

La règle de fausse position nous en donnera la solution sur le champ. On voit d'abord que le nombre demandé, certainement plus grand que 1,2 doit être un peu moindre que 1,3. En effet, faisant la

Première position $x = 1,5$; on trouve le carré de $x = 1,69$; son cube 2,197; sa racine carrée 1,140175; il reste 1,056825; il y a donc une erreur *en plus*, égale à 0,056825. Donc, essayant la

Seconde position $x = 1,29$; on trouve le carré de $x = 1,6641$; son cube 2,146689; sa racine carrée 1,135782. Elle laisse un reste égal à 1,010907. Il y a donc une erreur *en plus*, égale à 0,010907.

Différence des produits 0,0591251.

Différence des erreurs 0,045918.

La division donne 1,2876 pour valeur approchée de l'inconnue. En effet le carré de ce nombre est 1,65791376; son cube 2,13472976; sa racine carrée 1,13472464. Il y a donc un reste égal à 1,00000512 qui ne diffère de l'unité que d'un seul deux-cent-millième. On peut donc être certain que l'erreur que cette règle peut avoir laissée, est certainement au-dessous d'un deux-cent-millième; peut-être elle n'excède guères un millionième. Une seconde opération feroit trouver la valeur de l'inconnue jusqu'à douze décimales.

CHAPITRE QUINZIEME.

LES PUISSANCES, EN GÉNÉRAL.

316. Les *Puissances* d'un nombre sont les produits qui résultent de la multiplication de ce nombre plusieurs fois par lui-même. Ce nombre alors est appelé *base de la puissance*; le nombre total des facteurs égaux qui entrent dans

dans le produit, ou le nombre qui indique combien de fois la base y fait fonction de facteur, est appelé *exposant de la puissance*. On marque cet exposant par un petit chiffre qu'on place sur la droite, et un peu au-dessus de la base.

Les puissances consécutives de 2 seront 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 etc. On les marquera $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7$ etc.

Les puissances consécutives de 3 seront 3, 9, 27, 81, 243, 729 etc. On les désignera par $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ etc.

Les puissances de 5 seront 5, 25, 125, 625, 3125 etc. Elles seront désignées par $5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5$ etc.

Les puissances de 7 seront 7, 49, 343 etc. Elles seront écrites $7^1, 7^2, 7^3$ etc.

On saura donc ce qu'on entend par *puissance d'un nombre tel à un exposant tel*. La puissance de 6 à exposant 4, n'est autre chose que 6^4 ou bien 6 fois 6 fois 6 fois 6, c'est-à-dire, 1296.

Très souvent aussi, pour désigner les différentes puissances d'un nombre, on dit *première puissance*, *seconde puissance*, *troisième puissance* etc. d'après le nombre des unités que contient l'exposant. Ces expressions paroissent bien plus simples que les précédentes; mais elles ne sont applicables que dans les cas où l'exposant est un nombre entier. Ce n'est qu'alors non plus qu'elles sont en usage.

Le *quarré* d'un nombre n'est donc autre chose que la *seconde puissance* de ce nombre. De même la dénomination de *cube* est absolument identique avec celle de *troisième puissance*.

Chaque nombre au reste est la première puissance de soi-même. La formation des puissances d'un

M

nombre

nombre commence toujours par lui. C'est ainsi que 5^1 ne dit ni plus ni moins que 5. Et ainsi des autres.

Au lieu de dire : *former une certaine puissance d'un nombre*, on dit aussi : *élever ce nombre à un exposant donné*. L'élévation d'un nombre à un exposant donné est donc, dans le cas d'un exposant entier, un acte de multiplication répétée, de même que la multiplication d'un nombre n'étoit autre chose que l'addition de ce nombre plusieurs fois à lui-même.

317. Une puissance quelconque étant proposée, on trouve la puissance immédiatement supérieure, en multipliant la première par sa base.

