
Erster Abschnitt.

Von den ganzen Zahlen.

§. 1.

Unter der Zahlenwissenschaft (Arithmetica) versteht man die Wissenschaft von den Eigenschaften und Verhältnissen der Zahlen und den Methoden, aus gegebenen Zahlen und ihren Verhältnissen andere unbekannte zu finden.

Da nach dieser Erklärung die Zahlen den eigentlichen Gegenstand der Arithmetik ausmachen, so entstehen nun zuerst die Fragen:

- 1) Was ist eine Zahl? und
- 2) Wie kommen wir zu der Vorstellung davon?

Die Beantwortung der letzten dieser Fragen, welche auch zugleich zur Beantwortung der ersten führen wird, kann uns nicht schwer fallen, wenn wir nur ein wenig über das Verfahren nachdenken, was wir in allen Fällen anwenden müssen, wo wir mehrere Dinge zusammenzählen, und über die Beschaffenheit, welche die Dinge haben müssen, die wir zusammenzählen, oder in einer Zahl zusammenfassen sollen.

Wir werden alsdann bald finden

1) daß wir überhaupt nur dann zählen können, wann wir mehr, als ein Ding, vor uns haben.

2) daß wir, ehe wir zählen können, die vorhandenen Dinge erst mit einander vergleichen und

3) durch diese Vergleichung uns überzeugen müssen, daß sie einander so ähnlich seyen, daß, wenn man ihrer mehr, als eins, hat, es ebensoviel sey, als ob man ein und dasselbe Ding mehrmals vor sich hätte.

Gesetzt z. B. es sehe jemand in einem Garten eine Baumgruppe, deren einzelne Bäume sich durch folgende Merkmale unterscheiden:

- | | | |
|---------|---|----------------------------|
| Nro. 1. | habe zwey | } Nadeln in einer Scheide; |
| — 2. | — fünf | |
| — 3. | — Büscheln mit stumpfen | } Nadeln; |
| — 4. | — — — spizen | |
| — 5. | } haben weiche und breite Nadeln einfach und
kammartig, auf zwey entgegengesetzten Sei-
ten der Zweige; | |
| — 6. | | |
| — 7. | } haben steife und schmale Nadeln rund um
die Zweige her; | |
| — 8. | | |

so wird er sogleich bemerken, daß diese Bäume in Ansehung der Art, wie ihre Nadeln an den Zweigen sitzen, paarweise einerley Merkmale haben.

Weiß er nun ferner, daß, wenn man bloß die Art, wie die Nadeln an den Zweigen sitzen, zum Eintheilungsgrunde dieser Bäume annimmt, ohne auf deren übrige Verschiedenheit Rücksicht zu nehmen, Bäume mit zwey bis fünf Nadeln in einer Scheide zur Gattung der Kiefern, solche, deren Zweige mit ganzen Nadelbüscheln besetzt sind, zur Gattung der Lerchen, solche, die weiche und breite Nadeln auf zwey entgegengesetzten Seiten der Zweige einfach und kammartig tragen, zur Gattung der Tannen, und solche, deren Zweige

mit steifen und schmalen Nadeln rings umher besetzt sind, zur Gattung der Fichten gehören, so wird er sagen können: „in dieser Baumgruppe stehen zwey Kiefern, zwey Lerchen, zwey Tannen und zwey Fichten.“

Da aber jedes Paar dieser Bäume in Ansehung der Art, wie die Nadeln an den Zweigen sitzen, seine eigenthümlichen Merkmale hat, wodurch es sich von jedem der übrigen deutlich unterscheidet, so ist, so lange man diese eigenthümlichen Merkmale in Betrachtung zieht, kein weiteres Zusammenzählen derselben möglich. Sollen sie also doch zusammengezählt, d. h. als einzelne Bäume in einer Zahl zusammengefaßt werden, so kann dies nicht anders geschehen, als dadurch, daß man von allen eigenthümlichen Merkmalen derselben absteht, und bloß diejenigen heraushebt, die sie alle mit einander gemein haben, und solche in einen Begriff zusammenfaßt, der alsdann, eben weil er bloß diejenigen Merkmale enthält, worin sie alle einander ähnlich sind, ihnen allen zukommen, von einem wie vom andern ein Prädicat abgeben muß. So haben in dem hier gewählten Beispiele alle Theile der Baumgruppe diejenigen Merkmale mit einander gemein, welche zusammen den Begriff eines Nadelbaums bestimmen. Bleiben wir nun bey diesem Begriffe stehen, ohne auf die übrigen, jedem derselben eigenthümlichen, Merkmale zu sehen, so können wir sagen: in allen diesen Dingen findet sich Einheit des Begriffs oder der Merkmale, und um dieser Einheit willen, oder nach dieser Einheit, heißt jedes von ihnen eins, nämlich eins von solchen Dingen, denen dieser Begriff zukommt, oder, die durch ihn, als durch ihr Prädicat sich denken lassen. Und nun lassen sie sich auch ohne Anstand zusammenzählen; denn wegen der Einheit des Begriffs, die sich bey ihnen allen findet, ist es ganz gleichviel, ob wir mehrere von ihnen jedes einmal, oder eins von ihnen mehrmal setzen. Demnach machen die mehrerwähnten Theile der Baumgruppe zusammen acht Nadelbäume aus.

Da nun der Begriff, der diejenigen Merkmale enthält, die mehrere einzelnen Dinge mit einander gemein haben, der Begriff der Art ist, unter welcher

diese Dinge stehen. — Das Aufsteigen von den Arten zur Gattung, von den Gattungen zum Geschlechte u. s. w. geschieht ebenso, wie das Aufsteigen von den Individuen zur Art, durch Weglassung der eigenthümlichen und Heraushebung der gemeinschaftlichen Merkmale — so ergiebt sich hieraus das Grundgesetz der Arithmetik: „nur gleichartige Dinge lassen sich zusammenzählen.“

Und weil das Zusammenzählen mehrerer gleichartigen Dinge, bloß vermöge der Einheit des Begriffs der Art, der ihnen allen zukommt, oder unter welchen sie alle gebracht werden können, bewerkstelligt wird, und man dabey völlig ebenso verfährt, als ob bloß die Einheit dieses Begriffs (in concreto) mehr als einmal — sovielmals nämlich, als man Dinge hat, denen dieser Begriff zukommt — vorhanden wäre, so kann der Name, wodurch man anzeigt, wie viele Dinge dieser Art man habe, nichts anders seyn, als der Ausdruck einer gewissen Menge oder Anzahl von Einheiten, und eben deswegen heißt jeder solche Name eine Zahl. Eine Zahl ist also nichts anders, als ein bestimmtes Vielfaches der Einheit.

So war im vorigen Beispiele die herausgebrachte Zahl acht das Achtfache der Einheit, nämlich des Begriffs von einem Nadelbaume, unter welchem die zusammengezählten Dinge alle standen, welche Einheit also, da sie in jedem derselben einmal vorkam, in allen zusammen achtmal vorhanden war. Und ebenso verhält es sich mit allen übrigen Zahlen; alle ohne Ausnahme entstehen durch Wiederholung der zum Grunde gelegten Einheit des Begriffs oder der Merkmale, die sich an den Dingen findet, welche gezählt werden sollen. Wird zu einem noch eins hinzugesetzt, so erhält man zwey; eins und zwey zusammengesetzt giebt drey; setzt man zwey und zwey zusammen, so erhält man vier; vier und eins zusammen genommen giebt fünf, fünf und eins zusammen sechs; fünf und zwey macht sieben, fünf und drey giebt acht; setzt man fünf und vier zusammen, so erhält man neun; endlich giebt fünf zweymal genommen zehen.

Dieser Ursprung des Begriffs der Zahl und des Zählens ist in der wesentlichen Einrichtung unseres Vorstellungsvermögens so nothwendig und unabänderlich gegründet, daß auch in dem Sprachgebrauche der gemeinsten und unwissendsten Menschen nicht ein einziges Beyispiel nachzuweisen ist, das nicht den Grundsatz voraussetzte, daß man nur da zählen könne, wo man von Dingen einer Art mehr als eins, vorfindet. Denn auch in der Sprache der gemeinsten und unwissendsten Menschen wird man, sobald es von Dingen einer Art mehr, als eins, giebt, dem Namen eines solchen Dings das Wörtgen ein oder eine (den unbestimmten Artikel) zum Anzeigen, daß hier gezählt werden könne (denn eins ist der Anfang alles Zählens) vorgesetzt finden; da im Gegentheile wenn ein Ding das einzige in seiner Art ist, der Name desselben nie anders als mit den Wörtchen: der, die, das (dem bestimmten Artikel) vorkommen wird.

