

des index, qui est 52; ce qui donne pour la différence de la progression $1\frac{1}{4}$.

Exemple II. Soient les deux termes de la progression 41 et moins 59; répondant aux index 15 et 27. Ou aura

41 fois 27 égal à 1107

59 fois 13 égal à 767

Somme des produits 1874

Somme des termes 100

La division donne 18,74 pour l'index demandé; dont la valeur très approchée est $18\frac{3}{4}$.

En effet, la différence de la progression se trouve en divisant la somme des termes 100, par la différence des index qui est 14; ce qui donne $7\frac{1}{7}$ pour la différence demandée.

Le terme qui répond à l'index 18, sera donc $5\frac{2}{7}$; le terme immédiatement suivant sera moins $1\frac{6}{7}$; ce qui est à très peu près le tiers de l'autre. Le terme zéro de la progression doit donc se trouver aux trois quarts de la distance de l'index 18 à l'index 19.

296. Nous reservons pour l'analyse ce qui nous reste à dire sur les progressions arithmétiques d'un ordre quelconque, ainsi que sur la manière de trouver les sommes de leurs termes. L'arithmétique ne nous en donneroit que des connoissances très imparfaites.

CHAPITRE QUATORZIEME.

REGLE DE FAUSSE POSITION.

297. La règle de fausse position est une méthode ingénieuse, de résoudre généralement, à l'aide des nombres seuls, et sans le secours du calcul littéral, tous les problemes déterminés d'arithmétique, à une seule inconnue.

298. Le but qu'on se propose dans la solution d'un probleme quelconque, c'est de trouver un nombre qui satisfasse à une certaine condition clairement énoncée dans le probleme. Ce nombre est appelé l'inconnue du probleme; on la désigne ordinairement par x . Trouver cette inconnue, c'est résoudre le probleme.

299. On fait une fausse position, lorsque sans avoir égard à aucune circonstance quelconque, on met à la place de l'inconnue x , le premier nombre pris absolument au hasard. Examinant ensuite ce que devient par cette supposition, la condition énoncée dans le probleme, on trouvera ordinairement qu'elle n'en sera pas satisfaite; on verra en meme tems combien il s'en faut qu'elle le soit, et on marquera à part l'erreur exprimée en nombres, que cette fausse position aura produite.

300. La règle de fausse position ne donne des solutions rigoureuses que dans les cas où la question proposée est du premier degré. Dans tous les autres cas, l'application de cette règle suppose que par des moyens quelconques on se soit procuré une connoissance approchée de l'inconnue. Mais alors elle est d'un secours infiniment précieux, auquel le calculateur le plus exercé est obligé d'avoir recours, d'autant plus qu'elle surpasse en facilité et en généralité toutes les méthodes d'analyse connues.

301. On reconnoit que le probleme est du premier degré, lorsqu'après avoir supposé à l'inconnue x les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 etc.

L. 2

dans

dans la série naturelle des nombres, les erreurs qui résultent de cette suite de fausses positions, constituent entr'elles une progression arithmétique. L'on voit bien que les trois premières positions, savoir 0, 1, 2, etc. qu'il faut toujours préférer aux autres, comme étant les plus simples et les plus faciles, suffiront pour cet examen.

302. Lorsque donc la différence de la première erreur à la seconde, aura été égale à celle qui se trouve entre la seconde et la troisième, le problème sera du premier degré; et il pourra être résolu, en y employant la règle de fausse position.

303. Mais dans tous les cas où les deux différences en question n'auront pas été égales entr'elles, le problème sera d'un degré supérieur au premier, et il exigera pour sa solution rigoureuse le secours du calcul littéral; ce que nous verrons en son lieu.

Exemple I. *On demande deux nombres qui fassent ensemble la somme de 30, et dont le produit soit 221.*

Première position. Soit l'un des deux 0; l'autre sera donc 30; leur produit 0; erreur 221.

Seconde position. Soit l'un des deux 1; l'autre sera donc 29; leur produit 29; erreur 192.

Troisième position. Soit l'un des deux 2; l'autre sera donc 28; leur produit 56; erreur 165.

