

NOUVELLES EXPÉRIENCES

D'ARTILLERIE,

Où l'on détermine la force de la poudre, la vitesse initiale des boulets de canon, les portées des pièces à différentes élévations, la résistance que l'air oppose au mouvement des projectiles, les effets des différentes longueurs des pièces, des différentes charges de poudre, etc., etc.

1. EN 1775 je fis à Woolwich, conjointement avec plusieurs officiers distingués du corps de l'artillerie et d'autres personnes connues par leurs talens, une suite d'expériences sur la poudre et les boulets de canon. J'en rendis à la Société royale un compte qu'elle fit imprimer dans les *Transactions philosophiques de 1778*, après m'avoir accordé la médaille d'or qui se distribue tous les ans. L'objet de ces expériences étoit de déterminer les vitesses avec lesquelles les boulets sortent de pièces données, lorsqu'elles sont chassées avec des charges de poudre aussi données (1). Je les fis suivant la méthode inventée par l'ingénieur Robins, et décrite par lui dans ses *Nouveaux principes d'artillerie*, dont le rapport, fait à la Société royale, a été imprimé dans les *Transactions philosophiques de 1743*. Avant l'invention et les découvertes de ce savant, la théorie des projectiles en usage à la guerre étoit encore dans l'enfance. L'importance des découvertes contenues dans son ouvrage le fit bientôt paroître dans différentes langues, et le fameux Euler lui-même ne dédaigna pas de le traduire en allemand, en y ajoutant un commentaire savant et très-étendu.

(1) Les résultats de ces expériences se trouvent à la suite des *Nouveaux principes d'artillerie* de Robins, commentés par Euler, et traduits de l'Allemand par Lombard, professeur de mathématiques à l'École d'artillerie d'Auxonne, imprimé à Dijon en 1783.

La méthode de Robins pour déterminer les vitesses des boulets de canon a été admirée de tout le monde ; je l'ai imitée , mais en grand , dans les expériences que j'ai faites en 1775. Cette méthode , fondée sur une théorie juste , simple dans sa pratique , ingénieuse sous tous les points de vue , porte avec elle le caractère de la conviction et l'empreinte des talents de son inventeur. Les commentateurs de Robins et beaucoup d'autres personnes ont répété ses expériences avec la plus grande satisfaction. Son but en les faisant étoit de chercher les vitesses des boulets , pour les comparer avec celles qu'il avoit calculées *à priori* d'après la nouvelle théorie de l'artillerie qu'il avoit imaginée , et pour vérifier les principes sur lesquels elle étoit fondée. Le succès répondit à son attente , et ne laissa aucun doute de la vérité de sa théorie , au moins en tant qu'elle seroit appliquée aux armes et aux projectiles dont il avoit fait usage. Mais ces projectiles n'étoient que d'un fort petit calibre , puisque ce n'étoient que des balles de fusil du poids d'une once ou environ. Le volume qu'il auroit fallu donner aux machines nécessaires pour des expériences plus en grand , avoit empêché M. Robins et tous ceux qui l'avoient imité , de les tenter ; on s'étoit borné à desirer que quelqu'un fût assez hardi pour cela. J'ai essayé de remplir cette tâche , au moins en partie , dans les épreuves dont j'ai parlé plus haut , dans lesquelles j'ai fait usage de boulets environ vingt fois plus gros que ceux de Robins , et pesant depuis une jusqu'à trois livres. Ce sont les seules épreuves que je sache avoir été faites de cette manière avec des boulets de canon ; les conséquences qu'on en pourroit tirer seroient cependant de la plus grande importance pour toutes les parties de la physique qui ont quelque rapport avec les effets de la poudre. Je ne connois point d'autre méthode pour déterminer par l'expérience , et de manière à inspirer quelque confiance , la vitesse initiale des projectiles en usage à la guerre , à moins qu'on n'emploie pour cela le recul du canon suspendu lui-même comme le pendule ; méthode encore indiquée et mise en usage par Robins , et dont s'est servi , il n'y a pas long-temps , Benjamin Thompson , dans la suite d'expériences qu'il a faites avec beaucoup d'intelligence et de précision sur les balles de fusil , et dont il a donné la description dans les *Transactions philosophiques* de 1781. La connoissance de cette vitesse est de la plus grande importance pour l'artillerie : par son moyen , et avec la loi de la résistance du milieu , on peut déterminer tout ce qui y a rapport. Comme je l'ai remarqué dans mon Mémoire sur les expé-

riences dont j'ai parlé plus haut, cette connoissance est le seul guide qui puisse nous diriger sûrement dans le choix des quantités de poudre, du poids des boulets, du calibre et de la longueur des pièces à employer ; elle est aussi un fort bon moyen d'éprouver la force de différentes espèces de poudre (1). Il semble qu'il ne reste plus rien à désirer sur le mouvement et les portées des projectiles, que la connoissance des effets de la résistance du milieu.

2. Dans cette suite d'expériences je comparai les effets de différentes quantités de poudre, depuis deux jusqu'à huit onces, des boulets de différens poids, de leurs différentes grosseurs, du plus ou moins de vent qui est la différence entre le diamètre du boulet et celui de la pièce ; je trouvai que tous ces objets suivoient des lois constantes et certaines dans toute l'étendue des expériences : chaque jour, après qu'elles étoient faites, on en tiroit les conclusions, et on faisoit voir les raisons pour lesquelles, dans certains cas, la vitesse différoit, ainsi qu'elle devoit le faire, de ce qu'elle étoit dans d'autres. On a donc lieu d'être surpris que M. Tempelhof, capitaine d'artillerie en Prusse, ait pu s'y méprendre, lorsque, parlant des irrégularités de ces sortes d'expériences, il dit, (page 216 du *Bombardier prussien*, imprimé à Berlin en 1781) : « La » même chose arriva à M. Hutton ; il la trouva de 626 pieds, et le » jour suivant de 973, *toutes les circonstances étant d'ailleurs égales.* » Ces derniers mots font voir que M. Tempelhof n'avoit point lu, ou n'avoit pas entendu la raison de cette différence remarquable, raison très-suffisante. Il est expressément observé à la page 71 de mon Mémoire, inséré dans les *Transactions philosophiques*, que *toutes les circonstances n'étoient pas égales*, que l'un des boulets étoit beaucoup plus petit que l'autre, et

(1) Le pendule de Robins seroit, sans contredit, un excellent moyen d'éprouver la poudre ; mais c'est un instrument qui demande des mains exercées à le manier. Trop de considérations différentes entrent dans le calcul de ses effets, pour qu'il n'y eût pas lieu de craindre qu'une ou plusieurs, négligées ou mal employées, n'entraînaient dans des erreurs considérables ceux qui seroient appelés à en faire usage. Sous ce point de vue l'éprouvette à pendule de d'Arcy lui seroit préférable ; mais notre mortier d'épreuve est encore plus simple, et remplit fort bien l'objet. Dans l'épreuve des poudres, il s'agit de comparer celle que l'on présente à la réception avec celle dont la force est connue, et nous trouvons ce rapport avec précision dans la racine carrée de la portée de l'éprouvette ; le grand poids du projectile et son peu de vitesse permettant de supposer que la résistance que l'air lui oppose est petite, et la même dans tous les cas d'épreuves.

qu'il avoit la moindre vitesse, celle de 626 pieds, parce qu'un boulet plus petit ayant plus de vent, donne lieu à une plus grande perte de fluide élastique. Au contraire, les vitesses, dans cette suite d'épreuves, avoient plus d'uniformité, plus de similitude qu'on n'auroit dû en attendre de premières épreuves, faites avec des machines d'un aussi grand volume. On a tiré de leur ensemble les conclusions suivantes :

1°. Ces expériences prouvent que l'inflammation de la poudre est presque instantanée, puisque la presque-totalité des charges s'enflamme dans des temps extrêmement courts.

2°. Les vitesses communiquées à des boulets de même poids avec différentes quantités de poudre sont à peu près en raison des racines carrées de ces quantités, une petite différence en moins ayant lieu lorsque les charges deviennent considérables.

3°. Des boulets de différens poids, chassés avec différentes charges de poudre, en reçoivent des vitesses qui sont à peu près dans la raison inverse des racines carrées de ce poids.

4°. De sorte qu'en général les vitesses imprimées à des boulets de différens poids par différentes charges de poudre, sont à peu près en raison composée de la directe des racines des charges, et de l'inverse des racines des poids.

5°. Il résulte de-là qu'il y auroit beaucoup à gagner pour l'artillerie à faire usage de boulets allongés ou d'une matière plus pesante, puisqu'à charge égale de poudre la force des boulets croît comme la racine carrée du poids de ces boulets (1).