So wird z. B. der unwissendste Bauerjunge in der Stadt eben so gewiß nur nach dem Markte, dem Rathhause, dem Posthause u. hingegen nach einem Wirthshause, einer Badstube, einem Kramladen u. fragen, als er auf dem Dorfe nur von der Kirche, dem Schulmeister, der Feuerspritze u. dagegen überall nur von einer Last Holz, einem Bund Stroh, einem Eimer Wasser sprechen wird.

Noch einmal also: Jedes Ding wird eins genannt, wiefern an ihm etwas vorhanden ist, was an mehreren andern ebenso sich findet. Dieses Etwas heißt in abstracto die Einheit, und ist nichts anders, als das Aggregat der Merkmale, die zusammen den Begriff der Art ausmachen, unter welcher das Ding steht, oder zu welcher es gehört. Jedes bestimmte Vielfache dieser Einheit aber heißt eine Zahl.

§. 2.

Man zählt von den ältesten Zeiten her von eins bis zehn; alsdann fängt man wieder vorne an, und zählt zehn und eins, zehn und zwey, zehn und drey, oder anstatt dessen kürzer: elf, zwölf, dreyzehn u. s. w.

Wenn man so bis auf zweymal zehen, oder zwanzig gekommen ist; so fängt man wieder von eins an, und zählt fort bis auf drey mal zehen oder dreyßig, und wenn man bis auf zehenmal zehen gezählt hat; so sagt man, man habe hundert. Hier ist nun ein neuer Absatz, bey welchem man wieder von eins anfängt, und bis auf zehen, von da aber wieder bis auf hundert, wie vorhin, fortzählt. Hat man solcher Hunderte zehen gezählt, so nennt man sie zusammen tausend, und dies ist abermal ein neuer Absatz, bey welchem man wieder von vorne anfängt zu zählen; hat man aber zehen solcher Tausende, so nennt man sie zusammen zehntausend, ist man ferner bis auf zehen solcher Zehntausende gekommen; so werden diese zusammen hunderttausend genannt, endlich nennt man zehen hunderttausende eine Million. Bey diesem großen Absatze fängt man wiederum von neuem an, und wenn man im Zählen bis auf millionenmal Million gekommen ist; so nennt man dies eine Billion, millionenmal Billion wird Trillion, millionenmal Trillion aber Quadrillion u. s. w. genannt.

§. 3.

Die Zahlen von eins bis neun, deren Namen in (§. 1.) angegeben worden, und deren Zeichen folgende sind; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nennt man Einer oder einfache Einheiten; zehen solcher einfachen Einheiten geben eine zusammengesetzte Einheit, welche man einen Zehner nennt. Wenn man zehen solcher Zehner hat, deren jeder aus zehen Einern besteht; so geben diese eine neue zusammengesetzte Einheit, welche man einen Hunderter nennt; zehen solcher Hunderter geben einen Tausender; zehen solcher Tausender einen Zehntausender u. s. w.

Diese zusammengesetzten Einheiten kann man nach Ordnungen unterscheiden; so daß die Zehner die erste, die Hunderter die zweyte, die Tausender die dritte, die Zehntausender die vierte u. s. w. höhere Ordnung ausmachen.

Demnach begreift die Einheit einer jeden höheren Ordnung zehen Einheiten der nächstiniedrigeren in sich,

oder, zehen Einheiten einer niedrigeren Ordnung machen immer eine Einheit der nächsthöheren aus. Dies Gesetz liegt nun bey der ganzen Arithmetik zum Grunde, und erleichtert ihre Anwendung ungemein. Um sich dasselbe recht anschaulich zu machen, betrachte man einen zehen Fuß langen geometrischen Maßstab, der in seine Fuße, Zolle, Linien, und Scrupel eingetheilt ist. Auf demselben stellen die Scrupel, als die kleinsten Theile, die einfachen Einheiten vor, und da zehen Scrupel auf eine Linie, zehen Linien auf einen Zoll, zehen Zolle auf einen Fuß, und zehen Fuß auf eine Ruthe gehen, so sind, in Ansehung der Scrupel, die Linien Zehner, die Zolle Hunderter, die Fuße Tausender, und die Ruthe ist ein Zehntausender.

§. 4.

Eben diesem arithmetischen Grundgesetze, welches das Zählen der Zahlen so sehr erleichtert, folgt man auch bey dem Schreiben derselben, und bey dem Aussprechen geschriebener Zahlen mit gleichem Vortheil; denn man wird dadurch in den Stand gesetzt, mit den neun einfachen Zahlzeichen alle möglichen Zahlen, sie mögen so groß seyn, als man will, zu schreiben, und eine geschriebene Zahlenreihe, sie mag aus so vielen Ziffern bestehen, als man will, auszusprechen. Da nämlich, vermöge dieses Gesetzes, jede Ziffer einer Zahlenreihe, in jeder nachfolgenden Stelle, von der rechten gegen die linke Hand gerechnet, einen zehnmal größern Werth hat, als in der vorhergehenden; so wird nun der Werth einer jeden Ziffer sogleich unmittelbar durch ihre Stelle bestimmt. Ist aber von irgend einer Ordnung gar keine Ziffer vorhanden, so wird dieses dadurch angedeutet, daß man in diese Stelle eine Nulle (0) setzt. Soll man demnach eine vorgegebene Zahl aussprechen, so verfähre man also: Man theile die gegebene Zahl von der rechten gegen die linke Hand in Klassen und Abtheilungen ein, so daß auf jede Klasse drey Ziffern, und auf jede Abtheilung zwey Klassen, also sechs Ziffern, kommen; nach jeder Klasse mache man unterhalb der Zahlenreihe ein Komma, und nach jeder Abtheilung oberhalb der Zahlenreihe eine römische Ziffer, welche jedesmal die Zahl der Abtheilung angiebt, also z. B. nach der ersten Ab-

theilung die Ziffer I, nach der zweyten II, nach der dritten III, nach der vierten die Ziffer IV u. s. w. Nun bezeichnet jedes Komma die Stelle eines Tausenders, die römische Ziffer I bezeichnet die Stelle der Million, II die Stelle der Billion, III die Stelle der Trillion, IV die Stelle der Quadrillion und so fort. Auf diese Art hat man immer eigentlich nur drey Ziffern auszusprechen, wodurch also die Sache ungemein erleichtert wird. Man mache nun die Anwendung hiervon auf folgendes Beispiel. Es seye zum Aussprechen vorgegeben die Zahl

IV	III	II	I
987,	654,	323,	456,
789,	098,	765,	432,
			109.

Nachdem diese Zahl gehörig abgetheilt worden, muß sie folgendergestalt ausgesprochen werden:

Neunhundert sieben und achtzig Quadrillionen, sechshundert vier und fünfzigtausend dreihundert drey und zwanzig Trillionen, vierhundert sechs und fünfzig tausend siebenhundert neun und achtzig Billionen, acht und neunzig tausend siebenhundert fünf und sechzig Millionen, vierhundert zwey und dreyszig tausend einhundert und neun.

Dieses ganze Verfahren, welches man das Numeriren nennt, ist uns durch ein Naturgesetz unseres Vorstellungsvermögens, das Gesetz der Succession, ursprünglich vorgeschrieben, wodurch wir, um zu einer deutlichen Vorstellung von einem, aus vielen ungleichartigen Theilen zusammengesetzten, Ganzen zu gelangen, genöthiget sind 1) das Ganze in seine ungleichartigen Theile zu zerlegen, 2) nach und nach von jedem dieser Theile ins Besondere uns eine deutliche Vorstellung zu verschaffen, und 3) aus allen diesen Theilvorstellungen die Vorstellung des Ganzen zusammenzufassen.

§. 4.

