

Leur produit est 4, 7022077. Comme la caractéristique est *moins trois*, le premier chiffre significatif doit être précédée de trois zéros. On aura donc la puissance demandée égale à 0, 0047022077.

CHAPITRE DIX-SEPTIEME.

LES LOGARITHMES.

365. Le logarithme d'un nombre est l'exposant auquel il faudroit élever *dix*, pour qu'il en résultat une puissance, égale au nombre proposé. Ainsi, quand on parle du logarithme d'un nombre, ce nombre est toujours regardé comme une certaine puissance de *dix*, dont ce logarithme est l'exposant. Le logarithme est donc à l'égard du nombre, ce que l'exposant est à l'égard de la puissance.

366. Le logarithme de l'unité est donc *zéro*. Les logarithmes de 10, 100, 1000, 10000 etc. sont 1, 2, 3, 4 etc. d'après le nombre des zéros qui suivent l'unité. Les logarithmes des fractions décimales *un dixieme* ou 0, 1; *un centieme* ou 0, 01; *un millieme* ou 0, 001; un *dix-millieme* ou 0, 0001 etc. sont *moins 1*, *moins 2*, *moins 3*, *moins 4* etc. d'après le nombre des zéros, qui précèdent l'unité.

367. Le logarithme de tout nombre qui n'est pas précisément une certaine puissance de *dix*, est composé d'une caractéristique, et de décimales. Le nombre des décimales est arbitraire. Plus on aura pris de décimales,
et

et plus on approchera de la véritable valeur du logarithme, à laquelle cependant on n'atteindra jamais, parce que sa valeur rigoureuse est proprement une suite infinie, que l'on ne peut réduire, ni à la forme fractionnaire, ni à la forme radicale. Le nombre des décimales qu'on en prend, dépend ici, comme partout ailleurs, de la précision qu'on veut mettre dans son calcul. Dans les problèmes ordinaires de l'arithmétique et de la géométrie on peut très bien se contenter de quatre, ou tout au plus de cinq décimales. Dans les problèmes de haute analyse, de mécanique ou d'astronomie, on en met jusqu'à six, sept, neuf, douze et plus encore.

368. Tant que le nombre est plus grand que l'unité, la caractéristique de son logarithme est positive, de même que ses décimales. Elle est égale alors au nombre des chiffres qui précèdent la virgule, moins un; et si c'est un nombre entier, la caractéristique du logarithme est égale au nombre total des chiffres dont il est composé, moins un.

369. Si le nombre est moindre que l'unité, il a pour logarithme une quantité entièrement négative; mais qu'il est toujours possible de transformer de manière, que ses décimales soient positives, et que le signe *moins* ne regarde que la caractéristique. On otera simplement les décimales de *un*, suivi d'un nombre suffisant de zéros; et en même tems on augmentera de *un* la caractéristique du logarithme. Faisant précéder alors cette nouvelle caractéristique du signe *moins*, les décimales pourront être prises positivement, sans que la
valeur

valeur du logarithme ait été changée. Aussi, toutes les fois que dans la suite de cet ouvrage, on verra un logarithme précédé du signe *moins*, on n'en prendra pas moins les décimales positivement, ce signe étant réservé pour la caractéristique seule, qui est égale alors au nombre des zéros qui précèdent le premier chiffre significatif, y compris celui qui occupe la place de la virgule.

370. Deux problemes, également importants, se présentent ici. L'un : *le logarithme étant donné, trouver le nombre*. L'autre : *le nombre étant donné, trouver son logarithme*. Le premier est identiquement le même avec celui de trouver la puissance de *dix*, qui répond à un exposant donné : il a été résolu dans le chapitre précédent. L'autre probleme est l'inverse du premier ; pour le résoudre, nous n'aurons qu'à suivre une marche rétrograde ; aussi la solution très générale que nous en allons donner, est en meme tems si simple qu'elle n'aura guères besoin de démonstration.

371. Donc, un nombre quelconque étant proposé dont on demande le logarithme, on transposera d'abord la virgule de ce nombre de maniere, qu'il n'ait plus à sa gauche qu'un seul chiffre significatif. Après l'avoir ainsi préparé, vous consulterez la *premiere section* de la table générale des puissances de *dix*, que nous avons donnée dans le chapitre précédent. Là, vous prendrez la puissance de *dix* qui lui est immédiatement inférieure. L'exposant de cette puissance sera la *premiere decimale* de votre logarithme.

372. Divisez le nombre proposé par cette puissance, et cherchez dans la *seconde section* de la même table, la puissance de *dix* qui se trouve immédiatement inférieure au quotient que vous aurez obtenu. L'exposant de cette puissance sera la *seconde décimale* du logarithme.

373. Divisez de nouveau le quotient précédent par cette puissance, et cherchez dans la *troisième section* de la table, la puissance de *dix* immédiatement inférieure, au quotient que cette division vous aura donné. L'exposant de cette puissance sera la *troisième décimale* du logarithme.

374. Divisez encore le dernier quotient par cette puissance, et cherchez dans la *quatrième section* de la table, la puissance de *dix*, immédiatement inférieure au quotient qui sera résultat de cette division. L'exposant de cette puissance sera la *quatrième décimale* du logarithme.

375. On trouvera de cette même manière autant de décimales qu'on voudra. La règle que nous venons d'enseigner est à l'égard de la division, ce que la division est à l'égard de la soustraction; et comme elle est absolument l'inverse de l'opération, enseignée dans le chapitre précédent, nous ne croyons pas qu'elle ait besoin d'être démontrée.

Exemple. On demande le logarithme de 3 à huit décimales.

La puissance de *dix*, immédiatement inférieure à *trois* dans la première section de la table, est 2, 51188643. L'exposant 4 qui lui appartient, est la *première décimale*.

Divi-

Divisant 3 par 2, 51188643 on obtient le quotient 1, 19432151; la puissance qui en approche le plus dans la seconde section, est 1, 17489755. L'exposant de cette puissance est 7; *seconde décimale*.

Divisant 1, 19432151 par 1, 17489755 on a le quotient 1, 01653247, la puissance qui en approche le plus dans la troisième section, est 1, 01624869. L'exposant de cette puissance est 7; *troisième décimale*.

Divisant 1, 01653247 par 1, 01624869, on a le quotient 1, 00027924; la puissance qui en approche le plus dans la quatrième section, est 1, 000230285. L'exposant de cette puissance est 1; *quatrième décimale*.

Divisant 1, 00027924 par 1, 000230285 on a le quotient 1, 00004894; la puissance qui en approche le plus dans la cinquième section, est 1, 00004605. L'exposant de cette puissance est 2; *cinquième décimale*.

Divisant 1, 00004894 par 1, 00004605 on a le quotient 1, 00000289; la puissance qui en approche le plus dans la sixième section, est 1, 00000230. L'exposant de cette puissance est 1; *sixième décimale*.

Divisant 1, 00000289 par 1, 00000230 on a le quotient 1, 00000059; la puissance qui en approche le plus dans la septième section, est 1, 00000046. L'exposant de cette puissance est 2; *septième décimale*.

Divisant 1, 00000059 par 1, 00000046 on a pour quotient 1, 00000013; la puissance qui en approche le plus dans la huitième section est 1, 00000012. L'exposant de cette puissance est 5; *huitième décimale*.

Le logarithme de 3 est donc 0, 47712125; précisément tel qu'il se trouve dans les tables. Et comme dans ce cas particulier, le nombre proposé a été un entier d'un seul chiffre, il n'y aura pas de changement à faire pour la caractéristique.

376. Voilà donc le logarithme d'un nombre, calculé jusqu'à huit décimales, moyennant huit divisions, dont les cinq dernières au moins ont été très faciles. Mais ce n'est pas tout. Ces cinq divisions peuvent très bien être remplacées par une seule.

377. En examinant avec attention la table des puissances fractionnaires de dix, on verra du premier coup d'œil, que plus l'exposant devient petit, plus aussi la puissance de dix qui y répond, se rapproche de l'unité. Elle l'excède toujours, mais elle l'excède d'une quantité qui va toujours en diminuant, et qui, l'exposant étant une fois réduit à des millièmes, à des dix-millièmes, n'est plus elle-même qu'un certain nombre de millièmes et de dix-millièmes. Cela est naturel. On sait que la puissance d'un nombre quelconque à exposant *zéro* est égale à l'unité; on pouvoit donc prévoir, que si ce même nombre étoit élevé à une fraction, qui sans être absolument zéro, est au moins très petite, la puissance qui en résulte, sans être entièrement réduite à l'unité, ne pourra non plus l'excéder que d'une quantité fort petite, d'après la grandeur de l'exposant auquel cette base aura été élevée.

