 gleich sey, erhellet auch daraus, wenn man, wie nach (§. 17.) Nro. I. richtig geschehen kann, diesen Bruch als einen Quotienten betrachtet, der entsteht, wenn man seinen Zähler mit seinem Nenner dividirt; denn wenn man hier die Division wirklich verrichtet, so erhält man zum Quotienten die Zahl 3.

- II. Eine jede ganze Zahl ist einem Bruche gleich, dessen Zähler das Product der ganzen Zahl in seinen Nenner ist.

Denn da nach Nro. I. ein Bruch, wenn er mit seinem Nenner multiplicirt wird, ein Product giebt, das seinem Zähler gleich ist, so darf man, wenn man aus einer ganzen Zahl einen Bruch machen will, der ihr gleich sey, nur diese ganze Zahl als den Zähler des Bruchs ansehen, ihm nach Belieben einen Nenner geben, und hernach den Bruch mit diesem beliebig angenommenen Nenner multipliciren. Z. B. wenn aus der Zahl 7 ein ihr gleicher Bruch gemacht werden soll, so kann dies auf unzählig vielerley Arten geschehen, man wähle z. B. die Zahl 9, betrachte die Zahl 7 als den Zähler des Bruchs, setze die 9 darunter, und multiplicire nun diesen Bruch $\frac{7}{9}$ mit seinem Nenner 9, so erhält man den Bruch $\frac{63}{9}$ und dieser ist nicht mehr und nicht weniger als die Zahl 7, welches man gleich finden kann, wenn man nach (§. 17.) den Zähler 63 dieses Bruchs als Dividendus, seinen Nenner 9 aber als Divisor ansiehet, und die Division wirklich verrichtet.

§. 21.

Sollen mehrere Brüche von einerley Nenner addirt werden, so darf man nur, ihre Zähler addiren, und der

Summe derselben den gegebenen gemeinschaftlichen Nenner untersetzen.

Daß man auf diese Art die richtige Summe der gegebenen Brüche erhalte, ist leicht einzusehen, wenn man sich nach (§. 17.) Nro. II. dieselbigen als benannte Zahlen vorstellt, indem man ihre Nenner als die Namen der Zähler ansieht. Denn da die Nenner gleich sind, so sind demnach die Zähler lauter Dinge von einerley Art, und man darf also, um ihre Summe zu finden, sie nur, wie jede andere Dinge von einerley Art, schlechthin zusammenzählen, und ihre Summe bekommt den gemeinschaftlichen Nenner derselben zum Namen. Wenn z. B. die Brüche $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, addirt werden sollen, so sehe man sie als benannte Zahlen an, und schreibe sie also, $3 + 5 + 7$ Achtel, und es ist eben so einleuchtend, daß diese $3 + 5 + 7$ Achtel zusammen 15 Achtel ausmachen, als es einleuchtend ist, daß $3 + 5 + 7$ Gulden zusammen 15 Gulden betragen.

§. 22.

Sollen zwey Brüche von einerley Nenner von einander abgezogen werden, so darf man nur den Zähler des kleinern vom Zähler des größern abziehen, und der gefundenen Differenz den gegebenen gemeinschaftlichen Nenner untersetzen.

Daß der so gefundene Bruch der Differenz der gegebenen Brüche gleich sey, erhellet wiederum daraus, daß man nach (§. 17.) die gegebenen Brüche als benannte Zahlen ansehen kann. Denn wenn man sie so betrachtet, so ist offenbar, daß man, da ihr gemeinschaftlicher Nenner anzeigt, daß sie Dinge von einerley Art seyen, eben so, wie man bey jeden andern Dingen von einerley Art verfahren muß, um ihre Differenz zu finden, nur das kleinere von größeren abziehen, und der Differenz eben den Namen, den beyde gleichartigen Dinge vorhin schon hatten, geben dürfe. Z. B. wenn von dem Bruch $\frac{21}{17}$ der Bruch $\frac{17}{17}$ abgezogen werden soll, so sehe man diese beyde Brüche als benannte Zahlen an, und schreibe sie also: 21 Vierundfünfzigstel, 17 Vierundfünfzigstel, und es ist eben so klar, daß 17 Vierundfünfzigstel, wenn sie

von 21 Vierundfünfzigstel abgezogen werden, 4 Vierundfünfzigstel übrig lassen, als es klar ist, daß wenn man von 21 Ellen 17 Ellen abschneidet, 4 Ellen übrig bleiben.