6°. Il y auroit aussi de l'avantage à diminuer le vent : on pourroit

(1) Il est cependant bon de rappeler que le procès-verbal des épreuves de 1775, desquelles M. Hutton tire toutes ces conséquences, fait voir que les boulets longs ont des inconvéniens dont il ne parle point ici.

On y lit, à l'article des épreuves du 3 juin, les seules où on ait fait usage des boulets de cette forme : « Les quatrième et cinquième coups ont été tirés avec des boulets longs, d'une » forme sphérico-cylindrique, ou composée d'un cylindre terminé à chacune de ses bases » par une demi-sphère, la longueur étant double du diamètre. Au quatrième coup le » boulet long frappa le pendule par son côté; son entrée dans le bois avoit la forme » de sa section longitudinale, l'axe étant placé verticalement. Le dernier boulet entra » obliquement dans le bois : il y a apparence qu'en pénétrant dans le bloc, son ex- » trémité antérieure a rencontré un boulet qui y étoit déjà logé, puisque cette extrémité

par-là épargner un tiers et peut-être une plus forte partie de la poudre qui se consomme ordinairement.

7°. En réunissant les avantages présentés dans les deux derniers articles, il est évident que l'on pourroit réduire la consommation de la poudre à environ moitié. Mais quelque importante que soit cette économie, il semble que celle à faire sur la matière et la fabrication des pièces de canon seroit encore plus considérable; car on pourroit donner à des pièces de canon de petits calibres et de petites dimensions, les mêmes effets qu'ont actuellement ceux de calibres et dimensions plus fortes, en leur faisant tirer des boulets longs pesant le double ou le triple de leurs boulets ordinaires; et par-là des vaisseaux de petit échantillon pourroient tirer des boulets aussi pesans que ceux tirés actuellement par des vaisseaux de première force.

Enfin, de même que ces expériences font connoître les effets des boulets de différens poids, tirés avec différentes charges de poudre d'une même pièce de canon; de même, en coupant une pièce de canon successivement à différentes longueurs, on pourroit, par la comparaison des effets qu'elle produiroit dans ces états successifs, établir avec certitude les règles à suivre quant à la longueur à donner aux pièces d'artillerie. En un mot, les principes sur lesquels ces expériences sont fondées sont si féconds en conséquences, qu'en y joignant les effets de la résistance du milieu, ils paroissent suffire pour déterminer tout ce qui a rapport à la théorie comme à la pratique de l'artillerie.

3. Les premières expériences faites avec des boulets de canon en 1775, en étoient à ce point, et tels étoient les avantages que l'on pou-

» étoit un peu aplatie par le côté : d'où l'on peut conclure que *les boulets longs ont toujours un mouvement de rotation fort irrégulier.* »

On ne peut guère douter que ces mouvemens irréguliers de rotation des boulets longs, reconnus par M. Hutton lui-même, ne fissent perdre à ces boulets la justesse de leur direction, et ne leur ôtassent même une partie de leur portée; mais peut-être, sous le point de vue de la force dont les boulets sont animés, y auroit-il, dans certains cas, à gagner, pour la marine sur-tout, que l'auteur a principalement en vue, à tirer des boulets creux remplis de plomb pour augmenter leur poids, ou même des boulets de plomb.

L'auteur paroît avoir reconnu que les avantages qu'il attribuoit aux boulets longs sont plus que compensés par leurs défauts, et avoir abandonné toute idée de les employer, car il n'en est point du tout question dans les épreuves dont il va être rendu compte.

voit raisonnablement s'en promettre. Je ne sache pas cependant qu'il ait été ordonné d'en faire aucun usage pour le service public. Peut-être cependant est-ce à elles que l'on doit les caronades, espèce de bouches à feu d'une invention nouvelle, au moyen desquelles, en employant de petites charges de poudre avec de gros boulets auxquels on a donné peu de vent, on est venu à bout de produire, à peu de frais et avec ces pièces légères, des effets fort considérables. Peut-être ces expériences étoient-elles renfermées dans des bornes trop resserrées pour qu'on ait cru qu'elles méritassent une attention particulière. Quoi qu'il en soit, celles dont on va rendre compte auront de grands avantages sur les premières par leur étendue, leur variété, la perfection des machines, et par leur authenticité. Elles ont été faites par les ordres exprès du duc de Richmond, grand-maître de l'artillerie, qui a fait fournir les pièces de canon, les machines, et tout ce qui étoit nécessaire pour les exécuter convenablement.

4. Cette suite d'expériences a été faite sous la direction du major Blomefield, inspecteur d'artillerie, officier d'un mérite distingué, et connu particulièrement comme adroit mécanicien. Elle a fait notre occupation pendant les trois étés successifs de 1783, 84 et 85, et auroit pu s'étendre plus loin, soit en la dirigeant sur de nouveaux objets, soit en répétant davantage les expériences faites sur quelques-uns en particulier.

5. On y en a eu beaucoup de différens en vue. Les principaux sont :

1°. Les vitesses que les boulets reçoivent de charges égales de poudre dans des pièces du même poids et du même calibre, mais de longueur différente.

2°. Les vitesses produites par différentes charges de poudre, le poids et la longueur des pièces étant les mêmes.

3°. La plus grande vitesse que l'on peut obtenir des différentes longueurs des pièces, en augmentant les charges autant que la résistance des pièces peut le permettre.

4°. Les effets résultans des variations dans le poids des pièces, tout le reste étant le même.

5°. Les enfoncemens des boulets dans le bois.

6°. Les portées des boulets et leurs durées, pour les comparer avec leurs vitesses initiales, et en conclure la résistance du milieu.

7°. Les effets résultans

- Des bouchons ;
- Des différens degrés de force dans le refoulement ;
- Des différentes quantités de vent ;
- Des différentes positions de la lumière ;
- Des chambres , des tourillons , et de tous les autres objets dont la connoissance peut intéresser le service de l'artillerie.

De la nature des expériences et des machines qui y ont été employées.

6. La plupart des résultats dont on vient de parler dépendent de la vitesse avec laquelle le boulet sort de la bouche de la pièce. L'objet essentiel des expériences doit donc être de découvrir cette vitesse dans tous les cas , et particulièrement dans ceux qui se rencontrent le plus communément dans la pratique de l'artillerie. Cette vitesse est fort grande , puisqu'elle est de mille à deux mille pieds et plus par seconde. Pour l'estimer convenablement , il faut commencer par la ramener à être dans une proportion connue avec une beaucoup moindre. On conçoit que cela peut se faire en supposant que le boulet projeté avec une grande vitesse frappe quelque objet très-pesant , comme un gros bloc de bois , duquel il ne rebondisse point ; de sorte qu'après le choc ils continuent leur marche tous deux ensemble avec une vitesse commune. Il est clair qu'en donnant au corps frappé une masse assez considérable , on peut réduire la vitesse primitive du boulet en toute proportion , et à une vitesse telle qu'on puisse la mesurer commodément. On sait , en effet , qu'alors la vitesse avec laquelle le boulet et le bloc de bois se meuvent ensemble , est à la vitesse du boulet , avant le choc , comme la masse du boulet est à celle du boulet et du bloc réunis. On peut , par ce moyen , réduire des vitesses de mille pieds par seconde à d'autres de deux ou trois pieds seulement : en mesurant ces dernières par des moyens convenables , et les multipliant par le rapport des masses réunies du boulet et du bloc à celle du boulet , on trouve les vitesses du boulet avant et au moment du choc.

7. Ces vitesses réduites peuvent se mesurer facilement par un moyen simple et ingénieux , imaginé par Robins. Au lieu de laisser le bloc de bois frappé par le boulet se mouvoir librement dans la direction du mouvement du boulet , on le suspend comme la lentille du pendule

d'une horloge, par le moyen d'une forte tige de fer, à l'extrémité supérieure de laquelle est un axe horizontal, au moyen duquel il oscille librement lorsqu'il est frappé par le boulet. On voit aisément l'effet de cette invention simple. Le boulet, en frappant le pendule, s'y enfoncera à une certaine profondeur, et le pendule oscillera autour de son axe, en décrivant un arc dont la grandeur dépendra de la force du coup qu'il aura reçu; au moyen de l'arc décrit par le pendule, on peut aisément calculer la vitesse de chacun de ses points: car un corps acquiert la même vitesse en tombant d'une hauteur donnée, soit qu'il descende verticalement ou de toute autre manière; la longueur de l'arc décrit par le centre d'oscillation du pendule, ainsi que le rayon de cet arc étant donnés, on en connoît le sinus verse, qui est la hauteur verticale de laquelle descend ce point du pendule. Cette hauteur étant connue, la vitesse acquise en la parcourant se trouve par les lois connues du mouvement des corps graves. La vitesse de ce centre étant ainsi trouvée, donne celle de tout le pendule, au moyen de laquelle on détermine celle du boulet avant le choc par le rapport connu des masses du boulet et du pendule. On voit que la détermination de l'extrême vitesse du boulet se réduit à mesurer la grandeur de l'arc décrit par le pendule en vertu du choc (1).