La différence de la première erreur à la seconde est 29; celle de la seconde à la troisième est 27. Ces deux différences ne sont pas égales. Il n'en faut pas davantage pour s'assurer, que la progression n'est pas arithmétique, que le problème passe le premier degré, et qu'ainsi il n'est pas du ressort de la règle de fausse position.

Exemple

Exemple II. On demande deux nombres dont la somme est 13; tandis que la différence de leurs quarrés est égale à 39.

Première position. Soit l'un deux 0; l'autre sera 13; quarré de l'un 0; quarré l'autre 169; différence des quarrés 169; erreur 130.

Seconde position. Soit l'un des deux 1; l'autre sera 12; quarré de l'un 1; quarré de l'autre 144; différence des quarrés 143; erreur 104.

Troisième position. Soit l'un des deux 2; l'autre sera 11; quarré de l'un 4; quarré de l'autre 121; différence des quarrés 117; erreur 78.

Les trois erreurs 130, 104, 78 sont le commencement d'une progression arithmétique; car la différence du premier nombre au second est 26; et telle est aussi la différence du second au troisième.

Ce problème est donc du premier degré; et on pourra le résoudre, en y appliquant la règle de fausse position.

On le résoudra sur le champ, en divisant la première erreur 130, par la différence 26: ce qui donne 5. L'un des deux nombres sera donc 5; l'autre sera 8; quarré de l'un 25; quarré de l'autre 64; différence des deux quarrés 39. Telle est la condition, à laquelle il falloit satisfaire.

Nous allons procéder à la démonstration de cette règle.

304. Nous avons dit que la règle de fausse position n'est applicable qu'aux problèmes du premier degré; c'est-à-dire, à ceux, dans lesquels, mettant à la place de l'inconnue x les nombres de la progression naturelle 0, 1, 2, 3 etc. les erreurs qui résultent de cette série de fausses positions, constituent entr'elles une progression arithmétique. Ces erreurs alors seront les termes de cette progression; ces termes auront pour leurs index respectifs les

les nombres memes 0, 1, 2, 3 etc. qu'on avoit substitués à l'inconnue x . La véritable valeur de l'inconnue sera le nombre, qui dans les memes circonstances fera disparoître l'erreur. L'inconnue x n'est donc autre chose que l'index, auquel répond le terme *zéro* de la progression.

305. Ce probleme a été résolu. Faites deux fausses positions, c'est-à-dire, supposez à l'inconnue x deux valeurs quelconques, choisies au hasard; et voyez quelles erreurs résultent de ces deux fausses positions. Multipliez chacune des deux positions par l'erreur que l'autre aura produite. Alors, si les deux erreurs sont affectées du meme signe, divisez la différence des produits par la différence des erreurs. Si elles sont affectées de différens signes, divisez la somme des produits par celle des erreurs. Le quotient dans les deux cas sera la véritable valeur de l'inconnue.

306. Toutes les fois que le probleme en question est du premier degré, l'inconnue déterminée d'après cette règle, remplira la condition énoncée dans le probleme. Si elle ne la remplit pas, il faut en conclure que le probleme en question passe le premier degré; et qu'ainsi sa solution rigoureuse n'est plus du ressort de la règle de fausse position.

307. Les valeurs qu'on voudra supposer à l'inconnue x , sont absolument arbitraires. Tous les nombres possibles, entiers ou fractionnaires, conduisent également au but. Mais pour cette raison même, les nombres les plus simples mériteront dans tous les cas d'être préférés aux autres. Or, il n'en est pas

pas de plus simples que zéro et un. Donc, en prenant zéro pour la première, et un pour la seconde position, la règle deviendra extrêmement simple. Divisez la première erreur par la différence des deux erreurs, si elles sont affectées du même signe, ce qui arrivera presque toujours. Si toutes fois dans quelque cas particulier elles étoient affectées de différens signes, il faudroit diviser la première erreur par la somme des deux erreurs. Le quotient dans les deux cas sera la valeur de l'inconnue.

Exemple I. *Un père à 50 ans; son fils en a 12. Dans combien d'années, à compter d'aujourd'hui, l'âge du père sera-t-il le triple de celui du fils?*

Dans ce moment même, le triple de l'âge du fils est 36, tandis que le père en a 50; erreur 14.

Dans un an d'ici, le fils aura 13 ans; le père en aura 51; le triple de l'âge du fils sera 39, ce qui n'est pas égal à 51; erreur 12.

