

CHAPITRE TREIZIEME.

LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

281. Toute série de nombres, qui croissent ou qui décroissent par différences égales, est appelée *Progression Arithmétique*. Elle est *croissante* dans le premier cas; *décroissante* dans le second cas.

La progression 15, 17, 21, 25, 29 etc. est une progression, arithmétique, ayant 4 pour différence constante.

Si on la lit de gauche à droite, elle est croissante, jusques dans l'infini; n'y ayant rien dans sa définition qui doive la borner à un certain terme. On est libre de regarder comme dernier terme celui qu'on voudra; mais on est également libre de calculer encore un nombre quelconque de termes après celui-ci, par de nouvelles additions de la même différence.

Si on la lit de droite à gauche, dans l'ordre suivant: 29, 25, 21, 17, 13 etc. alors cette même progression prend le nom de décroissante.

Pour trouver les termes de cette progression qui viennent après 13, il faut en ôter la différence 4; on aura 13, 9, 5, 1.

Pour continuer la progression au delà de 1, il faudra d'abord en ôter 4. Cette soustraction sera-t-elle possible? Sans doute. Il restera 3; mais il faut observer que ces 3 doivent être pris dans un sens absolument opposé. Si tous les termes précédens de la progression désignaient de certaines sommes en argent comptant, ces 3 seroient alors ce qui resteroit à un homme, qui n'ayant qu'un seul franc dont il pourroit disposer, feroit une dépense de quatre francs. Cela seroit très possible; et il resteroit alors à cet homme trois francs de dettes.

Pour distinguer ces trois francs de ce qu'ils seroient, s'ils étoient pris dans le sens ordinaire, on

on mettra au 'devant d'eux une petite barre horizontale. Le terme de la progression susdite qui suivra immédiatement l'unité sera donc -3 ou *moins trois* ; parce qu'en effet ces *moins trois* font une quantité moindre que zéro ; il faudroit lui ajouter *plus trois*, pour la réduire à zéro.

Les termes subséquens de la progression susdite seront par la même raison -7 , -11 , -15 et ainsi de suite, jusques dans l'infini.

Ces termes sont appelés *négatifs* par rapport aux autres, qu'alors on regarde comme *positifs*.

Ce n'est pas ici le lieu de nous étendre sur le calcul des quantités négatives, qui proprement est un objet d'analyse. On remarquera simplement, qu'ajouter une quantité négative, c'est comme si on ôtoit une quantité positive ; et réciproquement, qu'ôter une quantité négative, c'est comme si on faisoit l'addition d'une quantite positive.

282. Une progression arithmétique est donc composée de deux branches infinies, et parfaitement égales entr'elles, sur l'une desquelles se trouvent les termes positifs, tandis que les négatifs sont placés sur l'autre.

283. Par cette meme raison il y aura toujours un endroit de la progression où se fait le passage du positif au négatif, et pour lequel le terme correspondant de la progression est égal à zéro. Mais on n'est pas obligé de regarder ce terme comme le premier de la progression ; la définition nous laisse une entière liberté, de prendre pour premier terme celui qu'on voudra.

284. Un terme quelconque d'une progression arithmétique croissante, est égal à celui qu'on veut regarder comme premier, *plus*
la

la différence, multipliée par le nombre des termes *moins* un.

285. Un terme quelconque d'une progression arithmétique décroissante est égal à celui qu'on veut regarder comme premier, *moins* la différence, multipliée par le nombre des termes *moins* un.

On demande le treizième terme de la progression 5, 12, 19, 26 etc.; ayant 5 pour son premier terme, et 7 pour différence. Il sera égal à 5 *plus* 12 fois 7, ou 89.

On demande le douzième terme de la progression décroissante 159, 148, 137, 126 etc. dont le premier terme est 159, la différence 11. On aura 159 *moins* 11 fois 11; ou 159 *moins* 121; ce qui fait 38.

On demande le dix-neuvième terme de cette même progression? On aura pour ce terme 159, *moins* 18 fois 11; ou 159 *moins* 198. Ce terme sera donc négatif, savoir -39 .

286. Il y a de l'avantage quelque fois, à donner au terme qu'on veut regarder comme premier, le numéro ou l'index *zéro*; aux autres par ordre 1, 2, 3, 4 etc. Les termes qui précèdent le premier, auront alors des numéros ou des index négatifs.