378. Cela étant, comparons ensemble, d'un côté les exposants au-dessous d'un millième, auxquels le nombre *dix* a été élevé successivement; de l'autre, les petites différences fractionnaires qui indiquent, de combien les puissances successives qui en résultent, excèdent l'unité. Nous aurons la table suivante, qui est immédiatement extraite de celle de 344.

O

Exposant

<i>Exposant.</i>	<i>Excès de la puissance sur l'unité.</i>
<i>Un dix-millieme</i>	<i>0,000230 285021</i>
<i>Un cent-millieme</i>	<i>0,000023 026116</i>
<i>Un millionieme</i>	<i>0,000002 302589</i>
<i>Un dix-millionieme</i>	<i>0,000000 230259</i>
<i>Un cent-millionieme</i>	<i>0,000000 023026</i>
<i>Un billionieme</i>	<i>0,000000 002303</i>

379. Cette table nous apprend, que plus l'exposant de la puissance de dix devient petit, plus aussi il se trouvera dans un rapport constant avec l'excès de la puissance elle-meme sur l'unité. Ce rapport est celui de 1 à un nombre égal à *deux* et trois dixiemes à peu près; et dont les six premiers chiffres sont très certainement 2, 30259. Pour connoître ce nombre plus exactement, il faudroit employer des secours que la haute analyse est seule en état de nous fournir; alors on le trouveroit égal à 2, 302585092994.

380. Ainsi donc, lorsque dans la suite il sera question d'élever *dix* à un exposant qui déjà se trouve au-dessous d'un millieme, et qui approche d'un dix-millieme, on multipliera simplement cet exposant par le nombre constant 2, 302585; de cette multiplication il résultera une fraction décimale fort petite, dans laquelle la place des unités, celle des dixiemes, celle des centiemes, et peut-être celle des milliemes, seront occupées par des zéros. Alors, mettant 1 à la place des unités, il en résultera la puissance de *dix* que l'on cherchoit, exprimée par 1, qui sera suivi d'abord de quelques zéros, ensuite de plusieurs chiffres significatifs; et si l'on veut se borner

à

Cherchons d'après ce principe, la puissance de dix à exposant 0,0007. Multipliant 2,302585 par 0,0007 et mettant 1 à la place des unités, il en résulte 1,0016118. Il faut se borner à quatre chiffres significatifs, ce qui donne 1,001612 pour la puissance en question; et telle est aussi sa valeur rigoureuse, conformément à la table générale des puissances de dix.

Voyons encore la puissance de dix à exposant 0,00006. Multipliant 2,302585 par 0,00006 et mettant 1 à la place des unités, on aura, en se bornant à cinq chiffres significatifs, la puissance demandée égale à 1,00013816. Telle est aussi la valeur rigoureuse de cette puissance, d'après la table générale.

381. Réciproquement, étant proposé un nombre un peu plus grand que l'unité, mais dont l'excès sur elle est au-dessous d'un millièmi ou d'un dix-millièmi; si, considérant ce nombre comme une certaine puissance de dix, on demande l'exposant de cette puissance; ou, ce qui est absolument la même chose, si l'on demande le logarithme de ce nombre; on y supprimera simplement l'unité, et l'on divisera les décimales qui restent alors, par 2, 302585. Le quotient, qui ne pourra être qu'une très petite fraction, précédée de plusieurs zéros, sera le logarithme demandé. On pourra en prendre autant de chiffres significatifs, qu'il y a de zéros, y compris celui qui occupe la place de la virgule, plus

O 2

un

un. Souvent on pourra en prendre encore un de plus.

On demande le logarithme de $1,000184224$. La valeur rigoureuse de ce logarithme doit être 8 cent-millièmes, d'après la table générale. Divisant $0,000184224$ par $2,302585$ on obtient $0,000080007$ qui ne commence à en différer qu'à la neuvième décimale.

382. Il nous reste à faire l'application de ce théorème, pour réduire à la moitié, les opérations enseignées en 375, ayant pour but de trouver le logarithme d'un nombre proposé. Supposons qu'ayant trouvé les quatre premières décimales, moyennant trois divisions successives, dont la dernière nous ait procuré la connoissance du quotient, à l'aide duquel il s'agit de trouver ce qui reste du logarithme. Il est évident que tout ce reste ne sera simplement que le logarithme de ce même quotient; et comme ce quotient ne diffère plus de l'unité que de quelques dix-millièmes, on en trouvera le logarithme d'après la règle précédente, en divisant ses décimales par $2,302585$. Joignant les chiffres qui résultent de cette division, à ceux qu'on a déjà trouvés, on aura le logarithme demandé à sept ou huit décimales de près.

383. On aura un résultat encore plus exact, en divisant ce quotient par la puissance de *dix* immédiatement inférieure, qu'on aura trouvée dans la quatrième section de la table, après en avoir ôté l'unité de part et d'autre, et multiplié le reste qu'aura laissé le quotient, par l'exposant de la puissance.

Exemple I. Ayant trouvé les trois premiers chiffres du logarithme de *trois*, savoir $0,477$; on a
eu

en le quotient $1,00027924$. La puissance de *dix* immédiatement inférieure dans la quatrième section, est $1,000230285$. Divisant 279240 par 230285 , on trouve 12125 . Le logarithme entier est donc $0,47712125$; et exactement ce que les cinq dernières divisions auroient donné aussi.

Exemple II. *Cherchons le logarithme de 73 à huit décimales.* La puissance de *dix*, immédiatement inférieure à $7,3$ dans la première section de la table, est $6,30957344$. L'exposant de cette puissance est 8; *première décimale*.

Divisant $7,3$ par $6,30957344$ on a pour quotient $1,15697203$. La puissance de *dix*, immédiatement inférieure dans la seconde section est $1,14815362$. L'exposant de cette puissance est 6; *seconde décimale*.

Divisant $1,15697203$ par $1,14815362$ on a pour quotient $1,00768051$. La puissance de *dix*, immédiatement inférieure dans la troisième section de la table, est $1,00693167$. L'exposant de cette puissance est 3; *troisième décimale*.

Divisant $1,00768051$ par $1,00693167$ on a pour quotient $1,00074369$. La puissance de *dix*, immédiatement inférieure dans la quatrième section, est $1,000691014$: l'exposant de cette puissance est 3. Multipliant 743690 par 3, et divisant le produit par 691014 , on trouve les chiffres 32286 ; lesquels, joints à ceux qu'on a déjà trouvés, donnent $1,86332286$ pour le logarithme de 73 ; en observant que la caractéristique en doit être *un*, parce que le nombre est entre 10 et 100.

Exemple III. *On demande le logarithme de 2,718281828 à neuf décimales; ce qui exigera une division de plus.*

La puissance immédiatement inférieure dans la première section est $2,511886432$. Son exposant est 4; *première décimale*.

La division de $2,718281828$ par $2,511886432$ donne $1,082167487$. La puissance immédiatement infé-

inférieure dans la seconde section est $1,071519305$. Elle a pour exposant 3; *seconde décimale*.

La division de $1,082167487$ par $1,071519305$ donne pour quotient $1,009957462$. La puissance immédiatement inférieure dans la troisième section est $1,009252886$. Elle a pour exposant 4; *troisième décimale*.

La division de $1,009957462$ par $1,009252886$ donne pour quotient $1,000678300$. La puissance immédiatement inférieure dans la quatrième section est $1,000460623$. Elle a pour exposant 2; *quatrième décimale*.

La division de $1,000678300$ par $1,000460623$ donne pour quotient $1,000217577$. La puissance immédiatement inférieure dans la cinquième section est $1,000207254$; son exposant est 9.

Alors, multipliant 217577 par 9, et divisant le produit par 207254 , on trouve les chiffres 94482 . Le logarithme demandé est donc $0,434294482$.

Le nombre proposé $2,718281828$ joue un très grand rôle dans la haute Analyse: il est la base du système des logarithmes naturels, ce que nous verrons en son lieu. Il n'est pas moins important de connaître son logarithme $0,434294482$. Il faut observer à l'égard de celui-ci, qu'il résulte aussi en divisant 1 par le nombre $2,30258509$ dont il a été parlé en 379.

Exemple IV. *Le diamètre étant à la circonférence, comme l'unité est au nombre 3,141592654 on demande le logarithme de ce nombre, à neuf décimales.*

La puissance de dix immédiatement inférieure au nombre en question dans la première section de la table est $2,511886432$. L'exposant de cette puissance est 4; *première décimale*.