8. Cet arc peut se mesurer de différentes manières. Dans les expériences qui vont suivre, on l'a déterminé en mesurant sa corde qui est la ligne la plus utile pour le calcul qu'il y a à faire, et cette corde a été mesurée, tantôt au moyen d'un ruban attaché au bas du

(1) Le pendule, lorsqu'il est frappé par le boulet, se trouve dans une position verticale. Il ne descend point, comme quelques personnes pourroient croire que M. Hutton le suppose; il monte, au contraire, en décrivant son arc: ce que dit notre auteur n'en est cependant pas moins vrai. On sait que pour qu'un corps grave s'élève en vertu d'un choc qu'il reçoit, à une hauteur donnée, soit verticalement, soit de toute autre manière, il faut que ce choc lui imprime une vitesse égale à celle qu'il acquerrait en tombant librement de cette hauteur. La vitesse qu'il faut mesurer ici est celle avec laquelle le pendule part en vertu du choc qu'il reçoit du boulet. Cette vitesse se mesure par le moyen du sinus verse de l'arc décrit par le pendule en remontant, et par les lois du mouvement des corps graves: de sorte que la démonstration de M. Hutton, que le devoir du traducteur étoit de donner telle qu'il la présente, peut subir le léger changement suivant, après lequel elle parvient exactement au même but.

La longueur de l'arc décrit par le centre d'oscillation du pendule, ainsi que le rayon
pendule

pendule par une de ses extrémités, et dont le reste glissoit au travers d'une machine imaginée pour cela, tantôt par la trace qu'une pointe fixée au bas du pendule imprimoit dans un arc dont le centre étoit au milieu de l'axe du pendule, et couvert d'une composition d'une consistance convenable, que l'on décrira dans la suite.

9. Une autre manière de mesurer la vitesse du boulet est d'observer l'arc décrit par le recul du canon, que l'on aura suspendu comme le pendule. En chargeant le canon de différens poids, on peut réduire ses oscillations à des arcs commodes à mesurer. La grandeur de ces arcs dépendra de la vitesse du boulet, ou de la force de la poudre enflammée, l'action et la réaction étant égales et contraires; c'est-à-dire que la vitesse du boulet sera plus grande que celle du centre d'oscillation du canon, dans le rapport du poids du canon à celui du boulet. Ainsi, en calculant la vitesse du centre d'oscillation du canon par la corde de l'arc décrit par le recul, on trouvera celle du boulet, en faisant la proportion suivante: le poids du boulet est à celui du canon comme la vitesse du canon est à celle du boulet, en supposant que le poids de la poudre ne contribue en rien au recul.

10. Cette description peut suffire pour donner une idée générale de la nature des expériences à faire pour déterminer la vitesse avec laquelle les boulets sont lancés des pièces de canon par des charges de poudre quelconques, et des principes sur lesquels elles sont fondées. Mais il faut observer qu'indépendamment du centre d'oscillation et des poids du boulet du pendule et du canon, l'effet du choc dépend aussi de l'emplacement du centre de gravité du pendule et du canon, et du point frappé par le boulet, qui est celui où s'exerce la force qui agit sur le pendule. La grandeur de l'arc d'oscillation dépend de la situation de ces deux points. Il est donc nécessaire de donner une description plus détaillée des machines dont on a fait usage, et des méthodes que l'on a employées pour trouver les données nécessaires

de cet arc étant donnés, on en connoît le sinus verse, qui est la hauteur verticale à laquelle ce point du pendule s'est élevé. Cette hauteur étant connue, la vitesse que le centre d'oscillation a reçue par le choc, se trouve par les lois connues du mouvement des corps graves. Cette vitesse étant trouvée, donne celle de tout le pendule, et au moyen de cette vitesse on détermine celle du boulet, avant le choc, par le rapport connu des masses du boulet et du pendule.

au calcul : nous procéderons ensuite à la recherche des règles à suivre pour déterminer la vitesse du boulet dans tous les cas , d'après ces données , et la corde de l'arc d'oscillation , soit du pendule , soit du canon.

Des canons , de la poudre , des boulets et des machines employés dans ces expériences.

11. Il a été fondu à Woolwich , pour ces expériences , cinq canons du calibre d'une livre. Ils ont été forés , avec toute la précision qu'il a été possible d'y apporter , au diamètre commun de deux pouces et deux centièmes de pouce. Trois d'entr'eux , désignés sous les numéros 1 , 2 et 3 , étoient à peu près du même poids , mais des longueurs respectives de 15 , 20 et 30 calibres , afin de pouvoir connoître les effets de différentes longueurs d'ame : le poids du canon , les charges de poudre et les boulets restans les mêmes. Les deux autres canons , désignés sous les numéros 4 et 5 , étoient plus pesans , et avoient 40 calibres de longueur , pour obtenir les effets des plus longues pièces. Le numéro 5 étoit particulièrement destiné à faire connoître ceux des différentes longueurs d'ame. Pour cela , on devoit le tirer un nombre de coups suffisant de toute sa longueur , et le scier ensuite successivement de 6 ou de 12 pouces à la fois , en le tirant un certain nombre de coups à chaque longueur. Pour pouvoir le suspendre près de son centre de gravité à ses différentes longueurs , on avoit fondu en même temps une lame de métal qui tenoit à la partie inférieure de la pièce , et s'étendoit depuis la culasse jusque vers le milieu de la longueur. On devoit percer cette lame de trous au-dessous du centre de gravité , dans les différentes positions qu'il auroit prises , suivant les différentes longueurs de la pièce , et un boulon qui auroit passé dans ces trous auroit servi à suspendre la pièce. Les autres ont été suspendues par leurs tourillons.

Le poids exact et les dimensions de toutes ces pièces se trouvent dans la table suivante :

NUMÉRO du CANON.	LONGUEUR DE				DIAMÈTRE A		DIAMÈTRE	POIDS.
	LA PIÈCE.		L'ÂME.		LA CULASSE.	LA BOUCHE.	de L'ÂME.	
	calibres.	pouces.	calibres.	pouces.	pouces.	pouces.	pouces.	livres.
1	15	30.3	13.91	28.2	7.85	6.88	2.02	290
2	19.98	40.35	18.86	38.1	7.43	5.92	2.02	289
3	29.2	60	28.4	57.37	6.73	4.68	2.02	295
4	41.04	82.9	39.55	79.9	6.1	4.31	2.02	378
5	40.84	82.5	39.83	80.47	6.47	4	2.02	502

12. Comme les pièces devoient être suspendues par leurs tourillons, afin de pouvoir observer le rapport qu'il y auroit entre la vitesse du boulet et l'arc décrit par le recul du canon oscillant autour d'un axe, on avoit fondu différens poids de plomb qui s'adaptoient exactement sur les tourillons, afin de rendre la pièce assez pesante pour que l'arc du recul ne fût pas d'une grandeur incommode. De ces poids, les uns étoient destinés à s'ajuster sur les tourillons mêmes, et d'autres devoient embrasser les premiers; tous joignoient avec précision, et étoient fixés par des boulons qui traversoient toutes les pièces. Ils étoient de différentes grandeurs, de manière à pouvoir réduire les pièces de canon toutes à la même pesanteur de 917 livres, en y comprenant 188 livres de ferrures qui formoient la tige à laquelle la pièce étoit suspendue. C'est ainsi que se sont faites la plupart des expériences, et lorsqu'il a été fait quelque changement sur ce point ou sur tout autre, il en a toujours été tenu compte exactement. Ce poids de 917 livres a été composé suivant les différentes pièces en ferrures et en plomb, ainsi qu'il suit :

NUMÉROS.	CANON.	PLOMB.	FER.	TOTAL.
1	290	439	188	917
2	289	440	188	917
3	295	434	188	917
4	378	351	188	917
5	502	227	188	917

Tels étoient les poids dans le commencement ; mais au bout de peu de temps , on a allongé et renforcé les ferrures de la tige , ce qui a augmenté leur poids de 11 livres , et le tout s'est trouvé alors peser 928 livres.

13. Dans ces expériences , la vitesse des boulets devoit se mesurer par le pendule contre lequel on les tiroit , et par l'arc décrit par le recul de la pièce qui étoit suspendue sur un axe , au moyen d'une tige de fer , comme le pendule lui-même ; et les arcs décrits par l'un et par l'autre étoient mesurés de la même manière.