287. En adoptant cette dénomination, un terme quelconque de la progression sera égal au premier, plus ou moins la différence multipliée par l'index, suivant que la progression est croissante ou décroissante.

288. L'index qui répond à un terme quelconque de la progression, se trouve en ôtant de ce terme le premier de la progression, et

en

en divisant le reste par la différence de la progression.

Toutes les fois donc que la différence entre les deux termes n'est pas divisible par la différence de la progression, l'index qui en résulte pour l'un des deux termes, est un nombre fractionnaire.

Soit le premier terme d'une progression arithmétique 7; la différence 3; on demande l'index au quel répond le terme 30? la règle donne 23 divisés par 3, ou $7\frac{2}{3}$. Le terme 30 trouvera donc sa place aux deux tiers de la distance du huitième terme 28 au neuvième 31.

289. *Connoissant deux termes quelconques de la progression, avec leurs index respectifs, on demande la différence de la progression?* Comme les termes doivent croître et décroître également, on n'aura qu'à diviser la différence des termes par celle des index.

Soient 67 et 32 les termes d'une progression arithmétique qui répondent aux index 11 et 18. La différence des termes est ici 35; celle des index est 7; divisant 35 par 7, on aura 5; telle est la différence qu'on cherchoit.

290. Si le premier terme de la progression est zéro, on trouvera chacun des autres, en multipliant la différence par l'index qui répond à ce terme. Les termes alors croîtront et décroîtront dans la même proportion que les index eux-mêmes. Cette proposition très simple mène naturellement au problème suivant, auquel se réduit la règle des fausses positions.

291. *Etant donnés deux termes quelconques d'une progression arithmétique avec leurs index respectifs, trouver à quel index répond le terme zéro de la progression?* Multipliez chacun

chacun des deux termes par l'index de l'autre, et divisez la différence des deux produits par celle des deux termes: le quotient de la division sera l'index auquel répond le terme zéro.

292. L'application de cette règle suppose que les deux termes, ainsi que les deux index sont affectés du même signe; et qu'ainsi on peut les regarder comme positifs tous les deux. Cela étant, il est clair que dans le cas d'une progression décroissante, l'index qu'on a trouvé devra être pris dans le sens des deux index donnés; tandis qu'il faudra le prendre dans le sens opposé, si la progression est croissante, parce qu'alors le commencement de la progression doit avoir lieu avant le terme qu'on considère comme premier.

Exemple. La progression étant telle qu'aux index 5 et 14 répondent les termes 65 et 20, de manière que 65 en soit le sixième terme, et que 20 en soit le quinzième, on demande l'index auquel répond le terme zéro. Vous aurez

5 fois 20 égal à 100;

14 fois 55 égal à 910;

différence des produits 810;

différence des termes 45.

Divisant 810 par 45, vous aurez 18; tel est l'index que vous cherchez. Le terme zéro sera donc le dix-neuvième de la progression.

293. La démonstration de cette règle supposeroit dans sa généralité l'emploi du calcul littéral: ce qui nous empêche de la donner ici. Au défaut de ce calcul le procédé suivant peut nous faire connoître, que la règle qu'on vient de donner, contient effectivement la solution du problème.

Prenons

Prenons l'exemple précédent. Supposons que les termes de la progression, qui répondent aux index 5 et 14, soient 65 et 20; et cherchons, sans employer la règle précédente, à quel index répond le terme de la progression, que l'on trouveroit égal à zéro, si elle étoit continuée. Divisant la différence des deux termes donnés 65 et 20, qui est 45, par celle des index 5 et 14, qui est 9, on aura la différence de la progression, en vertu de 289. Dans le cas présent, cette différence sera donc 5.

Le terme qui répond à l'index 14, étant 20, la question proposée sera donc réduite à la suivante : *combien de fois pourra-t-on ôter encore 5 de 20, pour qu'il reste 0?* On n'aura qu'à diviser 20 par 5; ce qui donne 4 pour quotient.

Le terme zéro de la progression sera donc le quatrième après celui qui est 20; et comme celui-ci avoit pour index 14, l'autre aura pour index 18; ce qui revient au résultat obtenu par la règle.