§. 23.

Aber nicht so leicht geht die Addition und Subtraction der Brüche von statten, wenn sie verschiedene Nenner haben, und doch ist dies gerade der Fall, der in Rechnungen bey weitem am häufigsten vorkommt. Es fragt sich also, wie man alsdann zu verfahren habe? Zuerst fällt es nun, wenn man sich nur erinnert, daß nach (§. 17.) alle Brüche als benannte Zahlen anzusehen seyen, so daß ihre Zähler die Zahlen selbst, ihre Nenner aber die Namen derselben vorstellen, sogleich in die Augen, daß Brüche von verschiedenen Nennern nichts anders bezeichnen, als gewisse Mengen von Dingen verschiedener Arten, und daß sie, so lange sie diese Bedeutung haben, unmöglich weder zu einander addirt, noch von einander abgezogen werden können, weil diese beyden Veränderungen nur allein mit Dingen von einerley Art vorgenommen werden können. Soll also die Aufgabe: die Summe oder den Unterschied zweyer Brüche von verschiedenen Nennern zu finden, aufgelöst werden, so ist das erste was man zu thun hat, um sich zur Auflösung den Weg zu bahnen, und wodurch auch die Auflösung allein möglich wird, daß, daß man suchen muß, zu machen, daß sie einerley Nenner bekommen, oder sie auf einerley Benennung zu bringen. Nun weiß man aus der Lehre der Multiplication mit ganzen Zahlen her, daß einerley Factoren immer einerley Product geben, man mag sie multipliciren in welcher Ordnung man will. Macht man hievon die Anwendung auf gegenwärtige Aufgabe, so ist leicht einzusehen, daß zwey Brüche von verschiedenen Nennern einerley Nenner bekommen würden, wenn man den Nenner eines jeden mit dem Nenner des andern multiplicirte. Denn hierdurch würden ihre Nenner zu Producten aus einerley Factoren folglich einander gleich gemacht. Allein, wenn man dies nur so schlechtthin thun wollte, so würden beyde Brüche dadurch, daß man das Ganze, worauf sie sich beziehen, in viel mehrere Theile theilte, (nach §. 18.) um eben so vielmal kleiner gemacht, und

man würde, wenn man alsdann ihre Summe oder Differenz suchen wollte, die Summe oder Differenz von zwey viel kleinern, folglich von ganz andern, als den gegebenen Brüchen finden. Soll also, jener Veränderung ungeachtet, der Werth der gegebenen Brüche unverändert bleiben, so muß man (nach §. 19. Nro. III.) auch ihre Zähler mit eben den Zahlen multipliciren, womit man, um sie auf einerley Nenner zu bringen, ihre Nenner multipliciren mußte. Und daher fließt dann die Regel: wenn zwey gegebene Brüche von verschiedenen Nennern auf einerley Nenner gebracht werden sollen, so multiplicire man einen jeden im Zähler und Nenner mit dem Nenner des andern; oder man multiplicire den Zähler eines jeden mit dem Nenner des andern, und gebe ihnen das Product aus den Nennern beyder zum gemeinschaftlichen Nenner.

Es ist leicht einzusehen, daß eben das, was so eben von zwey Brüchen gesagt worden ist, auch von allen möglichen Brüchen gelte, man mag ihre Anzahl so groß annehmen, als man will. Hat man aber einmal auf diese Art die gegebenen Brüche auf einerley Nenner gebracht, so kann alsdann ihre Summe oder Differenz nach den beyden vorigen §§. ohne Mühe gefunden werden.