Divisant $3,141592654$ par $2,511886432$ on trouve le quotient $1,250690562$. La puissance immédiatement inférieure à ce quotient dans la seconde section est $1,230268771$. L'exposant en est 9; *seconde décimale*.

Divi-

Divisant $1,250690562$ par $1,230268771$ on a le quotient $1,016599455$. La puissance immédiatement inférieure à ce quotient dans la troisième section est $1,016248693$. L'exposant en est 7; *troisième décimale*.

Divisant $1,016599455$ par $1,016248693$ on a pour quotient $1,000345154$. La puissance immédiatement inférieure dans la quatrième section est $1,000230285$. L'exposant en est 1; *quatrième décimale*.

Divisant $1,000345154$ par $1,000230285$ on a le quotient $1,000114843$. La puissance immédiatement inférieure dans la cinquième est $1,000092108$. L'exposant de cette dernière est 4.

Multipliant 114843 par 4 et divisant le produit par 92108 , on trouve les chiffres 49873 . Le logarithme demandé est donc $0,497149873$.

Exemple V. On demande le logarithme du nombre 583573 , à sept décimales.

La puissance de dix immédiatement inférieure à $5,83573$ est $5,01187234$. L'exposant de cette puissance est 7; *première décimale*.

Divisant $5,83573$ par $5,01187234$ on trouve le quotient $1,16438121$ qui a pour puissance immédiatement inférieure dans la seconde section $1,14815362$. L'exposant en est 6; *seconde décimale*.

Divisant $1,16438121$ par $1,14815362$ on a le quotient $1,01413364$ qui a pour puissance immédiatement inférieure dans la troisième section $1,01391139$. L'exposant en est 6; *troisième décimale*.

Divisant $1,01413364$ par $1,01391139$ on a le quotient $1,00021920$. Ce nombre est plus petit que la plus basse puissance de la quatrième section; on aura donc 0 pour *quatrième décimale*.

Recherchant ce même quotient parmi les puissances de la cinquième section, il aura $1,00020725$ immédiatement au-dessous de lui. L'exposant de
cette

cette puissance est 9. Donc, multipliant 21920 par 9; et divisant le produit par 20725, on aura les chiffres 95190, lesquels avec ceux déjà trouvés, font connoître le logarithme de 5, 83573 égal à 0, 766095190. Celui du nombre proposé sera donc 5, 766095190. Et quoiqu'on n'ait demandé que sept décimales de ce logarithme, cependant il se trouve exact jusqu'à la neuvième.

384. Le nombre des divisions qu'il faut faire pour trouver le logarithme d'un nombre proposé, dépend donc du nombre des décimales que ce logarithme doit avoir, c'est-à-dire, du degré de précision qu'on veut y mettre. En général, le nombre des divisions sera égal, *tout au plus* à la moitié de celui des décimales. Si on veut se borner à cinq décimales, toute l'opération se réduit à trois petites divisions comme on voit par les exemples suivans.

Exemple I. *On demande à cinq décimales le logarithme du nombre 0, 0192376.*

La puissance immédiatement inférieure à 1, 92376 dans la première section est 1, 584893. Son exposant 2 sera la *première décimale*.

Divisant 1, 92376 par 1, 584893 on a le quotient 1, 213811 qui a pour puissance immédiatement inférieure dans la seconde section 1, 202264. Son exposant 8 sera la *seconde décimale*.

Divisant 1, 213811 par 1, 202264 on a le quotient 1, 009604 qui a pour puissance immédiatement inférieure dans la troisième section 1, 009253. L'exposant de celle-ci est 4.

Multipliant 9604 par 4, et divisant le produit par 9253, on trouve les chiffres 415. Le logarithme de 1, 92376 sera donc 0, 28415; et celui de 0, 0192376 deviendra — 2, 28415.

Exem-

Exemple II. On demande le logarithme de 0, 00097317 à cinq décimales.

La puissance de dix, immédiatement inférieure à 9, 7317 est 7, 943282. Elle a pour exposant 9; première décimale.

Divisant 9, 7317 par 7, 943282 on trouve le quotient 1, 225148 qui a immédiatement au-dessous de lui dans la seconde section 1, 202264. L'exposant de cette puissance est 8; seconde décimale.

Divisant 1, 225148 par 1, 202264 on a le quotient 1, 019034. La puissance immédiatement inférieure dans la troisième section est 1, 018591; son exposant est 8.

Donc, multipliant 19034 par 8, et divisant le produit par 18591, on a les chiffres 819. Le logarithme de 9, 7317 sera donc 0, 98819; et celui de 0, 00097317 deviendra — 4, 98819.

385. Les logarithmes calculés d'après la règle précédente, pèchent toujours un peu par excès, de sorte que pour les réduire à leur juste valeur, il faudroit en ôter une certaine partie correctionnelle, que l'on déterminera d'après la règle suivante : *Prenez les décimales du quotient que votre dernière division aura laissée; ôtez-en les décimales de la puissance de dix qui lui est immédiatement inférieure, et divisez le produit de ces deux nombres par 4, 6.* Restera donc à ôter la partie qui sera résultée de cette division, du logarithme obtenu en vertu de la règle de 383. Et si on veut faire usage de cette dernière règle, on trouvera les huit premières décimales du logarithme de tout nombre proposé, moyennant trois simples divisions, et une petite multiplication.

Exem-

Exemple I. On demande le logarithme de 3, à huit décimales.

La puissance de dix, immédiatement inférieure est 2, 51188645; son exposant 4; *première décimale*.

Divisant 3 par 2, 51188643 on obtient le quotient 1, 19432151; la puissance qui en approche le plus est 1, 17489755; son exposant 7; *seconde décimale*.

Divisant 1, 19432151 par 1, 17489755 on obtient le quotient 1, 01653247; la puissance qui en approche le plus est 1, 01624869; son exposant 7.

Multipliant 1653247 par 7, et divisant le produit 11572729 par 1624869, on trouve les chiffres 712225. Le logarithme demandé est donc 0, 47712225; sauf à la partie soustractionnelle qu'il faudra en oter.

Pour la trouver, on multipliera les décimales 0, 01653247 par l'excès de ces décimales sur celles de la puissance immédiatement inférieure, qui sont 0, 01624869; c'est-à-dire par 0, 00028378; et on divisera le produit par 4, 6. Comme il faut s'attendre à un quotient très petit, et qui sera précédé de plusieurs zéros, on se bornera à multiplier les trois premiers chiffres significatifs des deux facteurs.

Ainsi, multipliant 0, 0165 par 0, 000284 et divisant le produit par 4, 605 ou simplement par 4, 6 on obtient pour partie correctionnelle 0, 00000102. Le logarithme qu'on vient de trouver, sera réduit alors à 0, 47712123; tel est en effet le logarithme de 3. L'erreur n'est que de deux dans la huitième décimale.

Exemple II, On demande, à huit décimales, le logarithme du nombre 2, 718281828; base du système hyperbolique.

La puissance immédiatement inférieure est 2, 511886452; son exposant 4; *première décimale*.

Divi-

Divisant le nombre proposé 2, 718281828 par 2, 511886432 on obtient le quotient 1, 082167487. La puissance immédiatement inférieure est 1, 071519305; son exposant 3; *seconde décimale*.

Divisant 1, 082167487 par 1, 071519305 on obtient le quotient 1, 009937462. La puissance immédiatement inférieure est 1, 009252886; son exposant est 4.

Restera donc à multiplier 9937462 par 4, et à diviser le produit par 9252886. Il en résultera les chiffres 429594; lesquels joints aux deux premiers, donneront 0, 43429594 pour logarithme demandé.

Quant à la partie correctionnelle, otant 0, 009252886 de 0, 009937462 il reste 0, 000684576. Ainsi, multipliant 0, 00994 par 0, 000684 et divisant le produit 0, 0000068 par 4, 6 on a pour quotient 0, 00000148; telle est la partie soustractionnelle.

On aura donc 0, 43429446 pour logarithme demandé. L'erreur en effet n'est que de *deux* dans la *huitième* décimale.

Exemple III. On demande, à huit décimales, le logarithme du nombre 3, 141592654 qui exprime le rapport du diamètre à la circonférence.

La puissance immédiatement inférieure est 2, 511886432; son exposant 4; *première décimale*.

Divisant 3, 141592654 par 2, 511886432 on trouve le quotient 1, 250690562. La puissance immédiatement inférieure est 1, 230268771; son exposant 9; *seconde décimale*.