14. Le pendule étoit formé d'un bloc de bois contre lequel on tiroit les boulets , lié par d'épaisses bandes de fer à une forte tige à laquelle il étoit suspendu , et qui portoit un axe à sa partie supérieure. Les extrémités cylindriques de l'axe du canon , de même que celui du pendule , étoient d'abord placées de manière à tourner sur des surfaces en fer plates et polies ; et pour empêcher l'axe de se déplacer , en glissant en avant ou en arrière , on l'avoit contenu avec des chevilles de fer verticales. Cette méthode causant trop de frottement , on a donné de la convexité aux plaques de fer qui servoient de supports aux extrémités de l'axe , et on a placé les chevilles qui devoient le maintenir , de manière à ne pas le toucher tout-à-fait ; l'axe avoit , par ce moyen , un peu de jeu , et le frottement étoit moindre qu'auparavant. Cependant , pour le diminuer encore , on a donné une sorte de tranchant aux parties inférieures des extrémités de l'axe , à peu près comme au couteau d'une balance , et on les a fait tourner dans des espèces d'encastremens , dont les deux extrémités étoient plus basses que le milieu , et qui ressembloient à un cylindre courbé. Par ce moyen ,

le tranchant de l'axe touchoit les encastremens, non pas par une ligne, mais seulement par un point; alors il oscilloit avec la plus grande liberté, n'ayant presque qu'un frottement imperceptible. Il sera fait mention particulière, dans le journal des expériences, des temps et des occasions auxquels on a fait ces différens changemens.

15. On a commencé par mesurer la corde de l'arc d'oscillation du pendule et du canon, au moyen d'un ruban étroit, divisé en pouces et en dixièmes de pouces, comme dans les expériences de 1775. On avoit cependant imaginé une nouvelle manière de le faire jouer. Au bas du pendule ou au-dessous de la pièce de canon, on avoit fixé une languette de fer qui pouvoit s'élever ou se baisser au moyen d'une vis. Cette languette étoit fendue dans sa partie inférieure, pour recevoir le bout du ruban qui étoit serré dans cette fente au moyen d'une seconde vis. Immédiatement au-dessous, le ruban passoit entre deux lames de fer qui pouvoient s'approcher ou s'éloigner l'une de l'autre à volonté au moyen de deux vis. Ces deux lames étoient soutenues sur une tige verticale qui étoit attachée à un gros bloc de bois, de manière à pouvoir s'élever ou s'abaisser à volonté au moyen d'une vis. L'une de ces deux lames avoit été faite assez longue pour que le ruban ne pût pas atteindre à ses extrémités, et s'y embarrasser dans l'aller et le retour des oscillations. Il est clair que la longueur du ruban tiré dans une oscillation est celle de la corde de l'arc décrit, comptée en pouces comme le rayon, ou en parties aliquotes du rayon de cet arc, pris depuis le milieu de l'axe de rotation jusqu'au bas de la languette.

16. Cette méthode cependant s'est trouvée sujette à beaucoup d'inconvéniens, et mettoit quelquefois de l'incertitude dans les mesures. On la quitta pour mesurer la corde de l'arc d'oscillation d'une manière beaucoup plus commode et plus sûre. On prit un bloc de bois dont on tailla la surface supérieure de manière à former un arc de cercle, ou plutôt une surface cylindrique concave, dont le centre étoit au milieu de l'axe de rotation, et le rayon, par conséquent, égal à la distance qu'il y avoit entre l'axe et la surface ainsi taillée. On pratiqua, au milieu de la largeur et dans toute la longueur de cet arc, une rigole peu profonde, et large d'environ trois ou quatre pouces. On remplit cette rigole d'une composition faite de savon et de cire, à laquelle on donna la consistance du miel, et dont on avoit soin de tenir la surface supérieure bien unie et de niveau avec le reste de l'arc de bois. Une pointe

fixée au-dessous du pendule et de la pièce de canon, de manière à entrer peu profondément dans la composition dont étoit remplie la rigole, y laissoit une trace, lors du mouvement du pendule, qu'elle ne pouvoit pas retarder d'une manière sensible. La trace restant, on pouvoit en mesurer facilement la longueur. On s'y prit pour cela de la manière suivante. On traça une échelle des cordes sur la surface supérieure de l'arc, des deux côtés de la rigole, dont on marqua les divisions en noir, le fond étant blanc. En plaçant ensuite une règle transversalement d'une division à sa correspondante d'un côté à l'autre de l'arc, de manière à toucher l'extrémité de la trace laissée dans la composition par la pointe, on trouvoit de suite la longueur de la corde de l'arc décrit. Pour faciliter les calculs à faire, on évalua les cordes en millièmes du rayon, ce qui évita la peine de diviser par ce rayon à chaque opération. Voici maintenant la manière dont je m'y pris pour construire l'échelle des cordes tracée sur la surface de l'arc. Le rayon fut fixé à la longueur de 10 pieds justes. Je marquai cette longueur sur une règle bien droite et bien unie. Je partageai chaque pied en dix parties égales, et chacune de ces dernières en dix autres, qui se trouvoient des centièmes de pied. Je transportai les divisions de la règle sur l'arc, en tenant la première division de la règle toujours exactement appliquée sur l'extrémité de l'arc, et faisant tourner la règle sur ce point comme sur un centre, de manière que l'arc se trouvoit dans le plan de rotation de la règle; à mesure que chacune des divisions de la règle venoit à rencontrer l'arc, on l'y marquoit.

17. Les machines et les opérations au moyen desquelles on a trouvé les portées, seront décrites par la suite.

Des centres de gravité et d'oscillation.

18. Comme il étoit nécessaire, pour le calcul de la vitesse du boulet, de connoître les positions des centres de gravité et d'oscillation, on les déterminoit ordinairement tous les jours de la manière qui suit :

On employoit deux manières de trouver le centre de gravité. 1^o. On plaçoit par terre un prisme triangulaire de fer, de manière qu'il présentât en l'air une de ses arêtes. On plaçoit sur cette arête le pendule ou la pièce de canon avec sa tige, de manière qu'il restât en équilibre

dans une position horizontale. On mesuroit la distance du milieu de l'axe au point qui répondoit sur l'arête du prisme, et c'étoit la distance du centre de gravité à ce milieu de l'axe de rotation. (*Voyez figure 1.*)

19. 2°. On faisoit porter (*fig. 2*) les deux extrémités de l'axe de rotation du pendule ou de la pièce sur deux points fixes; on attahoit au-dessous du bloc ou de la pièce une corde que l'on faisoit passer sur une poulie *P*, et à l'extrémité de laquelle on attahoit des poids *M*, jusqu'à ce qu'ils soutinssent le corps dans une position horizontale; prenant ensuite le poids total du corps et sa longueur, depuis l'axe jusqu'au point où la corde étoit attachée, on trouvoit la place du centre de gravité par le quatrième terme de cette proportion : le poids du pendule est à celui attaché à l'extrémité de la corde, comme la distance de l'axe de rotation au point d'attache de la corde est à celle du même axe au centre de gravité.

Chacune de ces deux méthodes donnoit également la situation du centre de gravité, mais on étoit encore plus sûr de leurs résultats, lorsqu'ils s'accordoient.

20. Pour trouver les centres d'oscillation du pendule ou de la pièce de canon, on les suspendoit sur leurs axes comme ils devoient l'être pour les expériences, et on les faisoit osciller *dans de petits arcs* pendant 1, 2, 5, 10 minutes, le plus long-temps étoit le mieux, et on comptoit avec grand soin le nombre d'oscillations qu'ils faisoient pendant un temps donné, que l'on mesuroit ou avec un pendule à demi-secondes, ou avec une montre à secondes, ou même avec une autre montre que l'on a employée, qui marquoit jusqu'aux quarantièmes de seconde. Ayant ainsi déterminé avec exactitude le temps pendant lequel s'étoit fait un certain nombre d'oscillations, on trouvoit facilement la position du centre d'oscillation; car nommant *n* le nombre d'oscillations faites pendant un nombre *s* de secondes, et *l* la longueur du pendule à secondes, on sait que $n^2 : s^2 :: l : \frac{s^2 l}{n^2} = k$, la distance de l'axe d'oscillation au centre d'oscillation (1); et ici, si *s* est de 60 secondes ou une minute, et *n*

(1) Nommant *t* le temps d'une oscillation du pendule à secondes dont la longueur soit *l*, et *k* la distance cherchée du centre d'oscillation du pendule ou de la pièce de canon, distance qui, comme on sait, est égale à la longueur du pendule simple, qui feroit

le nombre d'oscillations faites par le pendule ou la pièce de canon pendant une minute, nombre qui se trouve en divisant le nombre total d'oscillations que l'on a comptées, par le nombre de minutes qu'a duré l'observation : alors on a $n^2 : 60^2 :: l : \frac{(60)^2 l}{n^2}$, qui est la distance cherchée k du centre d'oscillation. Or, les observations les plus exactes sur les oscillations des pendules ont fait connoître que l , ou la longueur du pendule à secondes pour la latitude de Londres ou Woolwich, est de $39 \frac{1}{8}$ pouces : ainsi on a $k = \frac{3600 \times 39 \frac{1}{8}}{n^2} = \frac{140850}{n^2}$ comptée en pouces, ou $\frac{11737,5}{n^2}$ comptée en pieds. C'est par cette formule que l'on a déterminé le centre d'oscillation, chaque jour d'expériences.