Es seyen zu addiren die Brüche

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}; \quad \left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12} \\ \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \end{array} \right\} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12}$$

$$\frac{6}{10} + \frac{9}{11}; \quad \left. \begin{array}{l} \frac{6}{10} = \frac{6 \times 11}{10 \times 11} = \frac{66}{110} \\ \frac{9}{11} = \frac{9 \times 10}{11 \times 10} = \frac{90}{110} \end{array} \right\} = \frac{66 + 90}{110} = \frac{156}{110}$$

$$\frac{7}{8} + \frac{5}{9}; \quad \left. \begin{array}{l} \frac{7}{8} = \frac{7 \times 9}{8 \times 9} = \frac{63}{72} \\ \frac{5}{9} = \frac{5 \times 8}{9 \times 8} = \frac{40}{72} \end{array} \right\} = \frac{63 + 40}{72} = \frac{103}{72}$$

$$\frac{5}{9} + \frac{7}{11} + \frac{9}{11} = \frac{2661}{1485}, \text{ denn es ist:}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{der Zähler des 1ten Bruchs} & = 5 \times 11 \times 15 & = 825 \\ = & = & = \text{Iten} & = 7 \times 9 \times 15 & = 945 \\ = & = & = \text{IIten} & = 9 \times 9 \times 11 & = 891 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Demnach die Summe aller Zähler} = 2661 \\ \text{gemeinschaftlicher Nenner} = 9 \times 11 \times 15 = 1485 \end{array}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{9} = \frac{2436}{864}, \text{ denn es ist:}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{der Zähler des 1ten Bruchs} & = 2 \times 4 \times 8 \times 9 & = 576 \\ = & = & = \text{Iten} & = 3 \times 3 \times 8 \times 9 & = 648 \\ = & = & = \text{IIten} & = 5 \times 3 \times 4 \times 9 & = 540 \\ = & = & = \text{IVten} & = 7 \times 3 \times 4 \times 8 & = 672 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Demnach die Summe aller Zähler} = 2436 \\ \text{gemeinschaftlicher Nenner} = 3 \times 4 \times 8 \times 9 = 864 \end{array}$$

Soll von dem Bruch $\frac{7}{10}$ der Bruch $\frac{2}{7}$ abgezogen werden, so stehet die Rechnung also:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{7}{10} = \frac{7 \times 7}{10 \times 7} = \frac{49}{70} \\ \frac{2}{7} = \frac{2 \times 10}{7 \times 10} = \frac{20}{70} \end{array} \right\} = \frac{49-20}{70} = \frac{29}{70}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{5} = \frac{4 \times 8}{5 \times 8} = \frac{32}{40} \\ \frac{3}{8} = \frac{3 \times 5}{8 \times 5} = \frac{15}{40} \end{array} \right\} = \frac{32-15}{40} = \frac{17}{40}$$

§. 24.

Sollen zwei Brüche miteinander multiplicirt werden, so ist offenbar, daß, wenn man den Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplikators multipliciren wollte, man ein viel zu großes Product erhalten würde, denn man sollte ja nicht den einen Bruch mit so viel Ganzen multipliciren, als der Zähler des andern anzeigt, sondern nur mit so viel Theilen eines Ganzen, als der Zähler des andern Bruchs anzeigt, und deren Größe der Nenner desselben bestimmt. Dieses Product würde also gerade um eben so vielmal zu groß seyn, wie vielmal in dem Nenner des Multiplikators die Einheit

enthalten ist. Um also das verlangte Product richtig zu erhalten, müßte man das zuerst gefundene um so vielmal kleiner machen, um wie vielmal zu groß es gefunden wurde, man müßte es also mit dem Nenner des Multiplikators dividiren. Demnach wird ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt, wenn der Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplikators multiplicirt, und das Product durch den Nenner des letztern dividirt wird. Da nun (nach §. 19. Nro. I. und II.) ein Bruch durch eine ganze Zahl auf zweyerley Art multiplicirt und dividirt werden kann, so kann folglich ein Bruch durch einen andern Bruch auf viererley Art multiplicirt werden; nämlich

- I. Wenn man bey unverändertem Nenner des Multiplicandus den Zähler desselben mit dem Zähler des Multiplikators multiplicirt, und das Product durch den Nenner des letztern dividirt.
- II. Wenn man den Nenner des Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplikators und den Zähler des Multiplicandus mit dem Nenner des Multiplikators dividirt.
- III. Wenn man bey unverändertem Zähler des Multiplicandus den Nenner desselben mit dem Zähler des Multiplikators dividirt und den Quotienten mit dem Nenner des letztern multiplicirt.
- IV. Wenn man den Zähler des Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplikators und den Nenner des Multiplicandus mit dem Nenner des Multiplikators, oder kürzer, wenn man von beyden Brüchen Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt.