Divisant 1, 250690562 par 1, 230268771 on a le quotient 1, 016599455. La puissance de dix immédiatement inférieure est 1, 016248693; son exposant est 7.

Multipliant 16599455 par 7, et divisant le produit 116196185 par 16248693, on aura pour décimales suivantes du logarithme, 715111. Le logarithme demandé sera donc 0, 49715111.

Otant

Otant $0,01624869$ de $0,01659946$ il reste $0,00035076$. Donc, multipliant $0,0166$ par $0,000351$; et divisant le produit $0,0000058266$ par $4,6$ on aura pour quotient $0,00000126$; c'est la partie soustractionnelle.

Elle réduit le logarithme demandé à $0,49714985$. L'erreur n'est encore que de *deux* à la *huitième* décimale.

386. La méthode que nous venons d'enseigner, pour trouver le logarithme de tout nombre proposé, l'emporte infiniment sur toutes celles qui ont été connues jusqu'ici, par la simplicité de ses principes, qui sont ceux de l'arithmétique élémentaire; par la très grande facilité du calcul qu'elle exige; enfin par cette généralité qui la rend également applicable à tous les nombres possibles. Mais l'usage des logarithmes est journalier; et ce seroit se priver entièrement des avantages qu'ils nous présentent, que de vouloir calculer chaque fois le logarithme dont on a besoin. Il faut donc avoir des tables toutes calculées.

387. L'ouvrage que nous recommandons à cet égard préférablement à tous les autres, et qui par les avantages qu'il présente, a mérité d'être généralement répandu dans la République, a pour titre : *Tables portatives de logarithmes, par François Callet; édition stéréotype, gravée, fondue et imprimée par Firmin Didot (1795) an 3*. Il comprend huit cent pages in octavo, grand format.

388. Les 224 premières de ces pages renferment tout ce qui concerne les logarithmes des nombres. On ne sera pas surpris de n'en trouver

trouver que les décimales, sans caractéristique. La caractéristique est donnée par la place qu'occupe la virgule dans le nombre proposé; de sorte que l'inspection seule du nombre fait connoître sur le champ, quelle est la caractéristique de son logarithme.

389. Les cinq premières pages font connoître les logarithmes des nombres depuis *un* jusqu'à *mille deux-cent*. Les logarithmes se trouvent immédiatement à la droite du nombre, à *huit* décimales.

Cette table nous apprend par ex. que

$$\text{Log. } 79 = 1,89762709$$

$$\text{Log. } 83 = 1,91907809$$

$$\text{Log. } 89 = 1,94939001$$

Ajoutant ensemble ces trois logarithmes, on doit avoir celui du produit des trois nombres proposés, qui est 583573. Le logarithme de 583573 sera donc 5,76609519; c'est exactement ce que nous avons trouvé dans le cinquième exemple.

390. Viennent ensuite les logarithmes des nombres depuis 1020 jusqu'à 108000. Ils sont disposés de manière, que chaque page en comprend *six-cent*; d'après la disposition suivante.

391. Etant donné un nombre quelconque composé de *cinq* chiffres (s'il n'en a que quatre, le cinquième pourra toujours être remplacé par un *zéro*) on en cherchera les quatre premiers dans la colonne intitulée N, et en suivant de l'œil la ligne sur laquelle on l'aura trouvé, on la parcourra de gauche à droite, jusqu'à ce qu'on soit dans la colonne au haut de laquelle est écrit le cinquième chiffre du nom-

nombre proposé. Les quatre figures qui sont à la fois dans l'alignement des quatre premiers chiffres du nombre donné, et dans la colonne qui répond au cinquième, exprimeront les quatre dernières décimales du logarithme de ce nombre. Quant aux trois premières, on les trouvera en remontant le long de la marge de la colonne intitulée 0.

On demande le logarithme du nombre 47162 ? On trouvera les quatre premiers chiffres 4716 à la page qui est marquée L. 670 ; et en remontant le long de la colonne intitulée 0, on découvre les trois chiffres 672, ce sont les trois premières décimales. Ensuite, parcourant de la gauche vers la droite la ligne où se trouve 4716 jusqu'à la colonne au haut de laquelle on voit 2, on y trouve les quatre dernières décimales 5922. Ainsi les chiffres 6725922 seront les sept premières décimales du logarithme qu'on demandoit.

392. La dernière colonne de chaque page, intitulée diff. contient de certaines petites tables, moyennant lesquelles on trouve le petit supplément qu'il faut ajouter au logarithme trouvé pour les cinq premiers chiffres, lorsqu'outre ceux-ci, le nombre a encore un sixième, un septième, et quelquefois un huitième chiffre.

393. Le nombre qui se trouve à la tête de chacune de ces petites tables, exprime la différence de chacun des logarithmes qui sont vis-à-vis d'elle, au logarithme immédiatement suivant ; ce qui nous épargne la peine d'en faire chaque fois la soustraction. Les autres petits nombres de la table expriment, dans l'ordre où ils sont placés, le dixième, les deux

deux dixiemes, les trois dixiemes etc. jusqu'aux neuf dixiemes de cette différence.

394. L'usage de cette table est facile. Soit proposé un nombre, consistant en sept chiffres, et ayant sa virgule, je suppose, entre son cinquieme et son sixieme chiffre, de maniere que celui-là en indique les dixiemes, de meme que le dernier les centiemes. On cherchera d'abord le logarithme du nombre entier, qui résulte des cinq premiers chiffres seuls. Restent ensuite les deux derniers, qui indiquent les dixiemes et les centiemes. Il est clair que si on ajoutoit au logarithme qu'on vient de trouver, la différence entiere, telle qu'elle se trouve dans la derniere colonne, il en résulteroit le logarithme du nombre immédiatement suivant, plus grand que le nombre entier dont il s'agit, non pas de dixiemes et de centiemes, mais d'une unité entiere. Il ne faut donc pas ajouter cette différence entiere, mais il faut en ajouter une partie, proportionnelle aux dixiemes et aux centiemes qu'on a, c'est-à-dire, que de cette différence il faut prendre les dixiemes et les centiemes qui sont indiqués par les deux derniers chiffres. Or, ces dixiemes se trouvent toutes calculées dans la table des différences; et pour avoir les centiemes, on n'a qu'à supprimer le dernier chiffre des dixiemes. Ainsi un seul coup d'œil sur la petite table fera voir tout de suite, ce qu'il faut ajouter au logarithme des cinq premiers chiffres. pour tenir compte du sixieme, du septieme et du huitieme, s'il y en a.

Exem-

Exemple I. On demande le logarithme du nombre 23627,86; vis-à-vis du quel on trouve dans les tables la différence 184. Or, voici le calcul.

Pour 23627 entiers . . .	4,3734086
Pour 8 dixiemes . . .	147
Pour 6 centiemes . . .	11
Logarithme de 23627,86 .	4,3734244

Il est évident que pour les 86, il faudra prendre, non la différence entière 184, mais d'abord les 8 dixiemes, ensuite les 6 centiemes de cette différence. La petite table donne pour les uns 147, et 11 pour les autres.

Exemple II. On demande le logarithme de 13,406586. La différence placée vis-à-vis de 13406 est 324. Le logarithme de ce nombre est celui de 13406,586 à la caractéristique de prés.

Or, voici le calcul pour celui de 13406,586.

Pour 13406 entiers . . .	4,1272992
Pour 5 dixiemes . . .	162
Pour 8 centiemes . . .	26
Pour 6 milliemes . . .	2
Logarithme de 13406,586 .	4,1273182.

Il ne restera plus qu'à mettre la véritable caractéristique, on aura 1,1273182 pour le logarithme du nombre proposé.

395. Les dernières quatorze pages de cette grande table comprennent les logarithmes des nombres depuis 100000 jusqu'à 108000, calculés, non à sept, mais à huit décimales. Il est important sans doute dans une infinité de cas, qu'au lieu d'être borné à sept décimales, on puisse encore se procurer la connoissance de la huitieme. Cependant nous ne serions guères avancés, si les nombres seuls, depuis
100000

100000 jusqu'à 108000 jouissoient de cet avantage. Mais ce qu'il y a d'essentiel, c'est qu'en combinant cette dernière partie de la grande table, avec la première, qui comprend les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 1200 aussi jusqu'à huit décimales, on peut acquérir la connoissance de la huitième décimale pour les logarithmes de tous les nombres possibles.