Wenn mehrere Zahlen gegeben sind, und man finden soll, wie viel sie alle zusammen in einer Zahl ausmachen, so hat man dazu eine eigene Rechnungsart nöthig, welche man das Addiren nennt: die vermitteltst

derselben gefundene Zahl, welche allen gegebenen zusammen genommen gleich ist, wird die Summe, die gegebenen Zahlen aber, welche zusammen genommen die Summe ausmachen, werden summirende Zahlen oder Summanden genannt. Dies Zusammenzählen mehrerer Zahlen geht nun ganz leicht, so lange die vorgegebenen Zahlen nur Einheiten und Zehner enthalten, oder so lange ihrer überhaupt nur wenige sind; in solchen Fällen kann man meistens die Summe finden, ohne die gegebenen Zahlen vorher hinzuschreiben. Wenn aber der gegebenen Zahlen viele sind, oder wenn sie, ausser den Einheiten und Zehnern, auch noch Hunderter und Tausender, oder Ziffern von noch höhern Ordnungen enthalten, alsdann verfahre man also:

Man schreibe die gegebenen Zahlen alle untereinander, so, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter u. s. w., kurz, daß durchaus Ziffern von einerley Ordnung unter einander zu stehen kommen, und ziehe alsdann einen Strich darunter. Nun fange man bey den Einern an, und zähle die Ziffern zusammen, die in dieser Reihe unter einander stehen. Beträgt ihre Summe nicht mehr als 9, so setze man sie unter die Reihe der Einer; ist sie aber größer als 9, so wird nur die niedrigste Ziffer davon, das ist die, welche die Einheiten bezeichnet, unter die Reihe der Einer gesetzt, die höheren Ziffern aber, Zehner und Hunderter, wenn solche da sind, werden unter die, gegen die linke Hand zu nachfolgenden, Reihen der zu addirenden Zahlen von eben diesen Ordnungen vorgerückt. Hat man auf diese Art die Summe der Einer gefunden, so gehe man zu der Reihe der Zehner fort, und verfahre mit diesen, wie auch mit den nachfolgenden Hundertern, Tausendern u. s. w., bis ans Ende völlig eben so. Zuletzt wenn man die Summen aller einzelnen Zahlreihen auf die beschriebene Art gefunden und in ihre gehörigen Stellen gesetzt hat, ziehe man unter sie einen Strich, und addire auch diese auf eben die Art; so erhält man die Summe aller vorgegebenen Zahlen.

Wenn nun folgende Zahlen addirt werden sollten 6789, 7358, 9577, 5968, so müßte dies nach dem bisher Vorgetragenen folgendergestalt geschehen:

$$\begin{array}{r}
 6789 \\
 7358 \\
 9577 \\
 \hline
 5968 \\
 32 \\
 26 \\
 24 \\
 \hline
 27 \\
 \hline
 29692
 \end{array}$$

Eben so wird auch mit folgenden Beyspielen verfahren:

$ \begin{array}{r} 63025 \\ 977 \\ \hline 9291 \\ 13 \\ 18 \\ 11 \\ 12 \\ 6 \\ \hline 73293 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 18764 \\ 3075 \\ 928 \\ 9765 \\ \hline 43029 \\ 31 \\ 23 \\ 23 \\ 23 \\ 5 \\ \hline 75561 \end{array} $
---	--

Dieses Verfahren gründet sich auf die wesentliche Einrichtung unseres Vorstellungsvermögens, nach welcher wir mit allen unsern Vorstellungen so an das Gesetz der Succession gebunden sind, daß wir von einem, aus mehreren ungleichartigen Theilen zusammengesetzten Ganzen uns nicht anders eine angemessene Vorstellung zu verschaffen im Stande sind, als dadurch daß wir solches zuerst successiv von Theil zu Theil durchlaufen und alsdann aus den vorher gebildeten Vorstellungen der Theile die Vorstellung des Ganzen zusammensetzen. Da wir nämlich unmöglich auf einmal überschauen, oder durch eine Aeußerung unserer Thätigkeit (*uno actu mentis*) herausbringen können, wie viel mehrere gegebenen Zahlen, deren jede aus Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern u. s. w. besteht zusammen in einer Zahl betragen, so müssen wir uns damit begnügen, solches nach und nach dadurch zu bewerkstelligen, daß wir 1) die gegebenen Zahlen in ihre

ungleichartigen Theile zerlegen; 2) untersuchen, wie viel die ungleichartigen Theile dieser Zahlen von jedem Namen zusammen in einer Zahl betragen, oder die Partialsummen der ungleichartigen Theile von jedem Namen in den gegebenen Zahlen suchen d. h. angeben, wie viel Einer, wie viel Zehner, wie viel Hunderter u. s. w. in den gegebenen Zahlen zusammen vorhanden seyen; 3) die so herausgebrachten Zahlen der ungleichartigen Theile von jedem Namen in eine Zahl zusammen fassen, die sich nun auch durch eine Aeußerung unserer Thätigkeit als ein Ganzes auffassen und darstellen läßt, oder aus den gefundenen Partialsummen die Vorstellung der Totalsumme zusammensetzen, d. h. angeben, wie viel die gegebenen Zahlen, nach ihren verschiedenen Theilen von allen und jeden Ordnungen, zusammen in einer Zahl betragen, oder mit andern Worten, wie viel Einer, Zehner u. s. w. die gegebenen Zahlen zusammen in einer Zahl enthalten.

Daß wir aber auf diesem Wege die richtige Summe der gegebenen Zahlen finden müssen, davon sind wir aus dem Grunde überzeugt, weil wir uns bewußt sind, daß wir solchergestalt nichts anders thun, als nach und nach alle Theile der gegebenen Zahlen zusammen nehmen, und es eine Wahrheit ist, von welcher wir unmittelbare Gewißheit haben, daß alle Theile eines Ganzen zusammen genommen immer dem Ganzen selbst gleich seyn müssen.

Indessen würde diese Art zu addiren, besonders wenn der zu addirenden Zahlen sehr viele sind, ziemlich langweilig und beschwerlich seyn. Man hat daher auf eine Abkürzung derselben gedacht, welche auf dem schon mehrmals angeführten Gesetze beruhet, daß in einer Zahlenreihe jede Ziffer, von der rechten Hand gegen die linke gerechnet, in jeder nachfolgenden Stelle einen zehnmal höhern Werth hat, als in der vorhergehenden. Vermöge dieses Gesetzes muß nämlich, so oft die Summe einer Reihe mehr, als neun, beträgt, für jede Zehn ein Einer in die nächst höhere Stelle geschrieben werden. Man kann daher von der Summe einer jeden einzelnen Reihe die höhern Ziffern gleich im Sinne zu der folgenden Reihe übertragen, und so die Summe aller gegebenen Zahlen auf einmal finden, ohne die Summe einer je-

den einzelnen Reihe zuvor besonders hingeschrieben zu haben.

Demnach werden die vorigen Beyspiele kürzer also addirt:

6789	63025	18764
7358	977	3075
9577	9291	925
<u>5968</u>	<u>73293</u>	<u>9765</u>
29692		43929
		<u>75561</u>

Das Zeichen der Addition ist (+) und wird gelesen Plus, das Zeichen der Gleichheit ist (=) und wird gelesen Gleich; wenn man daher anzeigen will, daß zwey Größen zusammen genommen so groß seyen, als eine dritte, z. B. daß 5 und 7 zusammen so viel sey, als 12; so wird dies kurz also geschrieben $5 + 7 = 12$.

§. 6.

Das Verfahren, wodurch man findet, um wie viel eine gegebene Zahl größer sey, als eine andere gegebene, oder um wie viel eine gegebene Zahl von einer andern gegebenen unterschieden sey, wird das Subtrahiren genannt. Von den beyden gegebenen Zahlen nennt man die größere den Minuendus, die kleinere den Subtrahendus, und die durch Vergleichung dieser beyden mittelst des Subtrahirens gefundene Zahl, den Rest oder die Differenz.

Das Zeichen der Subtraction ist ein kleiner Quersstrich, der zwischen die beyden Größen, deren eine von der andern abgezogen werden soll, gesetzt und Minus gelesen wird. Wenn man demnach den Satz, daß der Unterschied der Zahlen 20 und 9 der Zahl 11 gleich sey, kurz ausdrücken will; so kann dies mittelst der gedachten Zeichen folgendermaßen geschehen: $20 - 9 = 11$.

Bey dem Subtrahiren hat man nun folgende vier Fälle zu unterscheiden:

- I. Können alle Ziffern des Minuendus größer seyn, als die gleichnamigen Ziffern des Subtrahendus.

- II. Können einige Ziffern des Minuendus kleiner seyn, als die gleichnamigen Ziffern des Subtrahendus.
- III. Können in dem Minuendus einzelne Nullen zwischen den Ziffern desselben stehen.
- IV. Können in dem Minuendus mehrere Nullen unmittelbar auf einander folgen.