294. Souvent, et même dans la plupart des cas, la règle donnera pour l'index qu'on cherche, une valeur fractionnaire. Dans ces cas, le terme zéro ne se trouvera pas parmi ceux de la progression; le passage du positif au négatif ayant immédiatement lieu alors, sans qu'aucun terme de la progression, qui ait pour index un nombre entier, soit dans le cas de s'évanouir.

Exemple. La progression étant telle qu'aux index 9 et 16 répondent les termes 47 et 19, on demande à quel index la progression s'évanouit?

$$\text{On aura } 9 \text{ fois } 19 = 171;$$

$$16 \text{ fois } 47 = 752;$$

$$\text{différence des produits} = 581;$$

$$\text{différence des termes} = 28;$$

Divisant 581 par 28, ou 83 par 4, on trouvera que le terme de la progression zéro répond à l'index $20 \frac{3}{4}$.

La différence de cette progression est 4; elle se trouve en divisant la différence des termes 47 et 19, qui est 28, par celle des index 9 et 16, qui est 7. On voit donc qu'aux index 16, 17, 18, 19, 20 doivent répondre les termes successifs 19, 15, 11, 7, 3. Continuant à ôter cette même différence 4 du dernier terme 3, qui répond à l'index 20, on aura pour reste -1 ; tel est le terme qui aura pour index 21. Le terme *zéro* aura lieu aux trois quarts de la distance entre 20 et 21; son index sera donc $20\frac{3}{4}$; et c'est là que la progression s'évanouit.

295. En donnant la règle pour trouver l'index de la progression auquel répond le terme *zéro*, nous avons supposé aux deux termes donnés de la progression, des valeurs positives. Si au contraire le premier de ces deux termes étoit positif, et l'autre négatif, ce qui dans l'application de la règle changeroit la soustraction en addition, il faudroit encore multiplier chacun des deux termes par l'index de l'autre, mais diviser ensuite la somme des deux produits par la somme des deux termes. La règle alors donnera pour l'index qu'on cherchoit, un nombre moyen entre les deux index donnés. Et en effet, les deux termes donnés étant l'un positif, l'autre négatif, il faudra bien que le terme *zéro* tombe entre les deux.

Exemple I. Soient les deux termes de la progression 35 et moins 30; répondant aux index 26 et 78. On aura

$$\begin{array}{rcl} 35 \text{ fois } 78 & \text{égal à} & 2730; \\ 30 \text{ fois } 26 & \text{égal à} & 780; \\ \text{Somme des produits} & & 3510; \\ \text{Somme des termes} & & 65. \end{array}$$

La division donne 54, pour l'index demandé. La différence de cette progression se trouve, en divisant la somme des deux termes, 65, par la différence

$$\begin{array}{cc} \text{L} & \text{des} \end{array}$$

des index, qui est 52; ce qui donne pour la différence de la progression $1\frac{1}{4}$.

Exemple II. Soient les deux termes de la progression 41 et moins 59; répondant aux index 15 et 27. Ou aura

41 fois 27 égal à 1107

59 fois 13 égal à 767

Somme des produits 1874

Somme des termes 100

La division donne 18,74 pour l'index demandé; dont la valeur très approchée est $18\frac{3}{4}$.

En effet, la différence de la progression se trouve en divisant la somme des termes 100, par la différence des index qui est 14; ce qui donne $7\frac{1}{7}$ pour la différence demandée.

Le terme qui répond à l'index 18, sera donc $5\frac{2}{7}$; le terme immédiatement suivant sera moins $1\frac{6}{7}$; ce qui est à très peu près le tiers de l'autre. Le terme zéro de la progression doit donc se trouver aux trois quarts de la distance de l'index 18 à l'index 19.

296. Nous reservons pour l'analyse ce qui nous reste à dire sur les progressions arithmétiques d'un ordre quelconque, ainsi que sur la manière de trouver les sommes de leurs termes. L'arithmétique ne nous en donneroit que des connoissances très imparfaites.

CHAPITRE QUATORZIEME.

REGLE DE FAUSSE POSITION.

297. La règle de fausse position est une méthode ingénieuse, de résoudre généralement, à l'aide des nombres seuls, et sans le secours du calcul littéral, tous les problemes déterminés d'arithmétique, à une seule inconnue.