Différence des deux erreurs 2. Divisant 14 par 2, on aura 7 pour le nombre d'années demandé.

En effet, dans 7 ans, le fils aura 19 ans; le père en aura 57; l'âge du père sera donc triple de celui du fils.

Exemple II. *On propose de partager 47 en deux parties, tellement, qu'en divisant la moindre par 3, et la plus grande par 5, les deux quotients fassent ensemble 11.*

Prenant 0 pour la moindre des deux, la plus grande sera 47. Il en résultera les deux fractions 0 et $\frac{47}{5}$. La somme des deux ne fait pas 11; il s'en faut de $\frac{8}{5}$ ou $\frac{16}{10}$.

Prenons 1 pour la moindre des deux. La plus grande sera 46. Il en résultera les deux quotiens $\frac{1}{3}$ et $\frac{46}{5}$; dont la somme $\frac{1+46}{15}$ ne fait pas 11 non plus; il s'en faut de $\frac{22}{15}$.

Diffé-

Différence des deux erreurs $\frac{2}{15}$. Divisant 24 par 2, on aura 12 pour la moindre, et par conséquent 35 pour la plus grande des deux. Il en résultera les deux quotiens 4 et 7, qui font 11.

Exemple III. *Deux coupes d'argent, inégales en poids, ont un couvercle commun, du poids de 11 marcs. Le poids des deux coupes est tel, que la première avec le couvercle pèse trois fois plus que l'autre; tandis que celle-ci avec le couvercle pèse quatre fois autant que la première. On demande quel étoit le poids des deux coupes.*

Supposons à la première le poids zéro. Avec le couvercle elle pesera donc 11; et d'après ceci le poids de la seconde coupe auroit été $\frac{11}{3}$. Celle-ci avec le couvercle auroit donc pesé 11 plus $\frac{11}{3}$ ou $\frac{44}{3}$; et comme alors elle devoit peser quatre fois plus que la première, le poids de celle-ci auroit été $\frac{11}{3}$, et non zéro. Erreur $\frac{11}{3}$.

Supposons à la première le poids 1. Avec le couvercle elle auroit donc pesé 12; ce qui donneroit 4 pour le poids de la seconde coupe. Cette dernière auroit donc pesé avec le couvercle 11 plus 4, ou 15; et comme alors elle doit peser quatre fois plus que la première, le poids de celle-ci auroit donc été $\frac{15}{4}$. Mais ce poids a été supposé 1; erreur $\frac{11}{4}$.

Différence des deux erreurs $\frac{11}{3}$ moins $\frac{11}{4}$; ce qui fait $\frac{11}{12}$. Divisant la première erreur $\frac{11}{3}$ par cette différence $\frac{11}{12}$, on aura 4 pour le poids de la première coupe: ce qui donne 5 pour le poids de la seconde coupe.

En effet, la première coupe alors pesera avec le couvercle 15; ce qui est trois fois le poids de la seconde coupe. Celle-ci avec le couvercle pesera 16, ce qui est quatre fois le poids de la première coupe. Le problème est donc résolu.

308. Souvent, en adoptant les deux fausses positions *zero* et *un*, il faudroit, pour continuer le calcul, employer les quantités négatives, qu'il est convenable d'éviter. Cela sera
tou-

toujours possible, en prenant des nombres plus grands. Il faudra donc prendre pour la premiere position un nombre tel, que toutes les soustractions, exigées par l'application de la règle, laissent à la fin un reste positif.

309. Quoique la seconde position soit encore aussi arbitraire que l'autre, on facilitera cependant beaucoup l'opération, en prenant pour la seconde valeur de l'inconnue, celle qu'on avoit supposée en premier lieu, augmentée d'une unité. La règle alors deviendra très facile. Divisez la premiere erreur par la différence des deux erreurs, et ajoutez au quotient la premiere valeur qu'on avoit supposée à l'inconnue:

Exemple I. *On a loué un ouvrier paresseux à raison de 45 sous pour les jours qu'il travailleroit; mais à condition de lui retenir sur ce qu'il lui seroit dû 12 sous, pour chaque jour qu'il ne travailleroit pas. On lui fait son compte au bout de 30 jours; il se trouve qu'il ne lui est dû que 39 sous. On demande combien de jours il a travaillé?*

Supposons qu'il eut travaillé 12 jours: et qu'ainsi il n'eut rien fait pendant 18 jours. Il lui reviendrait donc 540 sous pour les premiers, sur lesquels il faudroit rembourser 216 sous pour les seconds. Il lui seroit donc dû 324 sous. Mais il lui est effectivement dû 39 sous; erreur 285 sous.