Die allgemeine Regel, die man in allen diesen Fällen zu beobachten hat, ist folgende;

Man schreibe die größere Zahl, oder den Minuendus oben an, und die kleinere, oder den Subtrahendus, darunter, aber so, daß, wie bey der Addition, Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner u. s. w., kurz, daß lauter gleichnamige Ziffern untereinander zu stehen kommen, und ziehe alsdann einen Strich darunter. Im ersten Falle nun, wenn alle Ziffern des Minuendus größer sind, als die darunter stehenden Ziffern des Subtrahendus, nehme man jede Ziffer des Subtrahendus von der darüber stehenden Ziffer des Minuendus weg, und setze den Rest gerade darunter unter den Strich. Z. B.

35792468

9876543

246813577654321

11111111

2222222

Daß man auf diese Art den Rest richtig finden müsse, ist aus dem Verfahren selbst offenbar, weil solchergestalt alle Theile der kleinern Zahl einzeln von den gleichnamigen Theilen der größern Zahl weggenommen werden.

Im zweyten Falle hingegen, wenn einige Ziffern des Minuendus kleiner sind, als die darunter stehenden gleichnamigen Ziffern des Subtrahendus, ziehe man erstlich, so lange man kann, die kleinern Ziffern des Subtrahendus von den größern des Minuendus ab, wie in No. I, geht aber dies nicht mehr an; so nehme man von der nächsthöheren Ziffer des Minuendus eine Einheit weg, und zähle sie zu der niedrigeren, von welcher die darunter stehende größere Ziffer des Subtrahendus abgezogen werden solle; in dieser niedrigeren Stelle nun hat diese geborgte Einheit, nach dem schon oft erwähnten Grundges

setze der Arithmetik einen zehnmal größern Werth, als in der höhern, sie gilt also hier zehnmal so viel, als 1, das heißt 10, und da die Ziffer, die man abziehen sollte, nie größer als 9 ist; so kann man folglich den Abzug allemal verrichten; nur muß man nicht vergessen, daß die Ziffer, von welcher man geborgt hat, um eine Einheit vermindert worden ist, zu welcher Absicht man bey derselben ein Zeichen, etwa einen Punkt, machen kann.

Z. B.

$$\begin{array}{r} 97263154 \\ 56945823 \\ \hline 40317331 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7126354 \\ 6987645 \\ \hline 138709 \end{array}$$

Was den dritten Fall anbelangt, wenn nämlich im Minuendus einzelne Nullen zwischen den Ziffern desselben stehen; so findet dabei wiederum eine gedoppelte Verschiedenheit Statt. Denn entweder ist die, im Minuendus rechter Hand vor der Null stehende, Ziffer größer, als die darunter stehende gleichnamige Ziffer des Subtrahendus; oder sie ist kleiner, als diese. Ist sie größer, so kann die darunter stehende Zahl ungehindert von ihr abgezogen werden, und man hat nur, wenn man an die Null kommt, von der auf sie folgenden höheren Ziffer eine Einheit zu borgen, welche nun in der niedrigeren Stelle der Null 10 gilt, wie in Art. II. Ist aber die, vor der Null rechter Hand stehende, Ziffer kleiner, als die unter ihr befindliche Ziffer des Subtrahendus, so daß also diese nicht von ihr abgezogen werden kann, so sollte man nun eigentlich von der Null borgen; da man aber, wo nichts ist, auch nichts nehmen kann, so geht man zu der nächst folgenden höheren Ziffer fort, borgt von dieser eine Einheit, und trägt sie in die Stelle der Null, wo sie nun 10 gilt; von diesen geborgten 10 nimmt man nun wieder eine Einheit weg, und bringt sie zu der nächstniedrigern, rechter Hand vor der Null stehenden Ziffer, von welcher man die darunter stehende Ziffer abziehen sollte, aber, weil sie zu klein war, nicht abziehen konnte. In dieser Stelle gilt die geborgte Einheit nun wiederum 10, und der Abzug kann also verrichtet werden; in der Stelle der Null aber stehen jetzt 9, weil man von der dahin geborgten Einheit, die dort zehn galt, wiederum eins weggenommen hat. Z. B.

9750603	8090705
<u>6438542</u>	<u>5739624</u>
3312061	2351081
76080302	50370604
<u>69725437</u>	<u>29705837</u>
6354865	20664767

Im vierten und letzten Falle endlich, wenn im Minuendus mehrere Nullen unmittelbar auf einander folgen, wird bloß das letzte Verfahren des vorhergehenden dritten Falls mehrmals wiederholt. Man geht nämlich, weil man von keiner Null etwas borgen kann, bis zu der ersten, nach der letzten Null stehenden, Ziffer fort, borgt von dieser eine Einheit in die Stelle der vorhergehenden Null, wo sie nun 10 gilt, von diesen geborgten 10 nimmt man wieder eins weg, und trägt es in die Stelle der nächstvorhergehenden Null, wo es gleichfalls 10 bedeutet, und dieses wiederholt man so vielmals, als Nullen vorhanden sind, bis man endlich von den in die Stelle der ersten Null geborgten 10 eine Einheit zu der nächstniedrigern Ziffer übertragen, und, weil diese hier nun 10 gilt, den Abzug verrichten kann, und weil man dabei von den 10, die man zu jeder Null geborgt hatte, allemal wieder eins wegnahm, so steht nunmehr an der Stelle einer jeden Null die Ziffer 9. 3. B.

75040009	529700003
<u>50263857</u>	<u>269587465</u>
15776152	251112538

Die Richtigkeit des für die letzten drei Fälle angewiesenen Verfahrens gründet sich darauf, daß man eine Zahl aus ihren Theilen verschiedentlich zusammensetzen, folglich auch in solche verschiedentlich zerlegen kann, wenn man sie nur alle behält. Wenn man 3. B. von 903 abziehen sollte 625; so kann man sagen, es seye $903 = 800 + 90 + 13$, oder man kann die Zahl 903 als aus den Theilen 800, 90 und 13 zusammengesetzt betrachten, und dann kann man ja ungehindert 5 Einhei-

ten von 13 Einheiten, 2 Zehner von 9 Zehnern, und 6 Hunderter von 8 Hundertern abziehen. Denn es ist

$$\begin{array}{r} 903 = 800 + 90 + 13 \\ \text{und} \quad 625 = 600 + 20 + 5 \\ \hline \text{also} \quad 903 - 625 = 200 + 70 + 8 = 278. \end{array}$$

Man thut also auch bey der Subtraction überall nichts anderes, als daß man dem Naturgesetze der Succession, welchem unsere Vorstellungen unterworfen sind, folgt, und von dem Grundsatz der Gleichheit des Ganzen mit der Summe der Theile eine Anwendung macht.

Da wir nämlich die Differenz zweyer, aus mehreren ungleichartigen Theilen bestehenden, Zahlen eben so wenig, als ihre Summe, durch eine Aeußerung unserer Thätigkeit anzugeben vermögen, so müssen wir uns auch hier begnügen, solches durch mehrere auf einander folgende Aeußerungen derselben nach und nach zu bewerkstelligen, indem wir 1) die gegebenen Zahlen in ihre ungleichartigen Theile zerlegen, 2) hierauf die Differenzen jedes Paares dieser Theile von gleichem Namen, oder die Partialdifferenzen suchen, und endlich 3) diese gefundenen Partialdifferenzen in eine Zahl zusammen fassen, wo wir dann auf ähnliche Art, wie vorhin bey der Summe, davon unmittelbare Gewißheit haben, daß die Differenzen aller Theile zweyer Ganzen zusammen genommen der Differenz beyder Ganzen gleich seyn, oder solche richtig darstellen müssen.

§. 7.

Da wir bey allen unsern Geschäften dem Irrn und Fehlen so sehr ausgesetzt sind, bey'm Rechnen aber ein Fehler oft von so großer Wichtigkeit seyn kann; so muß uns daran gelegen seyn, gewisse Mittel kennen zu lernen, wodurch man sich in jedem Falle von der Richtigkeit einer geführten Rechnung versichern kann. Solche Versicherungsmittel nennt man Proben.