396. Il est clair d'abord qu'en divisant un nombre quelconque par ses deux premiers chiffres, les deux premiers chiffres du quotient qui en résulte, seront toujours 10. Ainsi donc, tant que ces mêmes chiffres seront aussi inférieurs à 108, on voit que pour avoir à huit décimales le logarithme du nombre proposé, on n'aura qu'à ajouter le logarithme de ce quotient, à celui des deux premiers chiffres du nombre proposé, et qu'on trouvera tous les deux, exprimés à huit décimales, l'un au commencement, l'autre vers la fin de la table.

397. Il faut excepter de cette règle les cas où les premiers chiffres des dits quotiens seroient compris entre 108 et 110. Mais alors les trois premiers chiffres du nombre seront nécessairement au-dessous de 110, et à plus forte raison, au-dessous de 120; et on en trouvera encore les logarithmes à huit décimales aux premières pages de la table. Divisant le nombre proposé par ses trois premiers chiffres, on aura un quotient dont les trois premiers chiffres seront toujours inférieurs à 101; ainsi on en trouvera le logarithme parmi les derniers de la table. La somme des deux logarithmes sera celui du nombre proposé.

Exemple I. On demande le logarithme du nombre 754,64308 à huit décimales.

Divisant ce nombre par 75, on a pour quotient 10,0619077. Voici le reste du calcul.

Log. de 75 1,87506126

Log. de 10,06199 1,00268000

Pour 77 34

Log. de 754,64308 2,87774160.

Exemple II. On demande le logarithme du nombre 1096,28743 à huit décimales.

Divisant ce nombre par 109, on a pour quotient 10,0576828. Voici le reste du calcul.

Log. de 109 2,03742650

Log. de 10,0576 1,00249436

Pour 83 357

Log. de 1096,28743 3,03992443.

398. Tels sont les différens cas dans lesquels peut se trouver un nombre dont on veut connoître le logarithme, soit à sept, soit à huit décimales. Reste à résoudre le probleme inverse, et de trouver le nombre qui appartient à un logarithme quelconque proposé.

399. Supposant d'abord ce logarithme à sept décimales, ce qui obligera de le chercher dans la grande table des logarithmes des nombres, depuis 1020 jusqu'à 100000. Alors, sans se mettre en peine de sa caractéristique, on en cherchera les trois premières décimales parmi les nombres isolés que l'on voit dans la colonne marquée 0; et les ayant trouvées, on cherchera les quatre dernières figures du logarithme parmi les nombres de quatre chiffres à qui

à qui les trois premiers chiffres, trouvés dans la colonne *o*, appartiennent en commun. On descendra donc le long de la colonne marquée *o*, et on s'arrêtera aux chiffres qui approcheront le plus *en moins* des quatre dernières décimales du logarithme proposé; on suivra la ligne, sur laquelle on se sera arrêté, en la parcourant de gauche à droite, et si l'on trouve dans cette ligne les quatre dernières figures du logarithme donné, ce qui cependant n'arrivera que très rarement, on suivra en montant ou en descendant la colonne où on les aura trouvées; le chiffre qu'on verra à la tête ou au pied de cette colonne, sera la *cinquième figure* du nombre cherché, dont les *quatre premières* se trouveront, sur la même ligne, dans la colonne marquée *N*.

400. Si au contraire, ce qui arrivera presque toujours, les quatre dernières figures du logarithme donné ne se trouvent pas parmi celles des tables, on cherchera celles qui en approchent le plus *en moins*; elles feront connoître, comme ci-dessus, les cinq premiers figures du nombre qu'on cherche. Pour avoir les autres, on retranchera les quatre dernières figures qu'on aura trouvées dans la table, de celles du logarithme donné; et l'on aura un reste que l'on cherchera parmi les parties des différences de la petite table la plus prochaine; et si parmi ces parties on trouve le reste en question, le chiffre qui sera à la gauche de ce nombre, sera la *sixième figure* du nombre cherché; le septième étant *zéro* alors.

401. Si ce reste ne se trouve pas parmi les parties des différences, on s'arrêtera à la partie qui approche le plus *en moins* du reste en question; on la soustraira de ce reste, ce qui donnera un second reste, à la droite duquel on mettra un *zéro*; on cherchera de même le décuple du second reste dans la table des parties, en s'arrêtant à celle qui en approche le plus en moins; le chiffre qu'on verra à la gauche de cette partie, sera la *septième figure* du nombre cherché.

402. On pourroit de même, en cherchant un troisième reste, déterminer moyennant cette même table le huitième chiffre du nombre qu'on demande. Mais ce chiffre sera rarement exact; il ne pourra généralement l'être, que lorsque le logarithme lui-même est exprimé en huit décimales.

403. Connoissant les figures du nombre, il restera à placer convenablement la virgule. Cette place dépendra de la caractéristique du logarithme, d'après les règles qui ont été données ci-dessus.

Exemple I. Soit donné le logarithme 2,8164327; on demande le nombre.

Logarithme donné.	8164327
Log. des tables immédiatement inférieur	8164269
Reste	58
Dixièmes de la table	53
Reste	50
Centièmes de la table	53.

Le logarithme immédiatement inférieur 8164269 donne 65528 pour les cinq premières chiffres du nombre. Le premier reste 58 donne 8 pour le sixième;

sixieme; le second reste 50 donne 8 pour le septieme chiffre. La caractéristique est 2; il faut donc faire précéder la virgule de trois chiffres; le nombre demandé sera donc 655, 2888.

Exemple II. On demande le nombre du logarithme 1, 5062371.

Logarithme donné 5062371

Log. des tables immédiatement inférieur 5062344

Reste 27

Dixiemes de la table 27.

Le logarithme 5062344 fait connoître les cinq premières figures du nombre, savoir 32080. Le premier reste donne 2 pour la sixieme, et comme il n'y a pas de second reste, la septieme sera zéro. La virgule du nombre doit être précédée de deux chiffres: il sera donc 32, 0802.

Exemple III. Le logarithme proposé est 0,2268307; on demande le nombre.

Log. proposé 2268307

Log. immédiatement inférieur 2268060

Reste 247

Dixiemes de la table 232

Reste 150

Centiemes de la table 129

Reste 210

Milliemes de la table 206

On tire de 2268060 les cinq premières figures: elles sont 16858; le premier produit 232 y ajoutera la sixieme 9; le second 129 fournira la septieme 5; le troisieme 206 fera connoître la huitieme 8. La virgule dans le nombre doit être précédée d'un chiffre. Le nombre demandé sera donc 1, 6858958.

Exemple IV. Le logarithme proposé est — 1,1527813.

Log.

<i>Log. proposé</i>	1527813
<i>Log. immédiatement inférieur</i>	1527774
<i>Reste</i>	39
<i>Dixiemes de la table</i>	31
<i>Reste</i>	80
<i>Centiemes de la table</i>	61
<i>Reste</i>	190
<i>Milliemes de la table</i>	184.

On tire de 1527774 les cinq premières figures du nombre 14216; de 31 la sixieme 1; de 61 la septieme 2; de 184 la huitieme 6. La virgule doit être précédée d'un zéro; le nombre sera donc 0, 14216126.

404. Lorsque le logarithme proposé a huit décimales, et qu'il importe de tenir compte de la huitieme décimale dans la détermination du nombre qui lui répond, on cherchera dans la table des logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 1200, intitulée *premiere chiliade*, le logarithme immédiatement inférieur; on le retranchera du logarithme proposé; on cherchera le logarithme qui résulte de cette soustraction, dans la table des logarithmes des nombres depuis 100000 jusqu'à 108000; on multipliera ensemble les nombres qui répondent à ces deux logarithmes; leur produit sera le nombre qu'on cherchoit. Nous ne croyons pas que cela ait besoin de démonstration; c'est la marche rétrograde de celle qu'on avoit suivie, en cherchant à huit décimales le logarithme d'un nombre quelconque proposé. Seulement il faudra retrancher les deux ou trois dernières figures décimales du produit, parce qu'elles pourroient bien ne pas être exactes.

Exem-

Exemple I. *On demande le nombre du logarithme 2, 68269592.*

On trouvera d'abord dans la première chiliade, le logarithme immédiatement inférieur 68214508; c'est celui de 481. Otant ce logarithme du logarithme proposé 68269592, il restera 00055084. Cherchant ce logarithme dans la table des logarithmes depuis 100000 jusqu'à 108000, on trouvera qu'il lui répond le nombre 1,00125914. Multipliant ce nombre par 481, on aura le produit 481,60564634. Il faudra en retrancher les deux dernières décimales. Quant à la virgule, elle pourra rester, parceque la caractéristique est 2. On aura 481,605646 pour le nombre demandé.