Calcul de la vitesse du boulet.

21. Après avoir vu la manière de trouver les différentes mesures et poids nécessaires pour le calcul de la vitesse du boulet, nous allons procéder à la recherche des formules de cette vitesse, en commençant par celle qui se tire des oscillations du pendule.

Nommons b le poids du boulet,

p celui du pendule,

g la distance de son centre de gravité à l'axe d'oscillation,

k celle de son centre d'oscillation au même axe,

i celle du point frappé par le boulet au même axe,

c la corde de l'arc décrit par le pendule,

r le rayon de cet arc ou la distance de l'axe de rotation au point d'attache du ruban ou à l'arc,

v la vitesse avec laquelle le boulet frappe le pendule :

Par la nature du mouvement d'oscillation, bii exprime la somme des forces du boulet agissant à la distance i de l'axe, et pgk la somme des forces du pendule ; par conséquent $pgk + bii =$ la somme des forces du boulet et du pendule réunis : multipliant chacune par sa vitesse, on aura $bii v$ pour la quantité de mouvement du boulet, et $(pgk + bii) \times z$

une oscillation en même temps T que notre pendule ou notre pièce de canon, on auroit (Bezout, *Cours d'artillerie*, 4^e vol., art. 446, édit. de 1772) $1 : T :: \sqrt{l} : \sqrt{k}$; donc $k = T^2 l$, mais $T = \frac{s}{n}$; donc $k = \frac{s^2 l}{n^2}$.

pour

pour la quantité de mouvement du boulet et du pendule réunis, en appelant z la vitesse du point frappé par le boulet. Ces quantités de mouvement doivent être égales avant et après le choc : on a donc $(pgk + bii) z = bii v$, et par conséquent $z = \frac{bii v}{pgk + bii}$ (1). Mais la jonction du boulet au pendule fait changer la position du centre d'oscillation, et la distance du nouveau centre d'oscillation à l'axe de rotation se trouve en divisant $pgk + bii$ la somme des forces, par $pg + bi$ la somme des momens; nommant y cette distance, on a $y = \frac{pgk + bii}{pg + bi}$ (2), et puisque $\frac{bii v}{pgk + bii}$ est la vitesse du point dont la distance est i , par les propriétés des lignes proportionnelles on aura $i : \frac{pgk + bii}{pg + bi}$ ou $y :: \frac{bii v}{pgk + bii} : \frac{biv}{pg + bi}$ vitesse du nouveau centre d'oscillation.

Maintenant, par la propriété du cercle, on a $2r : c :: c : \frac{cc}{2r}$ qui sera le sinus verse de l'arc décrit avec le rayon r , et ayant la corde c ; et par les propriétés des lignes proportionnelles, on a $r : y$ ou $\frac{pgk + bii}{pg + bi} :: \frac{cc}{2r} : \frac{cc}{2rr} \times \frac{pgk + bii}{pg + bi}$ qui sera le sinus verse de l'arc qui a pour rayon y , c'est-à-dire, de l'arc décrit par le nouveau centre d'oscillation : nous appellerons h ce sinus verse. Or, comme la vitesse perdue par un corps grave en montant par un arc de cercle, ou gagnée en le descendant, est égale à celle qu'il acquerroit en tombant librement de son sinus verse, il s'ensuit que la vitesse du centre d'oscillation sera

(1) Bezout est parvenu par une autre route à cette dernière formule, à l'article 634 du 4^e volume, où l'on trouve $v = \frac{R \times D}{smrr} \times CM$. La force qu'il appelle R est ici bv , D est i , et CM est aussi i , parce qu'il est ici question de la vitesse du point frappé; ce qui est un cas particulier de la formule générale de Bezout. La quantité qu'il appelle $smrr$ ou la somme des produits de chaque partie du corps oscillant par le carré de sa distance à l'axe de rotation, est pgk pour le pendule (article 656 du même volume), et bii pour le boulet; par conséquent, pour le pendule et le boulet réunis par le choc et oscillans ensemble, elle est $pgk + bii$. La quantité que Bezout appelle v est celle que nous venons de nommer z : faisant toutes ces substitutions dans la formule de Bezout, elle devient $z = \frac{bvi}{pgk + bii}$. On voit que ce que Hutton appelle somme des forces est ce que Bezout (art. 640) appelle *exposant du moment d'inertie*.

(2) Voyez Bezout, article 645, 4^e volume, *Cours de l'artillerie*.

égale à celle engendrée par la pesanteur dans un corps grave, qui tomberoit de la hauteur h ou $\frac{cc}{2rr} \times \frac{pgk + bii}{pg + bi}$. Mais l'espace décrit par un corps grave en une seconde, à la latitude de Londres, est de 16,09 de pieds, et la vitesse engendrée pendant le même temps est de 32,18 pieds : ainsi, d'après les lois de la chute des corps graves, on trouvera la vitesse du centre d'oscillation déduite de la corde de l'arc qu'il décrit, par le quatrième terme de cette proposition

$$\sqrt{16,09} : \sqrt{h} :: 32,18 : \frac{5,6727 c}{r} \sqrt{\frac{pgk + bii}{pg + bi}}.$$

Mettons actuellement en équation les deux expressions que nous avons trouvées de la vitesse du centre d'oscillation ; cette équation exprimera le rapport de toutes les quantités qui entrent dans la question : nous aurons

$$\frac{biv}{pg + bi} = \frac{5,6727 c}{r} \sqrt{\frac{pgk + bii}{pg + bi}},$$

d'où nous tirerons

$$v = \frac{5,6727 c}{bir} \times \sqrt{(pgk + bii) \cdot (pg + bi)}$$

expression de la vitesse du boulet au moment où il frappe le pendule.

Cette formule est d'accord avec celle d'Euler et Antoni, et aussi, à peu de chose près, avec celle de Robins, lorsque celle qu'il a donnée est corrigée au moyen d'un article qu'on a mal à propos omis dans son ouvrage en le publiant : correction qu'il a donnée lui-même, qui se trouve insérée dans les *Transactions philosophiques du mois d'avril 1743*, où il annonce que toutes les vitesses rapportées dans son ouvrage, excepté la première seulement, ont été calculées par sa formule corrigée, quoique dans l'édition de ses ouvrages, publiée en 1761, on ait oublié cette correction, dont il n'est fait aucune mention. Cette remarque, si M. Euler l'avoit faite, lui auroit épargné une grande partie des critiques qu'il a faites de l'ouvrage de Robins.

22. Notre formule peut être très-simplifiée et rendue commode pour la pratique, sans perdre sensiblement de sa justesse. Pour cela extrayons la racine indiquée du facteur composé $(pgk + bii) \times (pg + bi)$, nous aurons $(pg + bi \times \frac{k+i}{2k}) \times \sqrt{k}$ approchée de la vraie valeur à moins de $\frac{1}{100000}$, pour les cas qui arrivent ordinairement dans la pratique ; mais puisque $bi \times \frac{k+i}{2k}$ n'est ordinairement, dans nos expériences,

que $\frac{1}{500}$ ou $\frac{1}{600}$ ou $\frac{1}{800}$ de pg , et que bi ne diffère de $bi \times \frac{k+i}{2k}$ que d'environ $\frac{1}{100}$ de lui-même, il s'ensuit que $pg + bi$ est, à moins de $\frac{1}{50000}$ près, égal à $pg + bi \times \frac{k+i}{2k}$; ainsi on a, à très-peu près, $v = 5.6727 c. \frac{pg+bi}{bir} \sqrt{k}$; et mettant g pour i dans le dernier terme bi , on a enfin $v = 5.6727 gc. \frac{p+b}{bir} \sqrt{k}$, formule aisée à employer dans toutes les occasions: et comme elle ne diffère de la vérité que de $\frac{1}{50000}$, il s'ensuit que, même pour les plus grandes vitesses, l'erreur ne sera pas d'un demi-pied. Il faut observer que les quantités c, g, i, r peuvent être évaluées en toutes les mesures que l'on voudra, en pieds ou en pouces,.... etc.: mais k doit l'être en pieds, parce que la formule est adaptée aux pieds (1).