Supposons qu'il eut travaillé 13 jours; et qu'ainsi il n'eut rien fait pendant 17 jours. Il lui reviendrait donc 585 sous pour les uns; sur lesquels il faudroit rembourser 204 sous pour les autres. Il lui seroit donc dû 381 sous. Mais il ne lui est réellement dû que 39 sous. Erreur 342 sous.

Différence des deux erreurs 57 sous. Divisant la premiere erreur 285 par 57, on a pour quotient 5. Mais comme la seconde erreur est plus grande que la premiere, ce qui indique une progression
crois-

croissante, ces 5 doivent être pris négativement; et au lieu de les ajouter à la première fausse position 12, il faut les en ôter.

Restera donc 7 pour le nombre des jours qu'il a travaillé; et 23 pour les autres. Il lui reviendra pour les premiers 315 sous, sur lesquels il faudra rembourser 276 sous. Il lui est donc dû en effet 39 sous.

Exemple II. *Voulant faire l'aumône à plusieurs pauvres à la fois, et donner trois sous à chacun, il faudroit avoir neuf sous de plus qu'on n'a réellement. On ne leur en donne donc que deux; et alors on a deux sous de reste. On demande combien on doit avoir eu de sous; et combien il y avoit de pauvres.*

Le nombre des sous doit être égal, d'un côté, à trois fois le nombre des pauvres, moins neuf. Il doit être en même tems égal à deux fois le nombre des pauvres, plus deux.

Supposons d'abord, qu'il y eut en quatre pauvres. On auroit donc eu en même tems 3 sous et 10 sous. Il s'en faut de 7 que ces deux nombres soient égaux entr'eux. Erreur : 7.

Supposons qu'il y eut en cinq pauvres. On auroit donc eu en même tems 6 sous et 12 sous. Il s'en faut de 6 que ces deux nombres soient égaux entr'eux. Erreur : 6.

Différence des erreurs 1. On aura 7 pour quotient. Ajoutant à ce nombre la première de nos deux fausses positions, qui est 4, il en résultera le nombre des pauvres, 11. Le nombre des sous a été, d'un côté, 3 fois 11 moins 9; de l'autre, 2 fois 11, plus 2. L'un et l'autre donne 24.

310. Souvent, pour éviter les fractions, il est convenable de supposer à l'inconnue des valeurs exactement divisibles par de certains nombres; et deslors on ne pourra plus les prendre de matière qu'elles diffèrent entr'elles d'une unité. Il faudra employer alors la règle
géné-

générale ; on multipliera donc chacune des deux valeurs par l'erreur que l'autre aura produite ; et on divisera la différence des produits par celle des erreurs.

Exemple. *Les trois héritiers d'une succession la partagent entr'eux de la manière suivante. Le premier en prend la moitié, moins 1000. Le second en prend le tiers, moins 800. Le troisième en prend le quart, moins 600. On demande quelle doit avoir été cette succession.*

Comme il est convenable de choisir un nombre, divisible par 2, 3 et 4, prenons d'abord 3600, pour valeur supposée de la succession. Dans cette supposition,

le premier auroit eu 1800 moins 1000 ou 800 ;
le second auroit eu 1200 moins 800 ou 400 ;
le troisième auroit eu 900 moins 600 ou 300.

La somme de ces trois nombres n'est que 1500 ; erreur 2100.

Prenons 4800. Dans cette supposition

le premier auroit eu 2400 moins 1000 ou 1400 ;
le second auroit eu 1600 moins 800 ou 800 ;
le troisième auroit eu 1200 moins 600 ou 600.

La somme des trois nombres n'est que 2800 ; erreur 2000.

Différence des deux erreurs 100.

le premier produit 3600 fois 2000 ou 7200000.

le second produit 4800 fois 2100 ou 10080000.