Exemple II. *On demande le nombre du logarithme 0,08326084.*

Le logarithme immédiatement inférieur dans la première chiliade est 08278537; c'est celui de 121; lequel étant retranché du logarithme proposé, laissera pour reste 00047547. C'est le logarithme du nombre 1,00109541; comme on voit en le cherchant dans la table des logarithmes depuis 100000 jusqu'à 108000. Le produit des deux nombres est 121,13254461. On en retranchera les deux dernières décimales; on mettra la virgule après la première figure, parceque la caractéristique est zéro. On aura 1,21132545; c'est le nombre demandé.

Exemple III. *On demande le nombre du logarithme — 2,06235491.*

Le logarithme immédiatement inférieur dans la première chiliade est 06220581; c'est celui de 1154. Retranché de l'autre, il laisse pour reste le logarithme 00014910; c'est celui de 1,00034337. Multipliant ce nombre par 1154, on a le produit 115439624898. On supprimera les deux dernières décimales; et comme la caractéristique est moins 2, on mettra deux zéros en avant du nombre, en observant de mettre la virgule après le premier des deux zéros. On aura 0,01154396249 ou plus sûrement 0,0115439625 pour le nombre demandé.

405. Les logarithmes des nombres moindres que l'unité, sont tous négatifs. En les ôtant de 1, suivi d'un nombre suffisant de zéros, et en ajoutant 1 à leur caractéristique, on peut toujours leur donner une forme telle, que leurs décimales soient positives dans tous les cas, et que le négatif ne tombe que sur la caractéristique seule. Mais pour exercer sur les caractéristiques négatives, les différentes opérations de l'arithmétique, il faut être bien au fait du calcul des quantités négatives. Les principes de ce calcul, il est vrai, ne sont nullement difficiles. Cependant on a jugé qu'on feroit encore mieux, de s'en passer entièrement; et on a cru en trouver le moyen, en mettant à la place de ces caractéristiques négatives, leurs *complemens arithmétiques*.

406. Le complément arithmétique d'un nombre quelconque, est ce qu'il faut ajouter à ce nombre, jusqu'à dix. Les complemens de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Un nombre quelconque positif est donc égal à 10, *moins* son complément arithmétique. Un nombre quelconque négatif est égal à *moins* 10, *plus* son complément arithmétique.

Moins 1 est égal à moins 10 plus 9.

Moins 2 est égal à moins 10 plus 8.

Moins 3 est égal à moins 10 plus 7.

Et ainsi des autres.

407. On pourra donc mettre à la place de la caractéristique négative, son complément positif, bien entendu qu'on ne perde pas de vue les *moins 10*, soit qu'on les écrive en effet, ou qu'on les garde dans la mémoire.

On

On pourra négliger alors la caractéristique *moins 10* dans la plupart des cas, parce qu'elle est commune à tous. Je dis *dans la plupart des cas* ; car il en est plusieurs où on est obligé de s'en tenir aux caractéristiques négatives, ce que nous verrons bientôt.

408. Mais à quel signe reconnoissons nous le complément arithmétique, qui d'ailleurs a toute l'apparence d'une véritable caractéristique ? Le logarithme 6, 0000000 est celui d'un million, si le nombre 6 est regardé comme caractéristique ; il est celui d'un dix-millième, si l'on prend ce même nombre pour le complément arithmétique d'une caractéristique négative. Il est vrai qu'une telle erreur seroit trop grossière, pour que le calculateur ne s'aperçût pas d'où elle seroit venue ; qu'il doit connoître à peu près de quel ordre seront les nombres qui résulteront de ses opérations, et qu'il n'est guères possible qu'il se trompe de dix ordres à la fois. Comme il importe cependant d'éviter tout soupçon d'erreur à cet égard, nous suivrons l'exemple que nous a donné *Callet* dans le précis élémentaire qui se trouve à la tête de ses tables, en réservant *la virgule* pour les vraies caractéristiques, et en mettant *un point* au lieu de la virgule, lorsqu'il faut désigner le complément arithmétique d'une caractéristique négative.

Le logarithme 6, 000000 sera donc celui d'un million. Mais le logarithme 6. 000000 sera celui d'un dix-millième.

409. Tels sont les principes du calcul logarithmique ; il reste à en faire l'application aux différentes opérations de l'arithmétique.

MULTIPLICATION.

410. Le logarithme du produit est égal à la somme des logarithmes de tous les facteurs : car les logarithmes ne sont autre chose que les exposants de leurs nombres, considérés comme puissances d'une même base. La règle est donc facile. Prenez les logarithmes de tous les facteurs : ajoutez les ensemble ; cherchez dans les tables le nombre auquel appartient le nouveau logarithme qui en résulte ; ce nombre sera le produit demandé.

411. S'il y a des complémens arithmétiques parmi les caractéristiques des logarithmes, on les ajoutera avec les autres, seulement il faudra retrancher de la somme totale qui en résulte, autant de dizaines, qu'il y a eu de complémens arithmétiques. Tant que cette soustraction sera possible, l'excès qui en résulte devra être regardé comme une véritable caractéristique positive, à laquelle on reconnoitra que le produit des facteurs proposés est plus grand que l'unité. Si au contraire la somme de toutes les caractéristiques, y compris les complémens, se trouvoit moindre que la somme des dizaines qu'il faudroit en retrancher, ce qui indiqueroit un produit moindre que l'unité, on ajouteroit *une dizaine* à la somme des caractéristiques. La soustraction alors sera possible dans tous les cas ; mais l'excès qui en résultera ne sera plus une véri-

véritable caractéristique, ce sera le complément d'une caractéristique négative, et au lieu de le faire suivre d'une virgule, il faudroit mettre un point.

Exemple I. On demande le produit des nombres suivants :

41, 69258
 0, 007684329
 6272, 982
 51, 29783
 0, 0009864328.

On trouvera dans les tables :

Log. 41,69258 . .	=	1,6200587
Log. 0,007684329	=	7.8856059
Log. 6272,982 . .	=	3,7974740
Log. 51,29783 . .	=	1,7100991
Log. 0,0009864328	=	6.9940676
Log. du produit .	=	<u>22,0073053</u>

De la somme des caractéristiques il faudra retrancher 20, à cause des deux logarithmes négatifs. Il restera 2, 0073053. C'est le logarithme du nombre 101, 69633; et ce nombre est le produit des nombres proposés.

Exemple II. On demande le produit des nombres qui suivent :

14, 72869
 0, 02365462
 0, 1652437
 0, 001046823
 0, 0001204682
 68240, 24.

Un

On trouvera dans les tables:

$$\text{Log. } 14,72869 \dots = 1,1681642$$

$$\text{Log. } 0,02565462 \dots = 8.3739160$$

$$\text{Log. } 0,1652437 \dots = 9.2181249$$

$$\text{Log. } 0,001046823 \dots = 7.0198732$$

$$\text{Log. } 0,0001204682 \dots = 6.0808724$$

$$\text{Log. } 68240,28 \dots = 4,8340408$$

$$\text{Somme des logarithmes} = 36,6949915.$$

Il a eu quatre logarithmes négatifs; il faudra donc retrancher 40 de la somme des caractéristiques. Donc, ôtant 40 de 46, le logarithme du produit sera 6.6949915; bien entendu que la caractéristique 6 n'est que le complément arithmétique de la véritable caractéristique *moins* 4. Donc, ayant trouvé le nombre, il faut y placer la virgule de manière qu'elle soit suivie de trois zéros. Le produit sera donc 0,0004954404.

DIVISION.

412. Le logarithme d'un quotient quelconque est égal au logarithme du dividende, moins celui du diviseur. On prendra donc les logarithmes de l'un et de l'autre; on ôtera du logarithme du dividende, celui du diviseur; on cherchera dans les tables le nombre auquel répond le nouveau logarithme qui en résulte; ce nombre sera le quotient qu'on demandoit. Les complémens arithmétiques ne feront aucune difficulté: ils seront traités comme de vraies caractéristiques.

413. Si le nombre entier inférieur, caractéristique ou complément, est plus grand que celui qui est au-dessus, on ajoutera *une dizaine* à ce dernier, et on achèvera la soustraction. Le reste qu'on obtient dans les deux cas,

cas, doit être considéré comme une vraie caractéristique, toutes les fois que le dividende aura été plus grand que le diviseur. Si au contraire le diviseur proposé étoit plus grand que le dividende, ce qui donneroit au logarithme du quotient une caractéristique négative, il faudroit en conclure que celle que la soustraction a laissée, n'est que le complément de la vraie caractéristique ; et d'après cette conclusion on saura placer la virgule.