23. Comme les boulets restent dans la pendule pendant toute une suite d'expériences, son poids et les positions de ses centres de gravité et d'oscillation changent par l'addition de chaque boulet qui s'y loge; il

(1) Dans la formule $v = 5.6727 gc \frac{p+b}{bir} \sqrt{k}$, la quantité 5.6727 est la racine de 32.18 pieds, qui est la vitesse produite par la pesanteur au bout d'une seconde. Si on appelle h la hauteur due à cette vitesse, la formule sera

$$v = \sqrt{(2h)} \times gc \frac{p+b}{bir} \sqrt{k}.$$

Or, dans une formule, on doit généralement évaluer en mesures communes toutes les quantités de même espèce qui y entrent. Si on évalue la quantité $\sqrt{(2h)}$ en pieds, comme on le fait en écrivant à sa place, 5.6727, on doit évaluer aussi les autres quantités g, c, i, r et k en pieds. Cependant, en donnant à la formule la forme

$$v = 5.6727 \frac{p+b}{b} \times \frac{gc}{ir} \times \sqrt{k},$$

on voit qu'il devient indifférent en quelles mesures on évalue g, c, i et r , qui font fonction de nombres abstraits, pourvu qu'on les évalue toutes en une même mesure, en pieds, en pouces.... etc.; mais il faut que k soit évalué en pieds. Si on supposoit $\sqrt{k} = a$ en sorte que la formule devint

$$v = 5.6727 \frac{p+b}{b} \times \frac{gca}{ir},$$

peu importerait laquelle des quantités g, c et a on évalueroit en pieds, en évaluant les deux autres en mesures semblables à celle de i et r ; mais il faudroit toujours en évaluer une des trois en pieds pour conserver l'homogénéité de la formule.

faut donc, dans la formule de la vitesse, changer les quantités p , g et k après chaque coup. Les valeurs successives de p seront toujours $p + b$, c'est-à-dire, p se corrige en y ajoutant toujours b . Les valeurs successives de g sont $g + \frac{i-g}{p+b} \times b$, ou, à peu près, $g + \frac{i-g}{p} \times b$; c'est-à-dire que g se corrige, à chaque coup, en ajoutant $\frac{i-g}{p} \times b$ à sa valeur précédente. Enfin k se corrige en prenant successivement, pour ses nouvelles valeurs, $\frac{pgk + bii}{pg + bi}$ ou en ajoutant, après chaque coup, à sa valeur précédente, la quantité $\frac{i-k}{pg + bi} \times bi$, ou, à peu près, $\frac{i-k}{p} \times b$, de sorte que les trois corrections se font en ajoutant après chaque coup

b à la valeur de p ,

$\frac{i-g}{p} \times b$ à celle de g ,

$\frac{i-k}{p} \times b$ à celle de k ,

en supposant que b est fort petit par rapport à p .

24. Mais comme la distance k du centre d'oscillation, dont la racine carrée entre dans l'expression de la vitesse, se trouve par le nombre n d'oscillations du pendule, il sera bon d'exprimer dans la formule la valeur de k en n . Dans l'article 20 nous avons trouvé $k = \frac{11737.5}{nn}$ pieds, conséquemment $\sqrt{k} = \frac{108.3398}{n}$ pieds; substituant cette valeur pour $\sqrt{k}$ dans la formule

$$v = 5.6727 \text{ gc } \frac{p+b}{bir} \sqrt{k},$$

elle devient

$$v = 614.58 \text{ gc } \times \frac{p+b}{birn}$$

ou

$$v = \frac{59000}{96} \times \frac{p+b}{birn} \text{ gc},$$

formule simple et commode de la vitesse du boulet exprimée en pieds, dans laquelle c , g , i et r peuvent s'évaluer en pieds, pouces, ou toute autre mesure, pourvu qu'elle soit la même pour toutes ces quantités.

25. Il faut ajouter ici une correction pour n en place de celle pour k de l'article 23. On a trouvé (article 20) qu'en évaluant k en pouces, on a

$$k = \frac{140850}{nn} \text{ pouces, d'où résulte } n^2 = \frac{140850}{k} \text{ pouces et } n = \frac{375.3}{\sqrt{k}} \text{ pouces.}$$

La correction pour k étant $\frac{i-k}{pg+bi} \times bi$, celle de n sera

$$\begin{aligned} & 375.3 \times \left[\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{\left(k + \frac{i-k}{pg+bi} \times bi\right)}} \right] \quad (1) \\ &= 375.3 \left[\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k} \times \sqrt{\left(1 + \frac{i-k}{pg+bi} \times \frac{bi}{k}\right)}} \right] \\ &= n - \frac{n}{\sqrt{\left(1 + \frac{i-k}{pg+bi} \times \frac{bi}{k}\right)}} \\ &= n - \frac{n}{1 + \frac{i-k}{pg+bi} \times \frac{bi}{2k}} \end{aligned}$$

à peu près

$$= \frac{bin \times (inn - 140850)}{281700 pg + bi \times (inn + 140850)}$$

en substituant pour k sa valeur. Cette correction est négative et doit se retrancher à chaque fois de la valeur précédente de n , les corrections de p et de g étant telles qu'elles sont déterminées dans l'article 23, et toutes deux additives.

26. Avant d'abandonner notre formule, il est à propos d'examiner

(1) La correction de k se fait, à chaque coup, en y ajoutant la quantité $\frac{i-k}{pg+bi} \times bi$; de sorte que, d'un coup à l'autre, k devient $k + \frac{i-k}{pg+bi} \times bi$. Comme $n = \frac{375.3}{\sqrt{k}}$ il s'ensuit que, d'un coup à l'autre, n devient $\frac{375.3}{\sqrt{\left(k + \frac{i-k}{pg+bi} \times bi\right)}}$, et la différence des deux états successifs de n , d'un coup à l'autre, est

$$\frac{375.3}{\sqrt{k}} - \frac{375.3}{\sqrt{\left(k + \frac{i-k}{pg+bi} \times bi\right)}}$$

ou

$$375.3 \times \left[\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{\left(k + \frac{i-k}{pg+bi} \times bi\right)}} \right].$$

Si le centre d'oscillation s'éloigne de l'axe, le nombre n d'oscillations dans un temps donné diminue; d'où il suit que tandis qu'on augmente k de la quantité $\frac{i-k}{pg+bi} \times bi$, il faut au contraire diminuer n de la quantité $375.3 \left[\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{\left(k + \frac{i-k}{pg+bi} \times bi\right)}} \right]$.

trois ou quatre circonstances qui peuvent paroître causer quelque erreur dans la vitesse qu'elle donne : ce sont le frottement de l'axe, la résistance que l'air oppose au mouvement du pendule, le temps que le boulet emploie à pénétrer dans le bois, et la résistance qu'il oppose au boulet pendant son passage du canon au pendule.

Quant à la première, savoir le frottement des tourillons de l'axe de rotation, on peut observer que l'effet qu'il peut produire ne peut jamais être assez considérable pour entrer en ligne de compte dans nos expériences. En effet, indépendamment de ce qu'on a pris soin de diminuer ce frottement autant qu'il a été possible, l'effet de ce qui peut en rester se trouve à peu près compensé par le retardement qu'il cause dans le mouvement du pendule, et la diminution du nombre n d'oscillations par minute : de sorte que la corde c de l'arc d'oscillation, et le nombre n de ces oscillations recevant tous deux à peu près le même degré de diminution de la même cause, et c se trouvant multiplicateur dans la formule pendant que n est diviseur, il est évident que le frottement agit d'une manière opposée dans les deux cas, et que la différence de ces deux effets pourroit seule causer quelque erreur dans le résultat de la formule, erreur qui, comme on voit, se réduit à rien ou à peu près.

27. La seconde cause apparente d'erreur est la résistance que l'air oppose au mouvement du pendule. Cette résistance empêche le pendule de décrire un arc aussi étendu qu'elle le feroit, si elle n'existoit pas; la corde mesurée est plus petite qu'elle ne devrait être réellement, et conséquemment la vitesse du boulet, calculée d'après cette corde, doit être moindre que n'est réellement cette vitesse au moment où le boulet frappe le pendule; mais le pendule étant fort pesant et son mouvement très-lent, la résistance que l'air lui oppose ne peut être qu'infiniment petite.

Nota. « (Pour ne point éloigner trop long-temps l'attention du lecteur » de l'objet principal, nous renvoyons à la fin de l'ouvrage des calculs » par lesquels notre auteur prouve que la diminution que la corde peut » éprouver par la résistance de l'air n'est que d'environ $\frac{1}{4000}$ de cette corde, » ce qui, lorsque la vitesse du boulet seroit de 2000 pieds, donneroit à » peu près un demi-pied d'erreur. On trouvera ces calculs dans la note » A.) »

Et encore (continue ici M. Hutton) peut-on supposer que cet effet, tout petit qu'il est, est compensé par la manière de déterminer le nombre d'oscillations faites par le pendule en une seconde. Ce nombre et la corde de l'arc décrit sont tous deux diminués par la résistance de l'air; mais l'une de ces quantités étant multiplicateur dans la formule de la vitesse, pendant que l'autre est diviseur, il y a ici la même compensation que nous avons trouvée par rapport au frottement des tourillons de l'axe. Ces deux effets peuvent donc très-bien se négliger, comme étant insensibles dans tous les cas.