Da nun, nach den oben gegebenen Erklärungen, durch die Addition gefunden wird, wie viel mehrere gegebene Zahlen zusammen in einer Zahl ausmachen, und diese Zahl, welche die Summe genannt wird, allen

gegebenen Zahlen, zusammen genommen, gleich seyn muß; so erhellet, daß, wenn man eine von den gegebenen Zahlen bey dem Addiren wegließe, die Summe gerade um die weggelassene Zahl kleiner werden müßte, als sie sonst geworden seyn würde, wenn man alle gegebenen Zahlen zusammen gezählt hätte. Da ferner durch die Subtraction gefunden wird, um wie viel eine gegebene Zahl größer sey, als eine andere gegebene, die Zahl aber, welche diesen Unterschied ausdrückt, und Differenz genannt wird, mit der kleinern Zahl zusammen, allemal so viel ausmachen muß, als die größere, so erhellet, daß, wenn man die Differenz der weggenommenen kleinern Zahl zusetzte, man dadurch die größere wieder herstellen würde. Hieraus fließen nun für die Addition und Subtraction folgende Proben:

Die Probe der Addition wird gemacht, wenn man nach erhaltener Summe die zu addirenden Zahlen noch einmal zusammen zählt, aber so, daß man eine davon, welche man will, ausläßt; ziehet man nun diese neue Summe von der zuerst gefundenen ab, so muß, wenn man richtig gerechnet hat, die bey der zweyten Addition ausgelassene Zahl übrig bleiben.

Hat man aber nur zwey Zahlen zusammen addirt, und möchte gerne die Probe machen; so ziehe man die eine von ihnen, welche man will, von der gefundenen Summe ab, wo alsdann, wenn die Rechnung richtig ist, die andere übrig bleiben muß.

Hingegen, um die Subtraction zu probiren, addirt man die gefundene Differenz zu dem Subtrahendus, wenn alsdann die daraus sich ergebende Summe dem Minuendus gleich ist, so ist die Rechnung richtig. So dienen also Addition und Subtraction einander gegenseitig zu Proben.

Probe der Addition.

<u>260548</u>	<u>7394268</u>
534109	2901753
397654	6085479
<u>821976</u>	<u>3850964</u>
2014287	20232464
<u>1753739</u>	<u>12838196</u>
260548	7394268

Probe der Subtraction.

$$\begin{array}{r}
 \text{.....} \\
 91023846 \\
 76584967 \\
 \hline
 14438879 \\
 \hline
 91023846
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{..} \\
 821000635 \\
 574632859 \\
 \hline
 246367776 \\
 \hline
 821000635
 \end{array}$$

§. 8.

Es ist leicht einzusehen, daß man durch eben das Verfahren, wodurch man findet, wie viel mehrere Zahlen zusammen in einer Zahl ausmachen, auch finden könne, wie viel eine gegebene Zahl betrage, wenn sie mehrmal wiederholt genommen würde. Man dürfte sie nämlich zu dem Ende nur so vielmal, als sie wiederholt genommen werden sollte, zu sich selbst addiren. Da aber dieses Verfahren schon alsdann, wenn eine Zahl nur etliche hundertmal genommen werden sollte, unerschränkt weitläufig, beschwerlich und mit vieler Gefahr sich zu verirren verbunden seyn würde, so hat man eine Abkürzung desselben ausgedacht, welche darin besteht, daß man, anstatt alle Ziffern einer Zahl so vielmal, als die Zahl wiederholt genommen werden soll, untereinander zu setzen, und alsdann zu addiren, das geforderte Vielfache einer jeden Ziffer sogleich unter dieselbe hinzuschreibt, und alsdann nur diese Vielfachen addirt.

Dieses abgekürzte Verfahren wird das Multipliciren genannt, die Zahl, von welcher man ein Vielfaches finden soll, heißt der Multiplicandus, diejenige hingegen, welche anzeigt, wie vielmal die andere genommen werden solle, der Multiplicator, beyde zusammen werden auch Factoren, die neue Zahl aber, welche man durch dieses Verfahren findet, wird Product genannt.

Das Zeichen der Multiplication ist ein liegendes Kreuz ($\times$) oder ein Punkt ($\cdot$), welche zwischen die Factoren gesetzt werden; z. B.

$$4 \cdot 16 = 64; \quad 8 \times 9 = 72; \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Zur Erleichterung des Multiplicirens hat man die Producte, welche die neun einfachen Zahlen, wenn sie

miteinander multiplicirt werden, geben, in eine Tafel gebracht, welche das Einmal Eins genannt wird, und welches man, wenn man im Rechnen nicht aufzuhalten werden will, nothwendig dem Gedächtnisse wohl einprägen muß.

Die bequemste Form dieser Tafel ist die nachstehende, und ihr Gebrauch ist folgender:

I. Die ganze Tafel enthält neun wagrechte und eben so viele lothrechte Zahlenreihen.

II. In der obersten wagrechten sowohl, als in der äußersten lothrechten Reihe bey der linken Hand, stehen die neun einfachen Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung, so, daß diese beyden Reihen oben bey der linken Hand in der Stelle der 1 einen rechten Winkel miteinander machen.

III. Die große vierseitige Figur, worein die ganze Tafel verzeichnet ist, läßt sich in 64 kleinere vierseitige Figuren zertheilen, worin alle Producte enthalten sind, die sich aus den neun einfachen Zahlen machen lassen, und zwar so, daß in einer jeden dieser vierseitigen Figuren ein Product in dem Gegenwinkel desjenigen Winkels anzutreffen ist, in dessen Oeffnung die 1 steht, die beyden Factoren dieses Produkts aber in den zwey andern Gegenwinkeln dieser vierseitigen Figur sich befinden.

IV. Will man daher das Product zweyer einfachen Zahlen in dieser Tafel auffuchen, so suche man den einen Factor desselben in der äußersten lothrechten Reihe bey der linken Hand, den andern aber in der obersten wagrechten Reihe. Nun setze man bey dem ersten den Zeigefinger der linken Hand an, und rücke ihn in derselben wagrechten Reihe, an deren Anfang dieser Factor steht, gegen die rechte Hand zu; bey dem andern hingegen setze man den Zeigefinger der rechten Hand an, und führe ihn durch dieselbe lothrechte Reihe, an deren Anfang dieser Factor steht, herab, so wird man in der Ecke, wo die beyden Finger einander beugen, das gesuchte Product der beyden Factoren

finden. Nach einiger Übung werden Linien, die man von dem einen Factor in der wagrechten Reihe einwärts nach der rechten Hand zu, und von dem andern in der lothrechten Reihe herunterwärts im Sinne ziehen kann, die Stelle der Finger vertreten können.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 9.

Wenn man nun eine gegebene Zahl mit einer andern gegebenen multipliciren soll, so bestehen entweder beyde nur aus einer Ziffer, oder die eine von beyden aus mehreren, die andere aber aus einer Ziffer, oder es bestehen beyde aus mehreren Ziffern. Der erste Fall, wenn beyde Factoren nur aus einer Ziffer bestehen, hat gar keine Schwierigkeit, denn man findet alsdann das Product unmittelbar in dem Einmaleins, welches man entweder im Kopfe oder bey der Hand haben muß. 3. B. wenn man 9 mit 7 multipliciren, oder angeben soll, wie viel 9 siebenmal genommen ausmache, so findet man so gleich in dem Einmaleins, daß es 63 sey. Im andern Falle hingegen, wenn der eine Factor eine einfache, der andere aber eine zusammengesetzte Zahl ist, so sehe man,

Da einerley Factoren immer einerley Product geben, man mag sie multipliciren, in welcher Ordnung man will, die zusammengelegte Zahl als den Multiplicandus, die einfache hingegen als den Multiplicator an, setze den letztern unter die niedrigste Ziffer des erstern, und ziehe darunter einen Strich; nun mache man vermittelst des Einmaleins das Product aus dem Multiplicator in die niedrigste Ziffer des Multiplicandus. Bestehet dieses Product nur aus Einheiten; so setze man die Ziffer, welche es ausdrückt, unter dieselbe niedrigste Ziffer des Multiplicandus, von welcher das Product herrührt. Enthält aber das Product neben den Einheiten auch noch Zehner, so setze man nur die niedrigste Ziffer des Products unter die niedrigste Ziffer des Multiplicandus, die Zehner aber rücke man unter die nächstfolgende höhere Ziffer desselben vor. Nun gehe man zu der zweyten Stelle des Multiplicandus, oder zu den Zehnern, fort, und verfare mit diesen eben so. Hat man das Product von diesen gefunden, so geht man zur dritten, vierten u. s. w. Stelle des Multiplicandus, oder zu den Hunderten, Tausendern u. s. w. fort, und wiederholt bey allen das nämliche Verfahren; wobey man hauptsächlich das sorgfältig in Acht zu nehmen hat, daß man immer die niedrigste Ziffer des Products unter diejenige Ziffer des Multiplicandus setzt, von welcher es herrührt, die höhere aber um eine Stelle gegen die linke Hand vorrückt. Hat man auf diese Art alle einzelnen Producte, d. h. die Producte aus dem Multiplicator in alle Theile des Multiplicandus, gefunden, so addire man sie zusammen, wo alsdann ihre Summe das ganze Product giebt. Z. B.