Von diesen viererley Verfahrensarten läßt sich, wenn man durch die Multiplication der gegebenen Brüche unmittelbar einen Bruch zu bekommen sucht, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen seyen, (wie man dann dies gemeiniglich sucht, da sich der Werth solcher Brüche, deren Zähler und Nenner auch wieder aus gebrochenen Zahlen bestehen, nimmer so leicht übersehen läßt) nur die letzte in allen Fällen anwenden. Z. B.

$$\frac{3}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{21}{32}; \quad \frac{11}{15} \times \frac{17}{23} = \frac{187}{345}; \quad \frac{37}{49} \times \frac{51}{75} = \frac{1887}{3675}.$$

Wenn $\frac{16}{4}$ mit $\frac{4}{8}$ zu multipliciren ist, so ist das Product:

$$\text{nach Nro I.} = \frac{8}{4},$$

$$\text{nach Nro II.} = \frac{2}{16},$$

$$\text{nach Nro III.} = \frac{16}{128},$$

$$\text{nach Nro IV.} = \frac{64}{512}.$$

Alle diese Brüche aber sind einander gleich, indem jeder $= \frac{2}{16}$ oder $\frac{1}{8}$ ist, wie man leicht findet, wenn man den ersten mit der Zahl 8, den zweyten mit der Zahl 2, den dritten mit der Zahl 16, und den vierten mit der Zahl 64 im Zähler und Nenner dividirt.

§. 25.

Sollen zwey Brüche mit einander dividirt werden, so ist leicht einzusehen, daß, wenn man den Dividendus mit dem Zähler des Divisors dividiren wollte, man einen viel zu kleinen Quotienten erhalten würde, denn man sollte nicht den einen Bruch mit so viel Ganzen dividiren, als der Zähler des andern anzeigt, sondern nur mit so viel Theilen eines Ganzen, als der Zähler des andern anzeigt, und deren Größe der Nenner desselben bestimmt. Dieser Quotient würde also gerade um so vielmal zu klein seyn, wie vielmal in dem Nenner des Divisors die Einheit enthalten ist. Um also den gesuchten Quotienten richtig zu erhalten, müßte man den zuerst gefundenen um so vielmal größer machen, um wie vielmal zu klein er vorhin gefunden wurde, man müßte ihn also mit dem Nenner des Divisors multipliciren. Demnach wird ein Bruch mit einem Bruche dividirt, wenn man den Dividendus mit dem Zähler des Divisors dividirt, und den Quotienten mit dem Nenner des letzteren multiplicirt. Da nun (nach §. 19. Nro. I. und II.) ein Bruch auf zweyerley Art durch eine ganze Zahl multiplicirt und dividirt werden kann; so kann folglich ein Bruch durch einen Bruch auf viererley Art dividirt werden; nämlich

- I. Wenn man bey unverändertem Nenner des Dividendus den Zähler desselben mit dem Zähler des Divisors dividirt und den Quotienten durch den Nenner des letzteren multiplicirt.

II. Wenn man bey unverändertem Zähler des Dividendus den Nenner desselben mit dem Zähler des Divisors multiplicirt, und das Product durch den Nenner des letzteren dividirt.

III. Wenn man den Zähler des Dividendus mit dem Zähler des Divisors, und den Nenner des Dividendus mit dem Nenner des Divisors dividirt.

IV. Wenn man den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors, oder kürzer, wenn man den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt.