28. La troisième cause apparente d'erreur dans notre formule est le temps que le boulet emploie à communiquer son mouvement au pendule. Nous sommes partis du principe que cette communication se faisoit en un instant, ce qui n'est pas tout-à-fait exact; elle se fait pendant tout le temps que le boulet emploie à pénétrer dans le bois. Ce temps peut à peine s'élever jusqu'à $\frac{1}{550}$ de seconde, et peut par conséquent fort bien se négliger.

Nota. « (Pour les mêmes raisons dont nous avons parlé tout à l'heure, » nous renvoyons encore à la fin de l'ouvrage à la note (B), des calculs » par lesquels M. Hutton prouve que, dans une des expériences dont il » sera rendu compte, un boulet lancé avec une vitesse de 1500 pieds par » seconde, ayant pénétré de 14 pouces dans un bloc de bois d'orme bien » sec et bien sain, n'a employé pour cela que $\frac{1}{643}$ de seconde. On trou- » vera aussi dans ces calculs la démonstration que la vitesse que le pen- » dule reçoit du boulet est la même, à quelque profondeur que le boulet » pénètre dans le bois, et ne diffère en rien de celle qu'il recevrait si le » boulet ne pénétrait pas du tout : de sorte que cette vitesse est absolu- » ment la même, soit qu'on la suppose communiquée en un instant in- » divisible, ou dans un petit espace de temps.) »

Nous pouvons conclure de tout cela, dit M. Hutton, que le temps de l'enfoncement du boulet n'apporte aucun changement au résultat de la formule de vitesse que nous avons trouvée; et comme nous avons vu que le frottement des tourillons de l'axe de rotation, et la résistance de l'air au mouvement du pendule, ne peuvent causer aucune erreur sensible, nous pouvons croire, sans craindre d'erreur, que notre formule donne la vraie vitesse avec laquelle le boulet frappe le pendule.

29. Mais ce n'est pas la vitesse avec laquelle le boulet sort du canon.

Celle-ci doit être plus grande que l'autre, à cause de la résistance que l'air oppose au boulet pendant son passage de la bouche du canon au pendule. Quoique ce passage soit fort court, et que le fluide élastique de la poudre poursuive et presse encore le boulet à quelque distance de la bouche de la pièce, et que par-là il contrebalance jusqu'à un certain point la résistance de l'air, il est bon cependant d'examiner l'effet de cette résistance. Il est probable qu'elle causera une différence entre la vitesse du boulet, calculée par l'oscillation du pendule et par celle du canon; et cette différence peut être un assez bon moyen de calculer la résistance de l'air, particulièrement si le canon est placé à une distance considérable du pendule. L'oscillation du canon fera connaître la vitesse avec laquelle le boulet part, et celle du pendule la vitesse avec laquelle le boulet arrive à lui.

30. Pour trouver la résistance que l'air oppose au boulet dans tous les cas, nous observerons d'abord que la résistance qu'éprouve un plan qui se meut perpendiculairement à sa surface, dans un fluide en repos, est égale au poids d'une colonne de fluide dont la hauteur seroit égale à celle d'où un corps grave devoit tomber, pour acquérir, par la pesanteur, la vitesse avec laquelle le plan se meut dans le fluide, et dont la base seroit égale au plan. De sorte que appelant a la surface du plan, v sa vitesse, n la pesanteur spécifique du fluide, et h étant $= 16.09$ pieds; la hauteur due à la vitesse v étant $\frac{vv}{4h}$, la résistance totale m sera $= \frac{anvv}{4h}$.

Appelons D le diamètre du boulet, supposant $K = 0.7854$, nous aurons $a = KD^2$ pour la surface du grand cercle du boulet, et conséquemment $m = \frac{KnD^2v^2}{4h}$ sera la force retardatrice qui agiroit sur la surface du grand cercle du boulet; mais la résistance que le boulet éprouve n'est que moitié de celle qu'éprouveroit son grand cercle : cette résistance ou la force retardatrice qui agit sur le boulet n'est donc que $= \frac{KnD^2v^2}{8h}$, et si b exprime le poids du boulet, la force retardatrice simple sera $= \frac{KnD^2v^2}{8hb}$, que nous appellerons f .

La solidité du boulet $= \frac{2}{3} KD^3$; appelons N sa densité ou pesanteur spécifique, son poids $b = \frac{2}{3} KD^3N$, conséquemment la force retardatrice, que nous avons appelée f ou $\frac{m}{b} = \frac{KnD^2v^2}{8h} \times \frac{3}{2KD^3N} = \frac{3}{16} \frac{nv^2}{hDN}$.

Mais

Mais par les lois de la mécanique $v dv = 2 h f dx = - \frac{3 n v^2}{8 D N} dx$ (1)
ou $\frac{dv}{v} = - \frac{3 n}{8 D N} dx = - e dx$, x étant l'espace parcouru, sup-
posant $e = \frac{3 n}{8 D N}$ et donnant le signe négatif, parce que la vitesse
diminue à mesure que l'espace augmente; intégrant, on aura

$$\log V - \log v = \log \frac{V}{v} = ex,$$

expression dans laquelle V représente la vitesse primitive ou initiale de
projection. Appelant A le nombre 2.718281828... etc, dont le logarithme
hyperbolique est 1, nous aurons

$$\frac{V}{v} = A^{ex}, \text{ d'où } v = \frac{V}{A^{ex}} = VA^{-ex},$$

de sorte que la vitesse primitive ou initiale est à celle que conserve
le boulet, après avoir parcouru l'espace x , comme $A^{ex} : 1$, et la vitesse
perdue par la résistance du milieu est $(A^{ex} - 1) v$ ou $\frac{A^{ex} - 1}{A^{ex}} V$.

31. Faisons une application de ces principes à nos boulets, dont

(1) On vient de trouver la force retardatrice simple qui agit sur le boulet, qu'on a
nommée $f = \frac{3 n v^2}{16 D h N}$. Il faut observer que, dans cette expression, n est la *pesanteur*
spécifique du fluide, ou le *poids* de l'unité de volume du fluide: ainsi la quantité n
renferme l'expression de la pesanteur qu'on peut représenter par $2 h$; vitesse que la
pesanteur engendre en une seconde.

N , au contraire, ne doit être réellement que la *densité*, et non pas la pesanteur
spécifique du boulet; car b ne devoit représenter que la *masse*, et non pas le poids
du boulet, lorsque pour avoir la force retardatrice simple on a divisé par b la force
retardatrice absolue $\frac{K n D^2 v^2}{8 h}$ pour avoir $\frac{K n D^2 v^2}{8 h b}$; on a $b = \frac{2}{3} K D^3 N$, N n'est
donc qu'une densité qui, multipliant un volume, produit une masse.

Si on veut aussi représenter par n la densité seulement du fluide, sa pesanteur spéci-
fique sera $2 h n$, et l'expression de la force retardatrice simple sera $\frac{2 h K n D^2 v^2}{8 h b}$; mettant
pour b sa valeur $\frac{2}{3} K D^3 N$, on aura

$$\frac{2 h K n D^2 v^2}{8 h} \times \frac{3}{2 K D^3 N} = \frac{3 n v^2}{8 D N}$$

Substituant cette quantité dans la formule du mouvement varié $v dv = - p de$,
(Bezout, III^e vol., art. 183) on trouve $v dv = - \frac{3 n v^2}{8 D N} dx$, comme M. Hutton l'a
trouvé.

le poids moyen étoit $16 \frac{1}{4}$ onces, et le diamètre de 1.96 pouces. La solidité de ce boulet est $(1.96)^3 \times 0.5236$, et comme un pied cube ou 1728 pouces cubes d'eau pèsent 1000 onces, la pesanteur spécifique du boulet sera $\frac{1728 \times 16 \frac{1}{4}}{1000 \times (1.96)^3 \times 0.5236} = 7.344$: c'est la quantité N . Elle est avec raison un peu moindre que la pesanteur spécifique ordinaire de la fonte de fer, à cause de la petite bulle d'air qui se trouve dans les boulets de métal fondu. La pesanteur spécifique moyenne de l'air est 0.0012; c'est la valeur de n : on a donc

$$e = \frac{3n}{8DN} = \frac{3 \times 0.0012 \times 12}{8 \times 1.96 \times 7.344} = \frac{1}{2666}.$$