$$\begin{array}{r}
 57398264 \\
 \underline{8} \\
 32 \\
 48 \\
 16 \\
 64 \\
 71 \\
 24 \\
 56 \\
 \underline{40} \\
 459186112
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 693452874 \\
 \underline{7} \\
 28 \\
 49 \\
 56 \\
 14 \\
 35 \\
 28 \\
 21 \\
 63 \\
 \underline{42} \\
 4854170118
 \end{array}$$

Man siehet leicht, daß dieses Verfahren noch eine weitere Abkürzung zuläßt, welche darin besteht, daß man, anstatt jedes der einzelnen Producte besonders hinzuschreiben und sie am Ende zu addiren, von jedem nur die niedrigste Ziffer unter diejenige Ziffer des Multiplicandus, von welcher es herrührt schreibt, die höhere Ziffer aber im Sinne behält, und zu dem Producte aus der nächstfolgenden Ziffer des Multiplicandus zählt, mit diesem aber und mit allen nachfolgenden wiederum eben so verfährt. Hierdurch erhält man alsdann das ganze Product auf einmal. Demnach werden nun die vorigen Beispiele also stehen:

$$\begin{array}{r} 57398264 \\ 8 \\ \hline 459186112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 693452874 \\ 7 \\ \hline 4854170118 \end{array}$$

Im dritten Falle, wenn beyde Factoren aus mehreren Ziffern bestehen, verfähre man mit jeder Ziffer des Multiplicators nach dem zweyten Falle, oder man suche, nach der für den zweyten Fall gegebenen Vorschrift, die Producte aus allen Theilen des Multiplicators in alle Theile des Multiplicandus, und schreibe sie so, daß allemal die niedrigste Ziffer eines jeden Productes unter diejenige Ziffer des Multiplicators, von welcher das Product herrührt, zu stehen komme, am Ende addire man alle diese Producte zusammen, so giebt ihre Summe das gesuchte ganze Product.

Beispiele.

$$\begin{array}{r} 679532 \\ 872 \\ \hline 1359064 \\ 4756724 \\ 5436256 \\ \hline 592551904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69857342 \\ 576 \\ \hline 419144052 \\ 489001394 \\ 349286710 \\ \hline 40237828992 \end{array}$$

§. 10.

Wenn bey dem Multipliciren in einem oder in beyden Factoren Nullen vorkommen, so hindern diese die Anwendung der bisher gegebenen Regeln nicht. Sie

kommen nämlich entweder im Multiplicator oder im Multiplicandus, oder in beyden zugleich vor, und in allen diesen Fällen stehen sie entweder am Ende, oder in der Mitte zwischen andern Ziffern. Stehen Nullen im Multiplicandus am Ende, so kann man sie zwar wirklich mit dem Multiplicator multipliciren, allein da das Product einer Null durch eine jede Zahl immer wieder eine Null ist, weil Nichts durch Wiederholung nie zu Etwas werden kann, sondern immer Nichts bleibt, man mag es wiederholen so oft man will, so kann man die am Ende des Multiplicandus stehenden Nullen bey der Multiplication selbst auch weglassen, und sie bloß dem gefundenen Producte am Ende anhängen, weil sie in diesem Falle doch nur dazu dienen, den Werth der gegen die linke Hand zu nachfolgenden Ziffern des Products zu erhöhen. Die Nullen, die in der Mitte des Multiplicandus stehen, geben, aus dem vorhin angeführten Grunde, im Producte immer auch wieder Nullen, man mag sie multipliciren, mit was für Zahlen man will. Stehen hingegen in dem Multiplicator, und zwar am Ende desselben, Nullen, so können diese bey der Multiplication selbst weggelassen, und erst nachher dem Producte am Ende angehängt werden, weil sie, wie die am Ende des Multiplicandus stehenden Nullen, nur dazu dienen, den Werth der gegen die linke Hand zu nachfolgenden Ziffern des Products zu erhöhen. Haben also beyde Factoren am Ende Nullen, so darf man bloß ihre Ziffern in einander multipliciren und dem Producte am Ende so viele Nullen anhängen, als in den beyden Factoren zusammen sind. Stehen endlich in der Mitte des Multiplicators Nullen; so können diese bey der Multiplication ganz übergangen werden, und man hat nur nach der im vorigen §. für den dritten Fall gegebenen allgemeinen Regel die Producte aus allen Ziffern des Multiplicators genau so zu schreiben, daß die niedrigste Ziffer eines jeden unter diejenige Ziffer des Multiplicators, von welcher das Product herrührt, zu stehen komme. Dies alles gründet sich, wie man leicht siehet, darauf, daß die Nullen für sich selbst keinen Werth haben, sondern bloß dienen, um anzuzeigen, daß keine Ziffern von den Ordnungen, deren Stellen sie einnehmen, vorhanden seyen.

Beyspiele.

$$\begin{array}{r} 573420 \\ 3 \\ \hline 1720260 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 718590000 \\ 3690000 \\ \hline 646731 \\ 431154 \\ 215577 \\ \hline 2651597100000000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3907058 \\ 395 \\ \hline 19535290 \\ 23442348 \\ 11721174 \\ \hline 1426076170 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 290180300 \\ 5070 \\ \hline 20312621 \\ 14509015 \\ \hline 147121412100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 97538642000 \\ 57 \\ \hline 682770494 \\ 487693210 \\ \hline 5559702594000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5974000 \\ 38500 \\ \hline 29870 \\ 47792 \\ 17922 \\ \hline 229999000000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80604075 \\ 907 \\ \hline 564228525 \\ 725436675 \\ \hline 73107896025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7958436 \\ 570 \\ \hline 55709052 \\ 39792180 \\ \hline 4536308520 \end{array}$$

§. II.

Durch das Subtrahiren lernten wir finden, um wie viel eine gegebene Zahl größer sey, als eine andere gegebene. Allein es kommen sehr oft Fälle vor, wo man wissen sollte, wie vielmal eine gegebene Zahl größer sey, als eine andere gegebene, oder, wie vielmal sich eine gegebene Zahl von einer andern gegebenen abziehen lasse. Dies könnte nun zwar, wie man leicht einseheth, auch durch die Subtraction gefunden werden, indem man nämlich die eine Zahl von der andern nach und nach so oft abzüge, bis nichts mehr übrig bliebe. Wenn man z. B. sagen sollte, wie vielmal 25 größer sey als 5, oder wie oft sich 5 von 25 abziehen

lasse, so dürfte man nur 5 von 25 so oft abziehen, als dies anginge. Auf diese Art würde man finden, daß, nachdem der Abzug 5mal nacheinander verrichtet worden, nichts mehr übrig bliebe; man müßte also sagen, 5 lasse sich von 25, 5mal abziehen, oder 25 sey 5mal größer als 5. Allein, wenn man bedenkt, wie beschwerlich und langweilig dieses Verfahren bey etwas großen Zahlen werden müßte, so wird man nicht in Abrede stellen können, daß eine geschickte Abkürzung desselben eine sehr wünschenswerthe Erleichterung wäre. Eine solche Abkürzung hat man nun wirklich ausgedacht, welche sich auf das schon oft angeführte Grundgesetz der Arithmetik, daß der Werth einer Ziffer in einer Zahlenreihe von der rechten gegen die linke Hand zu mit jeder Stelle um das Zehnfache erhöht wird, gründet, und darinn bestehet, daß man, anstatt eine Zahl von welcher man gerne wissen möchte, wie oft sie sich von einer andern abziehen lasse, wirklich so oft von der letzten abzuziehen, bis nichts mehr übrig bleibt, nicht diese Zahl selbst, sondern sogleich ein Vielfaches von ihr, und zwar ein solches, welches der gegebenen größern Zahl entweder selbst gleich, oder zunächst kleiner ist, als sie, von dieser letzteren abziehet, und sich merkt, was für ein Vielfaches der kleineren Zahl man abgezogen hat. Denn da die Frage, wie vielmals eine Zahl von einer andern sich abziehen lasse, einerley ist mit der: was für ein Vielfaches der einen sich von der andern abziehen lasse, so ist mit der Antwort auf die letzte allemal auch die erste beantwortet, und man findet also auf diese Art leicht auf einmal, was man sonst durch öfteres Wiederholen der nämlichen Arbeit, nicht ohne viele Mühe, suchen müßte. Man sieht aus der bisherigen Beschreibung sogleich, daß dieses Verfahren ebenso eine Abkürzung vom Subtrahiren sey, wie wir vorhin das Multipliciren als eine Abkürzung des Addirens kennen lernten. Diese abgekürzte Art zu subtrahiren nennt man nun das *Dividiren*; diejenige Zahl, von welcher eine andere so oft abgezogen werden solle, bis nichts mehr übrig bleibt, heißt der *Dividendus*, diejenige aber, die von einer andern so oft als es geschehen kann, abgezogen werden solle, wird *Divisor*, und die, welche anzeigt, wie oft der Abzug geschehen könne, *Quotient* genannt.