Von diesen vier Verfahrensarten ist aber, wenn man die Absicht hat, durch die Division der gegebenen Brüche sogleich einen Bruch zu bekommen, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen seyen, wie man dann aus dem im vorigen §. angegebenen Grunde diese Absicht gewöhnlich hat, nur die vierte in allen Fällen anwendbar. Wenn z. B. der Bruch $\frac{12}{8}$ durch den Bruch $\frac{2}{3}$ dividirt werden soll, so ist der Quotient

$$\text{nach Nro I.} = \frac{32}{48},$$

$$\text{nach Nro II.} = \frac{12}{18},$$

$$\text{nach Nro III.} = \frac{4}{6},$$

$$\text{nach Nro IV.} = \frac{96}{144}.$$

Jeder dieser Brüche aber ist dem Bruche $\frac{2}{3}$ gleich, welches man findet, wenn man den ersten mit der Zahl 8, den zweiten mit der Zahl 3, den vierten mit der Zahl 24 im Zähler und Nenner dividirt. Der Ausdruck von dem Werthe des Bruches $\frac{2}{3}$ läßt sich noch weiter, im Zähler und Nenner, nämlich durch 2, dividiren, und folglich ist jeder der vier Brüche dem Bruch $\frac{2}{3}$ gleich;

$$\frac{7}{5} : \frac{5}{8} = \frac{7}{5} \times \frac{8}{5} = \frac{56}{25}; \quad \frac{25}{48} : \frac{33}{74} = \frac{25}{48} \times \frac{74}{33} = \frac{1850}{1584}$$

$$\frac{11}{15} : \frac{13}{21} = \frac{11}{15} \times \frac{21}{13} = \frac{231}{195}; \quad \frac{35}{61} : \frac{47}{89} = \frac{35}{61} \times \frac{89}{47} = \frac{3115}{2867}$$

§. 26.

Soll eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt werden, so multiplicire man die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruchs, und dividire das Product durch den Nenner desselben.

Der Beweis von der Richtigkeit dieses Verfahrens fließt aus den nämlichen Gründen wie im §. 24. 3. B.

$$\begin{aligned} 8 \times \frac{3}{4} &= \frac{8 \times 3}{4} = \frac{24}{4} = 6 \\ 9 \times \frac{7}{8} &= \frac{9 \times 7}{8} = \frac{63}{8} = 7 \frac{7}{8} \\ 17 \times \frac{31}{45} &= \frac{17 \times 31}{45} = \frac{527}{45} = 11 \frac{32}{45} \end{aligned}$$

§. 27.

Soll eine ganze Zahl mit einem Bruche dividirt werden, so dividire man die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruchs, und multiplicire den Quotienten mit dem Nenner desselben, oder kürzer, man multiplicire die ganze Zahl mit dem umgekehrten Bruch.

Der Beweis beruhet auf eben den Gründen, wie in §. 25. 3. B.

$$\begin{aligned} 9 : \frac{3}{4} &= \frac{9}{\frac{3}{4}} = 9 \times \frac{4}{3} = 3 \times 4 = 12 \\ &\text{oder} \\ 9 : \frac{3}{4} &= 9 \times \frac{4}{3} = \frac{9 \times 4}{3} = \frac{36}{3} = 12 \\ 15 : \frac{7}{8} &= 15 \times \frac{8}{7} = \frac{15 \times 8}{7} = \frac{120}{7} = 17 \frac{1}{7} \end{aligned}$$

§. 28.

Wenn man das in den letzten vier §§. gezeigte Verfahren, einen Bruch und eine ganze Zahl mit einem Bruche zu multipliciren und zu dividiren, aufmerksam betrachtet, so wird man sich nicht daran stoßen, daß man bey der Multiplication eines Bruchs oder einer ganzen Zahl mit einem Bruche das Product kleiner fand, als den Multiplicandus, und daß man im Gegentheil bey der Division eines Bruchs oder einer ganzen Zahl