Exemple I. *On veut diviser 5, 684362 par 19, 481437.*

$$\text{Log. de } 5, 684362 = 0, 7546818$$

$$\text{Log. de } 19, 481437 = 1, 2896209$$

$$\text{Log. du quotient} = 9. 4650609.$$

Au lieu d'ôter la caractéristique 1 de 0, on l'ôtera de 10 ; le reste 9 est le complément arithmétique de la véritable caractéristique *moins* 1. Il faut donc placer la virgule du quotient de manière qu'elle soit précédée d'un zéro. On aura le quotient 0, 2917836.

Exemple II. *Il faut diviser 4, 916863 par 0, 0287984.*

$$\text{Log. de } 4, 916863 = 0, 6916881$$

$$\text{Log. de } 0, 0287984 = 8. 4593683$$

$$\text{Log. du quotient} = 2. 2323198.$$

Au lieu d'ôter 8 de 0, on l'ôtera de 10. Le reste 2 qu'on obtient, sera la caractéristique véritable, parceque le dividende se trouve plus grand que le diviseur. On aura pour quotient 170, 7339.

Exemple III. *Prenons l'inverse de l'exemple proposé, et divisons 0, 0287984 par 4, 916863.* Les logarithmes étant les memes qu'auparavant, on aura

$$\text{Log. de } 0, 0287984 = 8. 4593683;$$

$$\text{Log. de } 4, 916863 = 0, 6916881$$

$$\text{Log. du quotient} = 7. 7676802.$$

Comme

Comme le diviseur a été plus grand que le dividende, la caractéristique 7 doit être considérée comme le complément arithmétique de la véritable caractéristique *moins* 3. Ainsi, plaçant la virgule de manière qu'elle soit suivie de deux zéros, on aura pour quotient 0, 005857068.

FORMATION DES PUISSANCES.

414. La puissance est ce que devient le produit dans le cas où tous les facteurs sont égaux entr'eux. Le nombre de ces facteurs est indiqué par l'exposant. Le logarithme de la puissance est donc égal à celui de la base, multiplié par l'exposant.

415. Ainsi, la base et l'exposant étant donnés, on prendra simplement le logarithme de la base, et en le multipliant par l'exposant, on aura le logarithme de la puissance. Ainsi, pour avoir la puissance, on n'aura qu'à chercher dans les tables le nombre, auquel répond le logarithme que la multiplication aura donné.

416. Cette multiplication n'a pas la moindre difficulté, tant que la caractéristique du logarithme de la base est positive, et que l'exposant est aussi un nombre positif, entier ou fractionnaire, comme on verra par les exemples suivans :

Exemple I. On demande la trente-sixième puissance du nombre 1, 047.

Log. de 1,047 . . = 0,01994668
Multipliez par . . 36

11968008
5984004

Log. de la puissance = 0,71808048

La

La puissance demandée sera 5, 22493. Le logarithme de la base a été pris à huit décimales, pour diminuer l'erreur qui doit nécessairement résulter en multipliant par un nombre aussi grand que 36, la septième décimale du logarithme, et en supprimant celle qui devoit suivre immédiatement après.

Exemple II. *On demande la centième puissance du nombre 1, 014.* Ici on n'aura pas trop de neuf décimales pour le logarithme de la base. On le cherchera donc dans la première table des logarithmes à 20 décimales, on aura

$$\text{Log. de } 1, 014 = 0, 006037955.$$

Multipliant ce logarithme par 100, il deviendra 0, 6037955. C'est le logarithme de la puissance, qui sera donc 4, 0160165.

Exemple III. *On demande la millième puissance de 1, 001.* Ayant besoin ici de dix décimales, on trouvera le logarithme de la base proposée, égal à 0, 0004340775. Multiplié par mille, il deviendra 0, 4340775. La puissance demandée sera donc 2, 7169238. On peut remarquer en passant, que ce nombre est déjà fort approchant de 2, 718281828 que nous avons donné plus haut, en 383. pour la base des logarithmes naturels. La haute analyse nous en dira la raison.

217. Si la base est un nombre fractionnaire, ce qui donnera une valeur négative à la caractéristique du logarithme, et ce qui obligera d'y substituer son complément arithmétique, alors, ayant multiplié le logarithme entier de la base, y compris ce complément, par l'exposant donné; on rejettera simplement les dizaines du produit. Le reste sera le complément arithmétique du logarithme de la puissance.

Exemple I. *On demande la septième puissance du nombre 0, 81276.*

Le

Le logarithme de $0,81276$ est $9,9099623$; et en multipliant par 7 , on aura le produit $69,3697361$. Ce qui donnera $9,3697361$ pour logarithme de la puissance, qui deviendra égale à $0,2342805$; la véritable caractéristique sera donc *moins* 1 , ayant 9 pour complément arithmétique.

Exemple II. *On demande la centieme puissance du nombre $0,879$.*

Le logarithme de $0,879$ est $9,943988875$, et multipliant par 100 , on aura $994,3988875$; ce qui donne en supprimant les dixaines $4,3988875$. On aura pour puissance demandée $0,00000250546$.

Exemple III. *On demande d'élever la base $0,38246$ à l'exposant $13,4178$. Cet exposant est composé lui-même d'entiers et de décimales.*

Le logarithme de la base est $9,582586$. Multipliant ce logarithme, tel qu'il est, par l'exposant $13,4178$ on obtient le produit $128,5772024$. Il faut ôter de ce produit l'exposant pris dix fois, c'est-à-dire, $134,178$. On augmentera donc de 10 la caractéristique du premier produit: alors, ayant $134,178$ à retrancher de $138,5772224$ il restera $4,3992224$ pour logarithme de la puissance demandée, qui sera $0,000002507393$.

Exemple IV. *Il faut élever la base $0,779$ à l'exposant $23,9465$.*

Le logarithme de la base est $9,89153746$. En le multipliant par $23,9465$ il en résulte le logarithme $236,8677018$ qui deviennent $246,8677018$ en ajoutant 10 à sa caractéristique. Il faudra en ôter alors l'exposant $23,9465$ pris dix fois; ou $239,465$. Il restera $7,4027018$.

Ainsi la virgule de la puissance devant être suivie de deux zéros, elle deviendra $0,002527562$.

EXTRACTION DES RACINES.

418. La racine d'un nombre, d'un ordre quelconque, est à ce nombre, ce que la base est

est à la puissance. Si on excepte les deux seuls cas de la racine quarrée et de la racine cubique, l'extraction de toutes les autres racines est un probleme qui excède les limites de l'arithmétique ordinaire. En fait de logarithmes, rien de plus facile. Prenez le logarithme du nombre proposé; divisez ce logarithme par l'exposant de la racine qu'on vous demande, et vous aurez celui de la racine elle-meme.

Exemple. *Le nombre 10 étant proposé, on demande sa racine quarrée et cubique; ensuite sa racine quatrieme, cinquieme, sixieme etc. jusqu'à la douzieme.*

Le logarithme de dix est 1,0000000. On divisera donc ce logarithme successivement par deux, trois, quatre, jusqu'à douze, et on aura sur le champ les logarithmes des racines. Il ne restera qu'à chercher dans les tables les nombres qui leur appartiennent. Voici les résultats de ce calcul.

<i>Dénomination la de racine.</i>	<i>Logarithme de la racine de dix.</i>	<i>La racine de dix elle-meme.</i>
Racine quarrée	0,5000000	3,162277
racine cubique	0,3333333	2,154434
racine quatrieme	0,2500000	1,778280
racine cinquieme	0,2000000	1,584893
racine sixieme	0,1666667	1,467800
racine septieme	0,1428571	1,389495
racine huitieme	0,1250000	1,333522
racine neuvieme	0,1111111	1,291550
racine dixieme	0,1000000	1,258925
racine onzieme	0,0909091	1,232840
racine douzieme	0,0833333	1,211528

419. Si la base est un nombre moindre que l'unité, ce qui obligera de mettre à la tête de son logarithme le complément de sa caractéristique, qui sera négative alors, on

Q

ajoutera

ajoutera à ce complément autant de dixaines, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la racine, *moins une*, et on procédera à la division, qui fera connoître le logarithme de la racine, précédé d'un complément arithmétique.

Exemple. On demande les racines successives, savoir la racine quarrée, cubique, quatrieme, cinquième etc. de la fraction $\frac{1}{12}$. Le logarithme de cette fraction est 8. 92081875.