Das Zeichen der Division ist ein Querstrich zwischen dem Dividendus und Divisor. Z. B. wenn man anzeigen will, daß die Zahl 63 durch die Zahl 7 dividirt werden solle, so wird dieses so geschrieben $\frac{63}{7}$, und hier heißt alsdann 63 der Dividendus, 7 aber der Divisor, und die Zahl 9, welche man durch die Division findet, der Quotient.

§. 12.

Wenn nun zwey Zahlen gegeben sind, wovon die eine durch die andere dividirt werden soll, so bestehen entweder beyde aus mehreren Ziffern, oder der Dividendus bestehet zwar aus mehreren, der Divisor aber nur aus einer Ziffer, oder es haben beyde nur eine Ziffer. Um mit dem letzten als dem leichtesten Falle anzufangen, so findet man in diesem den Quotienten ohne Mühe, wenn man in dem Einmaleins ein solches Vielfaches des Divisors auffucht, welches dem Dividendus entweder selbst gleich, oder zunächst kleiner ist, als er, und dieses von dem Dividendus abziehet, wo alsdann die Zahl, welche anzeigt, was für ein Vielfaches des Divisors man von dem Dividendus abgezogen habe, der Quotient ist. Z. B. wenn 9 durch 3 dividirt werden soll, so darf man, da man aus dem Einmaleins weiß, daß dreyimal 3 oder das Dreyfache von 3, 9 ist, nur das Dreyfache des Divisors 3, welches 9 ist, von dem Dividendus 9 abziehen, und man erhält zum Quotienten 3, weil man das Dreyfache des Divisors abzog; und weil bey dem Abzug nichts übrig blieb, so muß man sagen, 3 sey in 9 dreyimal enthalten, oder 3 lasse sich dreyimal von 9 abziehen. Die Rechnung selbst siehet also:

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 3} \\ (3) \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

Zur zweyten Falle, wenn der Dividendus zwar mehrere, der Divisor aber nur eine Ziffer hat, verfare man folgendermaßen:

I. Man suche, wie vielmal der Divisor in der höchsten Ziffer des Dividendus enthalten ist. Dieses ge-

schicket, indem man aus dem Einmaleins ein solches Vielfaches des Divisors auffucht, welches der höchsten Ziffer des Dividendus entweder selbst gleich, oder zunächst kleiner ist, als sie.

- II. Die Ziffer, welche anzeigt, was für ein Vielfaches dies sey, schreibe man an die Stelle des Quotienten, so zeigt dieser Theil des Quotienten an, wie vielmal der Divisor nach Einheiten von derjenigen Ordnung, von welcher die Einheiten der höchsten Ziffer des Dividendus sind, im Dividendus enthalten sey, z. B. wie viel Hunderter, Tausender, Zehntausender u. s. w. des Divisors im Dividendus stecken.
- III. Weil aber im Dividendus noch gewisse Mengen des Divisors stecken können, welche sich nicht durch Einheiten von der nämlichen Ordnung, von welcher die Einheiten der höchsten Ziffer des Dividendus sind, ausdrücken lassen, so ziehe man nun das nach Nro. I. gefundene Vielfache des Divisors von der höchsten Ziffer des Dividendus ab.
- IV. Zu dem hierdurch gefundenen Reste nehme man die nächstfolgende Ziffer des Dividendus, suche nun wieder nach Nro. I. dasjenige Vielfache des Divisors, welches dieser Zahl, in welche man nun zu dividiren hat, entweder gleich, oder zunächst kleiner ist, als sie, und schreibe abermal in den Quotienten diejenige Ziffer, welche dieses Vielfache anzeigt, so hat man den zweiten Theil des Quotienten. Das vorhin gefundene Vielfache des Divisors ziehe man nun wiederum von der Zahl, in welche man dividirt, ab, so wird man wieder einen Rest behalten.
- V. Zu diesem Reste ziehe man nun die nächstfolgende Ziffer des Dividendus herab, und verfahre damit nach Nro. IV.
- VI. Diese Arbeit setze man so lange fort, als Ziffern im Dividendus vorhanden sind, so wird man für jede neue Ziffer im Dividendus, die zu dem nächst vorhergehenden Reste genommen wird, eine Ziffer im Quotienten bekommen.

VII. Wenn bey dem Abziehen irgendwo kein Rest bleibt, so rückt man die nachfolgende Ziffer des Quotienten herunter, und wenn der Divisor in dieser, oder in einem Reste und der dazu genommenen Ziffer des Dividendus auch nicht einmal enthalten ist, so schreibt man dafür eine Null in den Quotienten und nimmt zu dieser Zahl noch die nächstfolgende Ziffer des Dividendus.

VIII. Wenn der Divisor in der höchsten Ziffer des Dividendus auch nicht einmal enthalten ist, so nimmt man noch die nachfolgende Ziffer dazu. 3. B.

$$5) 178980 \overline{) 35796}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 28 \\ 25 \\ \hline 39 \\ 35 \\ \hline 48 \\ 45 \\ \hline 30 \\ 30 \\ \hline \end{array}$$

$$4) 27368 \overline{) 6842}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline 33 \\ 32 \\ \hline 16 \\ 16 \\ \hline 8 \\ 8 \\ \hline \end{array}$$

$$4) 936524 \overline{) 234131}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 13 \\ 12 \\ \hline 16 \\ 16 \\ \hline 5 \\ 4 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 4 \\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$5) 759235 \overline{) 151847}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 25 \\ 25 \\ \hline 9 \\ 5 \\ \hline 42 \\ 40 \\ \hline 23 \\ 20 \\ \hline 35 \\ 35 \\ \hline \end{array}$$

Im ersten Falle endlich, wenn sowohl der Divisor als der Dividendus aus mehreren Ziffern besteht, ver-

gleicht man den Divisor nach den obigen Regeln allemal mit so viel Ziffern des Dividendus als er selbst hat. Um diese Vergleichung anzustellen sucht man nur, wie vielmal die erste oder höchste Ziffer des Divisors in der ersten Ziffer des Dividendus enthalten ist, und nimmt an, der ganze Divisor stecke ebensovielmal in den ihm zugehörigen Ziffern des Dividendus. Dies kann nun oft falsch seyn, denn wenn man ein Vielfaches vom Divisor nimmt, so wird fast immer die erste Ziffer desselben durch das, was von den Vielfachen der nachfolgenden Ziffern zu ihr herübergetragen wird, vergrößert, aber der Fehler entdeckt sich bald dadurch, daß das Vielfache des Divisors, welches man abziehen will, größer wird als der Theil des Dividendus, von dem es abgezogen werden sollte. Alsdann muß man also den Theil des Quotienten, der sohergestalt gefunden werden soll, so lange vermindern, bis sich das Vielfache des Divisors, welches er anzeigt, von der Zahl, in welche man dividirt, abziehen läßt, oder man muß ein solches Vielfaches des Divisors suchen, welches zunächst kleiner ist, als die Zahl, in welche man dividirt. Wenn die höchste Ziffer des Divisors größer ist, als die höchste Ziffer des Dividendus, so nimmt man, wie in Nro. VIII. bey dem zweyten Falle, noch die nächstfolgende Ziffer desselben dazu. Im übrigen ist das Verfahren ganz einerley mit dem für den zweyten Fall in den Regeln von Nro. I — VIII. vorgeschriebenen.