Différence des produits 2880000. Cela donne pour valeur de la succession 28800. Les portions des trois héritiers seront alors 13400, 8800, 6600, qui font effectivement ensemble 28800.

311. La regle de fausse position seroit bien inférieure au moindre chapitre de l'algebre, si elle se bornoit simplement aux problemes
du

du premier degré. Mais lorsque par des moyens quelconques on s'est procuré une connoissance approchée de l'inconnue, cette règle devient applicable à tous les problèmes déterminés, quels qu'ils puissent être, sans en excepter un seul. Elle surpasse alors en facilité et en généralité, non seulement toutes les méthodes rigoureuses de haute analyse qui ont été inventées jusqu'ici, mais encore toutes celles qui pourront être inventées par la suite.

312. Nous avons vu que la règle de fausse position n'est rigoureusement applicable qu'aux problèmes du premier degré; c'est-à-dire, à ceux, où supposant à l'inconnue une suite de valeurs en progression arithmétique, la série des erreurs qui en résultent, constitue pareillement une progression arithmétique.

313. Mais quelque puisse être la loi d'après laquelle une quantité quelconque procède, il faut observer que dans des intervalles très petits, les accroissemens et les décroissemens de cette quantité se font toujours par différences sensiblement égales. Une ligne courbe quelconque diffère sans doute de la ligne droite; mais une portion de cette courbe en diffère moins que la courbe entière; plus cette portion devient petite, et moins elle différera de la ligne droite; enfin, considérant la courbe entière comme composée d'un grand nombre d'éléments fort petits, chacun de ces éléments à part pourra être confondu sensiblement avec la ligne droite, quelle que soit d'ailleurs la loi à laquelle cette courbure est assujettie.

314. Quelle que soit le probleme proposé, on ne sera jamais embarrassé de trouver une valeur plus ou moins approchée de l'inconnue; et au défaut d'une règle générale, on sera sur d'y parvenir toujours en tatonnant. Ce tatonnement ne causera jamais de peine au calculateur le moins exercé; et toujours on en aura beaucoup plutôt fini, que si on avoit suivi les préceptes rigoureux de l'algèbre, dans le petit nombre de problemes supérieurs au second degré, qu'elle est en état de résoudre.

315. Ayant une valeur approchée de l'inconnue, on lui en joindra une seconde, prise à volonté, pourvu qu'elle diffère peu de l'autre; et on appliquera à ces deux valeurs la règle de fausse position. Le résultat qu'elle donnera, sera déjà beaucoup plus approchant de la véritable valeur de l'inconnue, que les deux nombres qu'on avoit supposés. Cette seconde valeur approchée en fera trouver une troisième, en y appliquant de nouveau la règle de fausse position. Dans la plupart des cas cette troisième valeur, résultat d'un tatonnement et de deux règles de fausse position, sera exacte jusqu'à la sixième, et même jusqu'à la septième décimale. On n'aura besoin d'une troisième application de la règle, que lorsqu'on voudra connoître la valeur de l'inconnue jusqu'à douze ou quinze décimales.

Exemple I. On demande un nombre tel, que si on l'ôte de son cube, il reste 1.

Ce probleme est du troisième degré. En suivant les préceptes rigoureux de l'algèbre, il faudroit, pour parvenir à l'inconnue, faire une extraction de racine quarrée, et deux extractions de racine cubique.

La

La règle de fausse position nous dispensera de l'un et de l'autre.

Un tâtonnement assez facile nous fait voir, que le nombre demandé doit être compris entre 1, 3 et 1, 4. En effet :

Première position : $x = 1, 3$. Le cube de $x = 2, 197$. Il restera 0, 897. On aura donc une erreur en moins, égale à 0, 103.

Seconde position : $x = 1, 4$. Le cube de $x = 2, 744$. Il restera 1, 344. On aura donc une erreur en plus, égale à 0, 344.

Somme des produits 0, 5914.

Somme des erreurs 0, 447.

Divisant la première par la seconde, on aura pour quotient 1, 323... valeur déjà fort approchée de l'inconnue. En effet :

Première position : $x = 1, 323$. Le cube de x se trouve 2, 515685267. Otant 1, 323 il restera 0, 992685267. L'erreur ne sera donc que de 0, 007314733. Essayons donc une

Seconde position : $x = 1, 324$. Le cube de x sera alors 2, 520940224. Otant 1, 324 il restera 0, 996940224. L'erreur ne sera donc que de 0, 003059776.