C'est ainsi que, multipliant la troisième puissance d'un nombre quelconque par ce nombre, on aura pour produit la quatrième puissance du même nombre.

Par ex. 6 fois 6^3 donne 6^4
 4 fois 4^5 donne 4^6
 5 fois 5^8 donne 5^9 .

318. Divisant la puissance d'un nombre par ce nombre, ou par sa base, on trouve la puissance immédiatement inférieure du même nombre.

Divisant la sixième puissance d'un nombre par ce même nombre, on aura pour quotient la cinquième puissance de ce nombre. Et ainsi des autres. C'est ainsi que

5^6 divisé par 5, donne 5^5
 4^9 divisé par 4, donne 4^8
 3^5 divisé par 3, donne 3^4 .

319. La puissance d'un nombre quelconque à exposant zéro, est égale à l'unité.

Car la puissance à exposant zéro est immédiatement inférieure à celle, qui a 1 pour exposant; elle doit donc résulter, en divisant cette dernière puissance

sance par sa base. Or, cette dernière puissance n'est autre chose que la base elle-même, dont la division par elle-même doit donner pour quotient l'unité.

C'est ainsi que

5^4 est égal à 1 fois 5 fois 5 fois 5 fois 5.

5^3 est égal à 1 fois 5 fois 5 fois 5.

5^2 est égal à 1 fois 5 fois 5.

5^1 est égal à 1 fois 5.

Enfin 5^0 est égal à 1.

Supprimant par des divisions successives tous les facteurs d'une puissance, l'un après l'autre, il restera à la fin l'unité, qui est naturellement, quoique tacitement entendue sous toutes les puissances, et même sous tous les nombres possibles.

320. Plusieurs puissances d'un même nombre, mais à différens exposants, étant proposées, il est clair qu'en ajoutant ensemble leurs exposants, on formera une nouvelle puissance du même nombre, qui sera égale au produit des puissances proposées. Ainsi donc, la multiplication de plusieurs puissances d'une même base entr'elles, ne suppose que la simple addition de leurs exposants.

Multipliant ensemble la troisième, la quatrième, et la sixième puissance d'un nombre quelconque, il doit en résulter la treizième puissance du même nombre. Il y avoit trois facteurs dans l'une, quatre dans l'autre, six dans la troisième; il y en aura donc en tout treize dans le produit, et c'est là ce qui constitue la treizième puissance. Le produit des puissances 5^3 , 5^4 , 5^6 , sera donc 5^{13} . Et ainsi des autres.

321. Réciproquement, faut-il diviser une puissance quelconque par une autre puissance du même nombre? On ôtera simplement l'exposant de cette dernière de celui de la pre-

miere. La puissance de meme base, à qui on donnera pour exposant le reste qu'on aura obtenu, sera le quotient demandé. La division d'une puissance par une autre puissance de la meme base, reviendra donc à une simple soustraction de leurs exposants respectifs.

On propose de diviser la septième puissance d'un nombre par la quatrième puissance du meme nombre ? Il est clair que sur les sept facteurs de la premiere, il y en aura quatre de supprimés par la division qu'on exige ; il n'en subsistera donc que trois, qui formeront la troisième puissance du meme nombre.

Ainsi 8^7 , divisé par 8^4 , donnera pour quotient 8^3 .

322. L'exposant d'une puissance peut fort bien être une quantité négative. Une puissance à exposant négatif est égale à l'unité, divisée par la meme puissance à exposant positif.

La puissance 5^{-3} est égale à $\frac{1}{5^3}$, divisé par 5^3 .

La puissance 7^{-2} est égale à $\frac{1}{7^2}$, divisé par 7^2 .

Et ainsi des autres.

323. Voici la démonstration très simple de ce théorème. Soit proposé de diviser l'unité par une certaine puissance d'un nombre quelconque. L'unité peut être considérée comme puissance du même nombre, à exposant zéro. La division des puissances revient à une simple soustraction de leurs exposants respectifs. Il faudra donc ôter l'exposant de la puissance donnée, de zéro. Cette soustraction se fait en prenant simplement cet exposant dans le sens négatif. Il en résultera une puissance à exposant négatif, équivalente au quotient qui résulte en divisant l'unité par cette meme puissance à exposant positif.