mit einem Bruche den Quotienten größer fand, als den Dividendus. Man wird vielmehr den Grund davon leicht darin entdecken, daß die Multiplication eines Bruchs oder einer ganzen Zahl mit einem Bruche eben so wenig eine bloße Multiplication, als die Division eines Bruchs oder einer ganzen Zahl mit einem Bruche eine bloße Division ist, indem die erstere neben der Multiplication des Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplikators noch eine Division des Products mit dem Nenner des letzteren, (nach §. 24. und 26.) die letztere hingegen neben der Division des Dividendus mit dem Zähler des Divisors noch eine Multiplication des Quotienten mit dem Nenner des letzteren (nach §. 25 und 27.) erfordert. Hieraus wird man zugleich einsehen, daß bey der Multiplication eines Bruchs oder einer ganzen Zahl mit einem Bruche, das Product immer kleiner, als der Multiplicandus, und bey der Division eines Bruchs oder einer ganzen Zahl mit einem Bruche, der Quotient immer größer, als der Dividendus werden müsse, so oft der Nenner, im ersten Falle des Multiplikators, im letzten des Divisors, größer ist, als dessen Zähler. Dies führt uns nun auf die Bemerkung eines in Absicht auf die Größe und übrige Beschaffenheit der Zähler und Nenner unter den Brüchen Statt habenden Unterschieds, und der darauf gegründeten Eintheilung derselben.

Bey einem Bruche kann nämlich entweder der Nenner größer als der Zähler, oder umgekehrt der Zähler größer als der Nenner seyn, im ersten Falle heißt der Bruch ein *ächter*, im letzten ein *unächter*; ferner kann der Nenner eines Bruchs in seinem Zähler entweder aufgehen oder nicht, ist das erste, so wird der Bruch ein *uneigentlicher*, ist aber das letzte, so wird er ein *eigentlicher* genannt. Hieraus ergiebt sich also, daß zwar ein unächter Bruch entweder ein eigentlicher oder uneigentlicher seyn könne, daß aber ein achter Bruch immer auch ein eigentlicher sey, folglich nie ein uneigentlicher seyn könne. Auf einen dritten Unterschied unter den Brüchen, führten uns die in §. 24. u. 25. beschriebenen Verfahrensarten, einen Bruch mit einem andern zu multipliciren oder zu dividiren. Denn es wurde daselbst schon bemerkt, daß wenn man bey der Multiplication zweyer Brüche das erste, zweyte und dritte Verfahren

in §. 24. und bey der Division zweyer Brüche das erste, zweyte und dritte Verfahren in §. 25. anwenden wollte, man meistens im ersten Falle zum Producte und im letzten zum Quotienten einen Bruch bekommen würde, dessen Zähler und Nenner auch wieder gebrochene Zahlen wären. Einen solchen Bruch nun nennt man einen unordentlichen, da hingegen ein Bruch, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, ein ordentlicher genannt wird.

Da man nun (nach Nro I. §. 17.) einen jeden Bruch als den Quotienten betrachten kann, welcher entsteht, wenn man den Zähler des Bruchs durch seinen Nenner dividirt, und da man (nach §. 25. Nro II.) jeden Bruch mit jedem andern wirklich dividiren kann, so kann man folglich jeden unordentlichen Bruch in einen ordentlichen verwandeln, wenn man den Zähler desselben mit seinem Nenner (nach §. 25. Nro II.) wirklich dividirt. Hieraus erhellet also, daß man diese letztere Einteilung der Brüche auch ganz entbehren könnte.

§. 29.

Soll ein Bruch zu einer ganzen Zahl addirt, oder davon abgezogen werden, so verwandle man die ganze Zahl in einen Bruch von gleichem Nenner (nach §. 20. Nro II.) und addire im ersten Falle die beyden Brüche, oder ziehe im letzten den kleineren von dem größeren ab. Doch kann man bey der Subtraction, wenn der abzuziehende Bruch ein ächter Bruch ist, kürzer dadurch zu seinem Zwecke gelangen, daß man von der ganzen Zahl nur eine Einheit wegnimmt, diese in einen Bruch verwandelt, der mit dem gegebenen einerley Nenner hat, und von demselben den gegebenen Bruch abzieht.