On divisera donc successivement

par	2 . . . le logarithme	18. 92081875.
par	3 . . . le logarithme	28. 92081875.
par	4 . . . le logarithme	38. 92081875.
par	5 . . . le logarithme	48. 92081875.
par	10 . . . le logarithme	98. 92081875.
par	50 . . . le logarithme	498. 92081875.
par	100 . . . le logarithme	998. 92081875.
par	1000 . . . le logarithme	9998. 92081875.

On aura pour les racines des différens ordres, les logarithmes qui suivent, précédés chacun de son complément arithmétique; leurs nombres respectifs, qu'on trouvera dans les tables, seront les racines qu'on demandoit.

	Log. de la racine.	La racine.
quarrée . . .	9. 46040937 . . .	0, 288675.
cubique . . .	9. 64027292 . . .	0, 436790.
quatrieme . .	9. 73020469 . . .	0, 537285.
cinquieme . .	9. 78416375 . . .	0, 608564.
dixieme . . .	9. 89208187 . . .	0, 779977.
cinquantieme	9. 97841637 . . .	0, 951516.
centieme . .	9. 98920819 . . .	0, 975457.
millieme . . .	9. 99892082 . . .	0, 997518.

420. Les memes principes apprendront enfin, à élever un nombre quelconque proposé à un exposant fractionnaire, d'un numérateur et d'un dénominateur donné. Il faudra multiplier le logarithme de la base par le numérateur de cette fraction et diviser le produit par son dénominateur. Cela n'aura pas la moindre difficulté, tant que la base est un nombre plus grand que 1. Si la base étoit moindre que l'unité, ce qui obligerait de mettre à la tête du logarithme, le complément de sa caractéristique, on n'auroit qu'à suivre dans la multiplication, de même que dans la division, les principes qu'on vient d'enseigner.

Exemple I. *Il faut élever la fraction $\frac{5}{12}$ à l'exposant $\frac{4}{7}$. Voici le calcul :*

Log. de 5	=	0, 69897000
Log. de 12	=	1, 07918125
Log. de $\frac{5}{12}$	=	9. 61978875
Multipliez par 4 . . .		38. 47915500
Supprimez les dixaines		8. 47915500
Ajoutez 60		68. 47915500
Divisez par 7		9. 78273643.

C'est le logarithme de la puissance en question ; qui par conséquent se trouve égale à 0, 606368.

Exemple II. *Il faut élever la fraction $\frac{13}{98764}$ à l'exposant $\frac{2}{15}$. Voici le calcul :*

Log. de 13	=	1, 1139434
Log. de 98764	=	4, 9945987
Log. de la base	=	6. 1193447
Multipliez par 2		12. 2386894
Supprimez les dixaines . .		2. 2386894
Ajoutez 140		142. 2386894
Divisez par 15		9. 4825793.

C'est le logarithme de la puissance demandée, qui se trouvera égale à 0,303794.

RECHERCHE DES EXPOSANTS.

421. Le logarithme de la puissance est le produit du logarithme de la base, multiplié par l'exposant. Donc, si la puissance et la base sont données, et qu'on demande l'exposant, on n'aura qu'à diviser le logarithme de la puissance par celui de la base.

Exemple I. *La base 1,07 ayant été élevée à un exposant qu'on ne connoit pas, il en est résulté la puissance 5,8643; on demande quel doit avoir été cet exposant. Voici le calcul:*

$$\text{Log. de } 1,07 = 0,0293838$$

$$\text{Log. de } 5,8643 = 0,7682162.$$

Divisant le dernier logarithme par le premier, on a le quotient 26,144; c'est l'exposant qu'on demandoit.

Exemple II. *Soit la base 1,065; la puissance 1,5273; on demande l'exposant.*

$$\text{Log. de } 1,065 = 0,0273496;$$

$$\text{Log. de } 1,5273 = 0,1839244.$$

La division fait connoître l'exposant demandé 6,725.

Exemple III. *Soit la base 45,369; la puissance 1,01738; on demande l'exposant.*

$$\text{Log. de } 45,369 = 1,6567592.$$

$$\text{Log. de } 1,01738 = 0,0074832.$$

On trouvera 0,004517 pour l'exposant demandé.

422. La règle est absolument la même, lorsque tant la base que la puissance sont des nombres fractionnaires, moindres que l'unité.
Mais

Mais il faut remarquer que dans ce seul cas, il n'est point permis d'employer des décimales positives; il faut que les deux logarithmes soient entièrement négatifs. Il faut donc déterminer les logarithmes de l'une et de l'autre, en ôtant pour chacune le logarithme du numérateur, du logarithme du dénominateur, ou bien de celui de la puissance de *dix*, qui lui sert de dénominateur.

Exemple I. Soit la base 0,27943; la puissance 0,056842; on demande l'exposant.

Log.	27943	=	4,4462730
Log.	100000	=	5,0000000
Log. de la base		=	-(0,5537270)
Ensuite Log.	56842	=	4,7546694
Log.	1000000	=	6,0000000
Log. de la puissance		=	-(1,2453306).

Divisant 1245330 par 553727, on aura 2,249 pour l'exposant demandé.

Exemple II. Soit la base 0,106432; la puissance 0,98794; on demande l'exposant.

Log. de	106432	=	5,02707222
Log. de	1000000	=	6,00000000
Log. de la base		=	-(0,97292778)
Ensuite Log. de	98794	=	4,9947306
Log. de	100000	=	5,0000000
Log. de la puissance		=	-(0,0052694).

Divisant 52694 par 9729278, on aura 0,005416 pour l'exposant qu'on demandoit.

423. Le problème de la recherche des exposants trouve une application naturelle dans le calcul de l'intérêt composé. Dans ce calcul on suppose que les intérêts de chaque année restent entre les mains du débiteur, pour être joints

joints au capital, lequel par cet accroissement annuel doit nécessairement augmenter d'année en année.

Choisissons l'unité pour exprimer le capital en question, que nous supposons placé à raison de *six pour cent* d'intérêts annuels : et désignons par A, B, C, D etc. ce que sera devenu ce capital à la fin de chacune des années suivantes, par l'addition successive des intérêts de l'année précédente.

D'après le taux d'intérêts qui a été supposé, il doit augmenter d'une année à l'autre dans le rapport de 100 : 106 ou de 1 : 1, 06. On aura donc

$$A = 1, 06;$$

$$B = 1, 06 A;$$

$$C = 1, 06 B;$$

$$D = 1, 06 C;$$

etc. etc. Ce qui donne

$$A \text{ égal à } 1, 06.$$

$$B \text{ égal au carré de } 1, 06;$$

$$C \text{ égal au cube de } 1, 06;$$

$$D \text{ égal à la quatrième puissance de } 1, 06;$$

etc. etc.

Ainsi donc, au bout d'un nombre quelconque d'années, le capital sera égal à la puissance de 1, 06 qui a ce nombre pour exposant.

Le logarithme du capital sera donc égal à celui de 1, 06 multiplié par le nombre des années. Et réciproquement, si l'on veut savoir le nombre des années, au bout duquel le capital sera devenu *le double, le triple, le quadruple* etc. de ce qu'il avoit été au commencement, il faudra diviser les logarithmes de *deux, de trois, de quatre* par celui de 1, 06 qui est 0, 025306. Donc, ayant

$$\text{Log. } 2 = 0, 301030$$

$$\text{Log. } 3 = 0, 477121$$

$$\text{Log. } 4 = 0, 602060$$

on

on trouvera que le capital sera devenu

le *double*, au bout de 11, 895 ans

le *triple*, au bout de 18, 854 ans

le *quadruple*, au bout de 23, 791 ans.

Et ainsi des autres.

ERRATA.

Page.	Ligne.	Au lieu de	Lisez
50	21	0, 2, 4, 8	0, 2, 4, 6, 8
50	33	41, 43	41, 43, 47
52 . .	<i>derniere</i>	15 to 6 pi	13 to 5 pi
80	32	$\begin{array}{r} 597 \\ \hline 1350 \end{array}$	$\begin{array}{r} 557 \\ \hline 1350 \end{array}$
83 .	<i>avant-derniere</i> . . .	$\begin{array}{r} 19 \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 18 \end{array}$
140	32	3 Rixdalers . .	4 Rixdalers
148 .	<i>avant-derniere</i> . . .	4562	4568.

De plus, nous avertissons que la racine cubique de 5, 75 (page 111) n'est pas 1, 792110875 mais 1, 7915239355. Il s'est glissé une faute dans le calcul meme, que nous laissons aux élèves à découvrir.