324. D'après ce principe, une fraction quelconque peut être mise sur le champ sous la forme de puissance, en écrivant simplement le dénominateur, et en lui donnant pour exposant — 1.

Un tiers est équivalent à 3^{-1} .

Un quart est la même chose que 4^{-1} .

Et ainsi des autres.

325. Si le dénominateur de la fraction est un carré, on mettra simplement la racine de ce carré, et on lui donnera pour exposant — 2.

Un neuvième est équivalent à 3^{-2} .

Un centième est la même chose que 10^{-2} .

Et ainsi des autres.

326. De même si le dénominateur de la fraction est un cube, on écrira la racine cubique du dénominateur, et on lui donnera — 3 pour exposant.

$\frac{1}{8}$ est la même chose que 2^{-3} .

$\frac{1}{125}$ est l'équivalent de 5^{-3} .

$\frac{1}{1000}$ est équivalent de 10^{-3} .

Et ainsi des autres.

327. Une puissance quelconque peut aussi bien qu'un simple nombre, être élevé à un exposant donné. Il en résultera, ce qu'on peut appeler *puissance de puissance*. Il y aura deux exposants alors, savoir : l'ancien exposant de la puissance, et le nouvel exposant auquel cette puissance entière doit être élevée.

328. Le résultat de cette opération sera évidemment une nouvelle puissance de la même base, ayant pour exposant le produit des deux exposants dont on vient de parler.

329. Car pour faire le carré d'une puissance, il faudra multiplier cette puissance par elle-même; ce qui exigera qu'on double son exposant.

Le carré de 2^3 sera 2^6 .

Le carré de 5^7 sera 5^{14} etc.

330. Pour passer du carré au cube, il faudra multiplier le carré de la puissance par la puissance elle-même; ce qui en triplera l'exposant.

Le cube de 5^2 sera 5^6 .

Le cube de 7^3 sera 7^9 etc.

331. Il en sera de même lorsque du cube il faudra passer à la quatrième puissance et de celle-ci aux puissances d'un ordre supérieur. L'exposant que doit avoir la puissance d'une puissance proposée, sera le produit des deux exposants donnés.

Ainsi la troisième puissance de la quatrième sera la douzième. La cinquième puissance de la septième sera la trente-cinquième. Et ainsi des autres.

332. Il n'est pas difficile de prévoir comment d'une puissance quelconque on tirera la racine d'un ordre donné. Il faudra diviser l'exposant de cette puissance par le nombre qui désigne l'ordre de la racine qu'on en doit tirer.

333. Ainsi, pour tirer la racine quarrée d'une puissance, il faudra prendre simplement la moitié de son exposant. Car pour élever au quarré la nouvelle puissance qui en résulte, il faudra en doubler l'exposant, ce qui reproduira la puissance primitive.

La racine quarrée de 3^4 sera 3^2 . Car le quarré de 3^2 est 3^4 . De meme la racine quarrée de 5^6 sera 5^3 ; car le quarré de 5^3 est 5^6 .

La racine quarrée de 4^3 , d'après cette règle, sera $4^{3:2}$. Il seroit difficile sans doute de comprendre une puissance à exposant fractionnaire sous la définition générale que nous avons donnée de la puissance, et qui pour être intelligible, suppose nécessairement que l'exposant soit un nombre entier. Mais cela n'est pas nécessaire non plus. Il suffit que le quarré de $4^{3:2}$ soit 4^3 , d'où il suit que $4^{3:2}$ est la racine quarrée de 4^3 . Cela remplit entièrement l'idée qu'on se fait de la racine quarrée, d'un nombre quelconque; c'est le nombre dont il faudroit faire le quarré, pour retrouver le nombre proposé.