Beyspiele der Addition.

$$\begin{aligned}
 9 + \frac{5}{4} &= \frac{9 \times 4}{4} + \frac{5}{4} = \frac{36}{4} + \frac{5}{4} = \frac{36+5}{4} = \frac{41}{4} \\
 145 + \frac{31}{87} &= \frac{145 \times 87}{87} + \frac{31}{87} = \frac{12615}{87} + \frac{31}{87} = \frac{12615+31}{87} \\
 &= \frac{12646}{87}
 \end{aligned}$$

Beispiele der Subtraction.

$$7 - \frac{5}{8} = \frac{7 \times 8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{56}{8} - \frac{5}{8} = \frac{56-5}{8} = \frac{51}{8}$$

$$21 - \frac{11}{17} = 20 + \frac{17}{17} - \frac{11}{17} = 20 + \frac{17-11}{17} = 20 + \frac{6}{17}$$

$$56 - \frac{18}{25} = 55 + \frac{25}{25} - \frac{18}{25} = 55 + \frac{25-18}{25} = 55 + \frac{7}{25}$$

§. 30.

Bisher haben wir die vier arithmetischen Operationen mit ganzen und gebrochenen Zahlen besonders vorgenommen. Allein man kommt in Rechnungen sehr oft auf ganze Zahlen mit angehängten Brüchen, wie wir es auch im Bisherigen schon mehrmals gefunden haben. Man nennet solche Ausdrücke gemischte Zahlen; und man kann aus der Betrachtung der Natur derselben leicht schließen, daß sie den vier arithmetischen Operationen eben so gut unterworfen seyn müssen, als die Theile, woraus sie bestehen, das heißt, als die ganzen und gebrochenen Zahlen, jede insbesondere. Es entsteht also die Frage, wie man es anzugreifen habe, wenn man die Veränderungen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division, entweder mit gemischten und gemischten, oder mit gemischten und ganzen, oder endlich mit gemischten und gebrochenen Zahlen vornehmen solle? Die allgemeine Regel für alle diese Veränderungen ist nun diese:

Man verwandle die gemischten Zahlen (nach §. 20. Nro II.) in unächte Brüche, und verfähre im übrigen nach den für die Rechnungsarten mit Brüchen bisher gegebenen Anweisungen.

Beispiele.

I. Addition gemischter Zahlen.

$$5\frac{3}{8} + 11\frac{4}{9} = \frac{43}{8} + \frac{103}{9} = \frac{43 \times 9 + 103 \times 8}{8 \times 9} = \frac{387 + 824}{72} \\ = 16\frac{50}{72}$$

$$17\frac{3}{4} + 21\frac{5}{7} = \frac{71}{4} + \frac{149}{7} = \frac{71 \times 7 + 149 \times 4}{4 \times 7} = \frac{497 + 608}{28} \\ = \frac{1105}{28} = 39\frac{13}{28}$$

II. Subtraction gemischter Zahlen.

$$31 \frac{4}{7} - 25 \frac{2}{5} = \frac{31 \times 7 + 4}{7} - \frac{25 \times 5 + 2}{5} = \frac{121}{7} - \frac{127}{5}$$

$$= \frac{121 \times 5 - 127 \times 7}{7 \times 5} = \frac{1105 - 889}{35} = \frac{216}{35} = 6 \frac{6}{35}$$

$$15 \frac{3}{4} - 9 \frac{7}{8} = \frac{15 \times 4 + 3}{4} - \frac{9 \times 8 + 7}{8} = \frac{63}{4} - \frac{79}{8}$$

$$= \frac{63 \times 8 - 79 \times 4}{4 \times 8} = \frac{504 - 316}{32} = \frac{188}{32} = 5 \frac{28}{32}$$