Maintenant la distance ordinaire de la face du pendule aux tourillons des pièces étoit de $35 \frac{1}{2}$ pieds, et la distance de la bouche des pièces au même pendule étoit de $34 \frac{1}{4}$ pieds pour le n° 1, 34 pour le n° 2, 33 pour le n° 3, et $31 \frac{1}{2}$ pour le n° 4. Mais comme le fluide élastique poursuit le boulet et le presse quelques pieds après qu'il est hors du canon, et contrebalance la résistance de l'air pendant un espace que l'on ne peut point déterminer; nous supposerons que 32 pieds sont l'espace commun pour toutes les pièces que le boulet parcourt avant d'atteindre le pendule. Nous mettrons donc 32 pour x , et nous aurons

$$ex = \frac{16}{1333}.$$

Par conséquent $A^x - 1 = 0.01207 = \frac{1}{83^e}$ à peu près; c'est-à-dire que le boulet, par l'effet de la résistance de l'air, perd, en passant de la pièce au pendule, le 83^e de la vitesse avec laquelle il atteint le pendule, ou le 84^e de sa vitesse initiale; ou bien la vitesse à la bouche du canon est à la vitesse au pendule comme 84 est à 83 : de manière que la plus grande, diminuée de sa 84^e partie, donne la plus petite, et la plus petite, augmentée de sa 83^e partie, donne la plus grande. Mais si, comme Robins croit l'avoir trouvé, la résistance que l'air oppose à des mouvemens aussi prompts que ceux dont il est ici question, est à peu près triple de celle que nous venons de calculer d'après la théorie des fluides parfaits et infiniment comprimés, il arrivera que la vitesse initiale perdra son 28^e, ou la vitesse initiale sera à la vitesse au pendule comme 28 est à 27. C'est ce qui reste à vérifier par nos expériences, ou d'autre manière.

Calcul de la vitesse du boulet d'après le recul du canon.

32. Plusieurs auteurs ont prétendu que l'effet de la poudre enflammée sur le recul du canon est le même, soit qu'il y ait un boulet, ou qu'il n'y en ait pas ; c'est-à-dire que l'excès du recul en tirant à boulet, sur le recul en tirant sans boulet, est exactement ce qui est dû au mouvement imprimé au boulet, et à la résistance que celui-ci oppose. Ils prétendent que cela est prouvé par beaucoup d'expériences. Tout en supposant qu'elles ont été faites avec soin, et que les conclusions qu'on en a tirées étoient justes ; cependant, comme elles n'ont été faites qu'avec de petits projectiles et de petites charges de poudre, on peut encore douter que la même loi s'observe, si on en fait l'application à des boulets et à de fortes charges de poudre, comme nous en avons fait usage dans nos expériences. C'est ce que leur résultat éclaircira. Il ne faudra, pour cela, que comparer la vitesse du boulet calculée d'après cette loi, avec celle calculée d'après l'oscillation du pendule. Si cette loi s'observe réellement, la vitesse du boulet, déduite de l'oscillation du canon, doit excéder celle calculée par l'oscillation du pendule, de tout ce que la vitesse perd par la résistance de l'air entre la bouche du canon et le pendule.

33. Nous allons supposer qu'il est prouvé que l'effet de la charge de poudre sur le recul du canon est toujours le même, soit qu'on tire avec ou sans boulet, et nous allons chercher une formule pour calculer la vitesse du boulet d'après le recul du canon. Il suit du principe que nous venons d'admettre que, si pour une même charge de poudre, on prend la corde de l'arc de recul, en tirant sans boulet, et celle de l'arc de recul, en tirant avec un boulet, et qu'on retranche la première de la seconde, le reste sera la corde due au mouvement imprimé au boulet. C'est une conséquence de la propriété du cercle, que les vitesses des corps qui remontent en décrivant différens arcs d'un même cercle, sont proportionnelles aux cordes de ces arcs.

Appelons donc c la différence des deux cordes, c'est-à-dire que

c = la corde due à la vitesse imprimée au boulet ;

G = le poids du canon de la tige et des ferrures au moyen desquelles il est suspendu ;

b = le poids du boulet ;

g = la distance du centre de gravité de G à l'axe de rotation ;

k = celle de son centre d'oscillation ;

n = le nombre d'oscillations qu'il fait par minute ;

i = la distance de l'axe du canon à celui de rotation ;

r = le rayon de l'arc qui a pour corde c ;

v = la vitesse du boulet ;

V = la vitesse du canon ou de son axe ;

$biiiv$ = la somme des momens du boulet, et $GgkV$ celle des momens du canon : l'action et la réaction devant être égales, on aura

$$biiiv = GgkV$$

mais comme V est la vitesse du point qui est à la distance i , par les propriétés des lignes proportionnelles, on aura $i : k :: V : \frac{kV}{i}$, vitesse du centre d'oscillation ; et comme la vitesse de ce centre est égale à celle qu'il auroit acquise en tombant librement de la hauteur verticale ou du sinus verse de l'arc qu'il a décrit, et parce que

$$2r : c :: c : \frac{cc}{2r} \text{ sinus verse de l'arc qui a pour rayon } r,$$

et que $r : k :: \frac{cc}{2r} : \frac{cc}{2r} \frac{k}{r}$ sinus verse de l'arc qui a pour rayon k ;

ainsi $\sqrt{h} : \sqrt{\frac{cc}{2r}} :: 2h : \frac{c}{r} \sqrt{2hk}$, vitesse du centre d'oscillation déduite de la corde c de l'arc décrit, dans laquelle $h = 16.09$ pieds, vitesse que nous avons trouvée précédemment $= \frac{kV}{i}$, nous aurons donc

$$\frac{kV}{i} = \frac{c}{r} \sqrt{2hk} \text{ ou } kV = \frac{ci}{r} \sqrt{2hk};$$

substituant cette valeur de kV dans la première équation $biiiv = GgkV$, nous aurons

$$biiiv = \frac{Ggci}{r} \times \sqrt{2hk}, \text{ d'où } v = \frac{Ggc}{bir} \sqrt{2hk},$$

substituant pour $\sqrt{2h}$ sa valeur, $v = \frac{5.6727 Ggc}{bir} \sqrt{k}$, formule de la vitesse du boulet, exprimée par la distance du centre d'oscillation et les autres quantités qui entrent dans la question ; formule tout-à-fait semblable à celle que nous avons trouvée pour la même vitesse, par le moyen du pendule (article 22.), mettant seulement G ou le poids du canon, au lieu de $p + b$, qui sont les poids réunis du boulet et du pendule.

Et si au lieu de $\sqrt{k}$ nous substituons sa valeur $\sqrt{\left(\frac{11737.5 \text{ pieds.}}{nn}\right)}$;

ou $\frac{108.3398 \text{ pieds.}}{n}$, comme nous avons fait dans l'article 24, nous aurons

$$v = 614.58 \frac{Ggc}{birn} \text{ ou } = \frac{59000}{96} \times \frac{Ggc}{birn},$$

formule de la vitesse du boulet exprimée par le nombre d'oscillations que le canon fait par minute, et les autres quantités qui entrent dans la question.

34. Observons en outre que comme les quantités G, g, b, i, r, n , 36, restent ordinairement les mêmes, les vitesses seront entr'elles comme les cordes. De sorte que, si nous supposons une corde donnée $= 1$, et que nous appellions u la vitesse qui lui correspond, nous aurons $v = cu$; ou la vitesse correspondante à toute autre corde c se trouvera, en multipliant cette corde c par la vitesse u répondante à la corde 1.

Or, dans les expériences qui vont suivre, les valeurs ordinaires de ces quantités sont :

$$G = 917$$

$$g = 80.47$$

$$b = 1.047, \text{ un peu plus ou un peu moins.}$$

$$i = 89.15$$

$$r = 1000$$

$$n = 40.0 \text{ pour le canon n° 2, } \left(\frac{1}{400} \text{ de plus pour} \right.$$

le n° 1, $\frac{1}{400}$ de moins pour le n° 3, et $\frac{1}{200}$ de moins pour le n° 4.)

Mettant ces valeurs dans la formule, au lieu des quantités qui les représentent, elle devient $v = 12.15 c$. De sorte que le nombre 12.15, multiplié par la différence de deux cordes décrites, avec quelque charge que ce soit, l'une avec boulet et l'autre sans boulet, donnera la vitesse du boulet, lorsque les données seront telles que nous venons de les énoncer; et si ces données varient, il ne faut qu'augmenter ou diminuer le produit dans la même proportion, selon qu'elles appartiennent au numérateur ou au dénominateur dans la formule générale $\frac{59000}{96} \times \frac{Ggc}{birn}$. Lorsqu'il arrivera de pareilles variations, il en sera fait mention chaque jour d'expériences. Lorsque les quantités G, g, i, n seules, sont telles qu'on les a indiquées ci-dessus, la même formule deviendra $12718 \times \frac{c}{br}$.

Il faut observer que tout cela ne s'applique qu'au canon n° 2 seul; ces produits changent pour le n° 1, en en retranchant le 400^e; pour le n° 3, en ajoutant le même 400^e, et pour le n° 4, en ajoutant le 200^e.