Différence des produits 0, 005636623.

Différence des erreurs 0, 004254957.

La division donne 1, 324719 pour seconde valeur approchée de l'inconnue. Elle est exacte jusqu'à la sixième décimale ; l'erreur ne commenceroit à se montrer qu'à la septième. Une troisième opération en feroit trouver les douze premières décimales.

Exemple II. On demande un nombre tel, que si de son cube on ôte son quarré, il reste 1.

Ce problème est encore du troisième degré. Sa solution rigoureuse exigeroit d'abord qu'on fit évanouir le second terme par une réduction préalable ;
après

après quoi il faudroit encore faire une extraction de racine quarrée, et deux extractions de racine cubique. La regle de fausse position y conduit bien plus directement.

En formant les quarrés et les cubes de 1,3, 1,4, 1,5, on voit sur le champ que le nombre en question doit être compris entre 1,4 et 1,5. Donc

Premiere position : $x = 1,4$. Quarré de $x = 1,96$; son cube 2,744; excès du cube sur le quarré 0,784; erreur *en moins* 0,216.

Seconde position : $x = 1,5$. Quarré de $x = 2,25$; son cube 3,375; excès du cube sur le quarré 1,125; erreur *en plus* 0,125.

Somme des produits 0,499.

Somme des erreurs 0,341.

La division donne 1,463 valeur déjà très approchée de l'inconnue. Pour continuer l'opération, nous ferons les deux fausses positions 1,463 et 1,465.

Premiere position : $x = 1,463$. Quarré de $x = 2,140369$; son cube 3,011659847; excès du cube sur le quarré 0,871290847; erreur 0,990990847.

Seconde position : $x = 1,465$. Quarré de $x = 2,146225$; son cube 3,144219625; excès du cube sur le quarré 0,997994625; erreur 0,002005375.

Différence des produits 0,010264545.

Différence des erreurs 0,007003778.

Divisant la premiere différence par la seconde, on trouve 1,465572 pour valeur de l'inconnue qu'on demandoit. Cette valeur est exacte jusques dans la sixième décimale.

Exemple III. *On demande un nombre tel que si de son cube, on ôte sa racine quarrée, il reste 1.*

Sans la règle de fausse position, l'analyse le plus exercé seroit encore bien embarrassé de résoudre ce probleme. Il conduit à une équation du sixième degré, et malheureusement tout ce qui est au-dessus du quatrième, se trouve hors de la portée de l'analyse.

La règle de fausse position nous en donnera la solution sur le champ. On voit d'abord que le nombre demandé, certainement plus grand que 1,2 doit être un peu moindre que 1,3. En effet, faisant la

Première position $x = 1,5$; on trouve le carré de $x = 1,69$; son cube 2,197; sa racine carrée 1,140175; il reste 1,056825; il y a donc une erreur *en plus*, égale à 0,056825. Donc, essayant la

Seconde position $x = 1,29$; on trouve le carré de $x = 1,6641$; son cube 2,146689; sa racine carrée 1,135782. Elle laisse un reste égal à 1,010907. Il y a donc une erreur *en plus*, égale à 0,010907.

Différence des produits 0,0591251.

Différence des erreurs 0,045918.

La division donne 1,2876 pour valeur approchée de l'inconnue. En effet le carré de ce nombre est 1,65791376; son cube 2,13472976; sa racine carrée 1,13472464. Il y a donc un reste égal à 1,00000512 qui ne diffère de l'unité que d'un seul deux-cent-millième. On peut donc être certain que l'erreur que cette règle peut avoir laissée, est certainement au-dessous d'un deux-cent-millième; peut-être elle n'excède guères un millionième. Une seconde opération feroit trouver la valeur de l'inconnue jusqu'à douze décimales.

CHAPITRE QUINZIEME.

LES PUISSANCES, EN GÉNÉRAL.

316. Les *Puissances* d'un nombre sont les produits qui résultent de la multiplication de ce nombre plusieurs fois par lui-même. Ce nombre alors est appelé *base de la puissance*; le nombre total des facteurs égaux qui entrent dans