III. Multiplication gemischter Zahlen.

$$41 \frac{2}{7} \times 67 \frac{5}{8} = \frac{41 \times 7 + 2}{7} \times \frac{67 \times 8 + 5}{8} = \frac{289}{7} \times \frac{541}{8}$$

$$= \frac{289 \times 541}{7 \times 8} = \frac{156349}{56} = 2793 \frac{41}{56}$$

$$21 \frac{3}{4} \times 36 \frac{7}{9} = \frac{21 \times 4 + 3}{4} \times \frac{36 \times 9 + 7}{9} = \frac{87}{4} \times \frac{331}{9}$$

$$= \frac{87 \times 331}{4 \times 9} = \frac{28797}{36} = 799 \frac{33}{36}$$

IV. Division gemischter Zahlen.

$$11 \frac{5}{7} : 6 \frac{3}{4} = \frac{11 \times 7 + 5}{7} : \frac{6 \times 4 + 3}{4} = \frac{82}{7} : \frac{27}{4}$$

$$= \frac{82}{7} \times \frac{4}{27} = \frac{28 \times 4}{7 \times 27} = \frac{328}{189} = 1 \frac{139}{189}$$

$$27 \frac{7}{9} : 18 \frac{8}{11} = \frac{27 \times 9 + 7}{9} : \frac{18 \times 11 + 8}{11} = \frac{250}{9} : \frac{206}{11}$$

$$= \frac{250}{9} \times \frac{11}{206} = \frac{250 \times 11}{9 \times 206} = \frac{2750}{1854} = 1 \frac{896}{1854}$$

Daß man übrigens bey der Addition und Subtraction gemischter Zahlen das Gesuchte auf einem etwas kürzeren Wege erhalte, wenn man die ganzen und gebrochenen Zahlen, jede besonders, addirt und subtrahirt, wird jeder, der die bisher vorgetragenen Lehren von den Rechnungsarten mit diesen Zahlen verstanden hat, von selbst bemerken.

§. 31.

Bei unsern bisherigen Rechnungen kamen wir oft auf Brüche, denen man es leicht ansehen konnte, daß sie sich noch kleiner und einfacher ausdrücken ließen. Es

ist aber die Schuldigkeit des Rechners, die Antwort auf jede Rechnungsfrage in dem einfachsten möglichen Ausdrucke zu geben; wir müssen daher auch noch wissen, wie man einen Bruch, ohne seinen Werth zu ändern, durch kleinere, oder durch die kleinsten Zahlen ausdrücken könne. Man nennet diese Veränderung das Aufheben der Brüche. Es ist leicht einzusehen, daß dieses Aufheben nicht anders, als durch die Division geschehen könne, indem man nämlich den Zähler und Nenner des Bruchs mit einerley Zahl dividirt. Dabey wird also vorausgesetzt, daß der Zähler und Nenner eines Bruchs zusammenge-setzte, das heißt solche, Zahlen seyen, welche durch Multiplication aus andern einfachen Zahlen entstanden sind. Soll sich also ein Bruch aufheben lassen, so müssen sein Zähler und sein Nenner Producte seyn, die einen oder etliche Factoren mit einander gemein haben. Ein solcher gemeinschaftlicher Factor zweyer Producte heißt ein gemeinsames Maaß derselben, und er heißt das größte gemeine Maaß dieser Producte, wenn sie keinen größeren Factor mit einander gemein haben. Ein Bruch wird demnach aufgehoben, wenn man seinen Zähler und Nenner mit ihrem gemeinen Maaße dividirt. Z. B. man soll den Bruch $\frac{36}{56}$ aufheben, so dividire man ihn im Zähler und Nenner mit der Zahl 8 und man erhält den Bruch $\frac{4\cancel{5}9}{7}$, und weil die Zahl 8 das größte gemeine Maaß der Zahlen 36 und 56 ist, so ist $\frac{4\cancel{5}9}{7}$ der kleinste Ausdruck oder die kleinste Benennung, auf welche der obige Bruch gebracht werden kann. Z. B.

$$\begin{array}{rcl} \frac{36}{56} & = & \frac{4\cancel{5}9}{8\cancel{7}} = \frac{9}{14} \\ \frac{72}{81} & = & \frac{8\cancel{9}}{9\cancel{9}} = \frac{8}{9} \\ \frac{75}{125} & = & \frac{3\cancel{5}}{5\cancel{5}} = \frac{3}{5} \end{array}$$