Par cette meme raison, la racine quarrée de 2^6 sera 2^3 . Celle de 3^7 sera $3^{7:2}$. Et ainsi des autres.

334. La racine quarrée d'un nombre quelconque peut donc être immédiatement mise sous la forme de puissance, en lui donnant *un demi* pour exposant.

Celle de 3 sera $3^{1:2}$. Celle de 5 sera $5^{1:2}$.

335. Pour tirer la racine cubique d'une puissance, il suffira de prendre le tiers de son exposant. Car pour faire le cube de la nouvelle puissance qui en résulte, il faudra, d'après la règle précédente, prendre le triple de l'exposant fractionnaire qu'on lui aura donné;

donné; ce qui reproduira la puissance primitive.

La racine cubique de 5^6 sera 5^2 ; car le cube de 5^2 est 5^6 . Celle de 7^{12} sera 7^4 ; car le cube de 7^4 est 7^{12} .

En suivant à la rigueur cette règle, dont rien certainement n'empêche la généralité, la racine cubique de 6^3 sera 6^1 ; celle de 5^4 sera $5^{\frac{4}{3}}$; celle de 2^5 sera $2^{\frac{5}{3}}$; et ainsi des autres.

336. La racine cubique d'un nombre quelconque peut être immédiatement mise sous la forme de puissance, en lui donnant *un tiers* pour exposant.

Celle de 49 sera $49^{\frac{1}{3}}$ ou $7^{\frac{2}{3}}$. Et ainsi des autres.

337. Il en est de même des racines d'un ordre quelconque. Il faudra diviser l'exposant de la puissance donnée par le nombre qui indique l'ordre de la racine. Divisant cet exposant par *deux*, par *trois*, par *quatre*, par *cinq*, on aura tiré la racine quarrée, la racine cubique, la racine quatrième, la racine cinquième de la puissance proposée.

338. Le calcul de la puissance, dont la base et l'exposant sont donnés, est donc très facile tant que cet exposant est un nombre entier. Si ce nombre est positif, l'élévation à la puissance ne suppose que la règle ordinaire de multiplication. S'il est négatif, il faudra faire une ou quelques divisions. Mais ce n'est plus la même chose, lorsque cet exposant est un nombre fractionnaire.

339. Tant que le dénominateur de cette fraction est ou *deux*, ou *trois*, ou bien un produit quelconque de ces nombres, soit entr'eux,

entr'eux, soit entre leurs puissances, tels que sont les nombres 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18 etc. le calcul de la puissance reviendra à des extractions de racine quarrée, ou de racine cubique. Au défaut d'une méthode semblable pour les racines des ordres supérieurs, tels que sont la racine *cinquième*, *septième*, *onzième* etc. on viendra toujours à bout de son problème, en y appliquant la règle de fausse position : le chapitre suivant nous en fournira des exemples. Dans le cas enfin qui est le plus fréquent de tous, où cet exposant seroit quelque nombre entier, ou bien *zéro*, suivi d'un certain nombre de décimales, il faudroit, sans le secours des logarithmes, renoncer absolument au calcul des puissances.

CHAPITRE SEIZIÈME.

LES PUISSANCES DE DIX.

340. Les puissances de dix à exposant entier ne sont sujettes à aucune difficulté. Elevant successivement ce nombre aux exposants 0, 1, 2, 3, 4 etc. il en résulte les produits très connus 1, 10, 100, 1000, 10000 etc. qui forment la progression naturelle de l'arithmétique décimale. Mais on rencontre des difficultés d'un genre entièrement nouveau, lorsque cet exposant est composé d'entiers et de décimales.

341. Commençons par nous occuper de la puissance de 10 à exposant 0,1 ou *un dixième*. Cette puissance n'est autre chose que la racine dixième de 10; ou bien, la racine quarrée de la cinquième. On tirera donc la racine cinquième de *dix*, en appliquant à ce problème la règle
de