So lange man noch nicht geübt ist, und besonders bey einem großen Divisor, dient es zur Erleichterung der Arbeit, wenn man den Divisor vorläufig durch alle einfachen Zahlen von 1 bis 9 multiplicirt, und sich also für ihn ein eigenes Einmaleins macht; denn so kann man alsdann gleich sehen, was für ein Vielfaches desselben sich vom Dividendus abziehen lasse, und man erspart sich dadurch alle sonst nicht leicht zu vermeidende Fehler und daraus entstehende Wiederholungen. Z. B. wenn 7936875 durch 25 dividirt werden soll, so mache man sich zuerst ein Einmaleins für den Divisor oder eine Tabelle der Vielfachen von 25;

$$\begin{array}{rcl}
 2 \times 25 & = & 50 \\
 3 \times 25 & = & 75 \\
 4 \times 25 & = & 100 \\
 5 \times 25 & = & 125 \\
 6 \times 25 & = & 150 \\
 7 \times 25 & = & 175 \\
 8 \times 25 & = & 200 \\
 9 \times 25 & = & 225
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 25) 7936875 \overline{) 317475} \\
 \underline{75} \\
 43 \\
 \underline{25} \\
 186 \\
 \underline{175} \\
 118 \\
 \underline{100} \\
 187 \\
 \underline{175} \\
 125 \\
 \underline{125} \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 2 \times 34 & = & 68 \\
 3 \times 34 & = & 102 \\
 4 \times 34 & = & 136 \\
 5 \times 34 & = & 170 \\
 6 \times 34 & = & 204 \\
 7 \times 34 & = & 238 \\
 8 \times 34 & = & 272 \\
 9 \times 34 & = & 306
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 34) 9367238 \overline{) 275597} \\
 \underline{68} \\
 256 \\
 \underline{238} \\
 187 \\
 \underline{170} \\
 172 \\
 \underline{170} \\
 238 \\
 \underline{238} \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

§. 13.

Wenn bey dem Dividiren Nullen vorkommen, so stehen sie entweder im Dividendus, oder im Divisor, oder in beyden zugleich, und in jedem von beyden entweder in der Mitte oder am Ende, oder in der Mitte und am Ende zugleich. Wenn im Dividendus Nullen vorkommen, sie stehen hernach in der Mitte oder am Ende, so ändern sie das im vorigen §. angewiesene Verfahren nicht, und machen überhaupt nicht die geringste Schwierigkeit; denn man rückt sie eben so, wie die Ziffern, nach und nach zu dem jedesmaligen Reste herunter, und dividirt alsdann nach den gegebenen Regeln. Sind im Divisor Nullen in der Mitte, so ändern auch diese

das vorgeschriebene Verfahren im geringsten nicht. Stehen aber im Divisor am Ende Nullen, und im Dividendus lauter Ziffern, so kann die Division unmöglich ausgehen. Alsdann streicht man gleich Anfangs im Dividendus von der rechten gegen die linke Hand so viele Ziffern ab, als im Divisor am Ende Nullen stehen, dividirt hierauf mit den übrigen Ziffern des Divisors, und hängt nach verrichteter Division dem gefundenen Quotienten die zuerst abgeschnittenen Ziffern des Dividendus, mit dem darunter gesetzten ganzen Divisor, als einen Rest an. Dieser Fall wird in der Folge noch besonders betrachtet werden. Sind endlich im Divisor und Dividendus am Ende Nullen, es seyen in beyden gleich viel, oder in einem mehr, im andern weniger, so streicht man gegen jede Null des Divisors eine Null des Dividendus weg, und dividirt alsdann die beyden solchergestalt verkleinerten Zahlen nach den gewöhnlichen Regeln.

Beyspiele.

$$\begin{array}{r} 12) 60060 \overline{) 5005} \\ \underline{60} \\ 060 \\ \underline{60} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32) 1728000 \overline{) 54000} \\ \underline{160} \\ 128 \\ \underline{128} \\ \hline 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 685) 499607490 \overline{) 729354} \\ \underline{4795} \\ 2010 \\ \underline{1370} \\ 6407 \\ \underline{6165} \\ 2424 \\ \underline{2055} \\ 3699 \\ \underline{3425} \\ 2740 \\ \underline{2740} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5009) 25065036 \overline{) 5004} \\ \underline{25045} \\ 20036 \\ \underline{20036} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8004) 724418028 \overline{) 90507} \\ \underline{72036} \\ 40580 \\ \underline{40020} \\ 56028 \\ \underline{56028} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 58|000) \ 3710260|000 \ 63970 \\
 \underline{348} \\
 230 \\
 \underline{174} \\
 562 \\
 \underline{522} \\
 406 \\
 \underline{406} \\
 0000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 367|00) \ 3097296500|00 \ 8439500 \\
 \underline{2936} \\
 1612 \\
 \underline{1468} \\
 1449 \\
 \underline{1101} \\
 3486 \\
 \underline{3303} \\
 1835 \\
 \underline{1835} \\
 000000
 \end{array}$$

§. 14.

Die bisher angewiesene Art zu dividiren nennt man, weil dabey die Vielfachen des Divisors unter den Dividendus geschrieben und die nachfolgenden Ziffern des letztern nach und nach zu den erhaltenen Resten herangezogen werden, *Untersichdividiren*; es giebt aber auch noch eine andere Art zu dividiren, wozu bey man im Ganzen eben so verfährt wie bey der ersten, nur mit dem Unterschiede, daß man die Vielfachen des Divisors in Gedanken abziehet, und alsdann bloß die erhaltenen Reste über die Ziffern des Dividendus, von welchen man abgezogen hat, schreibt: und davon hat dieses Verfahren den Namen *Uebersichdividiren* bekommen. Es ist leicht einzusehen, daß man durch dieses letztere Verfahren Zeit und Raum gewinnen könne, wenn der Divisor aus wenigen Ziffern bestehet. So sehr es daher in diesem Falle zu

empfehlen ist, so entschieden sind doch dagegen die Vorzüge des Unterschdividirens, so bald der Divisor aus mehr als zwey Ziffern bestehet. Denn weil bey diesem letzteren alle Vielfachen des Divisors ordentlich hingeschrieben werden, so kann man dabey im Multipliciren und Subtrahiren die Fehler leichter vermeiden, und wenn man auch einen gemacht hat, ihn leichter entdecken. Auch dient dies dabey zur Erleichterung, daß, wenn einerley Vielfaches des Divisors mehrmal abgezogen werden muß, man es alsdann schon vor Augen hat.

Beyspiele vom Ueberschdividiren.

$$\begin{array}{r} 4) \overline{4434 \overline{2}} \\ 8793268 \end{array} \quad 1448317$$

$$\begin{array}{r} 5) \overline{42 \overline{1334}} \\ 92568348 \end{array} \quad 18513669$$

$$\begin{array}{r} 7) \overline{7 \overline{368}} \\ 52\frac{1}{7} \end{array} \quad \begin{array}{r} 5) \overline{234 \overline{8739}} \\ 1147\frac{4}{5} \end{array}$$

§. 15.

Da oben gezeigt worden ist, daß Addition und Subtraction als entgegengesetzte Rechnungsarten, einander wechselseitig zur Probe dienen, so muß dies auch von der Multiplication und Division als blossen Abkürzungen der ersteren gleichmäßig gelten. Da nun ein jedes Product jeden seiner beyden Factoren so oft enthält, als im andern Factor die Einheit enthalten ist, so muß es, wenn es mit dem einen Factor dividirt wird, zum Quotienten den andern Factor geben. Dies ist also die Probe der Multiplication. Und da jeder Dividendus den Divisor so oft enthält, als die Einheit im Quotienten enthalten ist, so muß der Quotient mit dem Divisor multipliciret, den Dividendus zum Producte geben. Ware aber bey der Division ein Rest geblieben, so müßte man denselben noch zu dem Producte aus dem Divisor in den Quotienten addiren, um den Dividendus zu erhalten. Dies ist demnach die Probe der Division.

Beyspiele.

Probe der Multiplication.

$$\begin{array}{r}
 365 \\
 24 \\
 \hline
 1460 \\
 730 \\
 \hline
 24) 8760 \} 365 \\
 72 \\
 \hline
 156 \\
 144 \\
 \hline
 120 \\
 120 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1648 \\
 56 \\
 \hline
 9888 \\
 8240 \\
 \hline
 56) 92288 \} 1648 \\
 56 \\
 \hline
 362 \\
 336 \\
 \hline
 268 \\
 224 \\
 \hline
 448 \\
 448 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

Probe der Division.

$$\begin{array}{r}
 35) 10080 \} 288 \\
 70 \\
 \hline
 308 \\
 280 \\
 \hline
 280 \\
 280 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 72) 219240 \} 3045 \\
 216 \\
 \hline
 324 \\
 288 \\
 \hline
 360 \\
 360 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 288 \\
 35 \\
 \hline
 1440 \\
 864 \\
 \hline
 10080
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3045 \\
 72 \\
 \hline
 6090 \\
 21315 \\
 \hline
 219240
 \end{array}$$