

métique nous offre dans les logarithmes, dont nous aurons à parler bientôt, un moyen infailible, de déterminer presque par un trait de plume, et pour un nombre quelconque proposé, non seulement les racines quarrées et cubiques, mais aussi celles des ordres supérieurs, quels que soient d'ailleurs leurs exposants. Le seul cas qui obligerait le calculateur, d'employer l'extraction de la racine cubique, seroit celui, où pour le moment il n'auroit pas ses tables de logarithmes sous la main. Mais ce cas n'arrivera guères; les géomètres connoissent trop le besoin qu'ils ont de ces tables à chaque instant, pour s'engager sans elles dans une opération quelconque.

CHAPITRE HUITIEME.

LA RÈGLE DE TROIS SIMPLE.

211. Dans le quatrième chapitre nous avons examiné les rapports des nombres en général, considérés comme abstraits, et ne désignant aucune espèce déterminée. Reste donc à enseigner l'application qu'il faut faire de ces principes généraux, aux quantités dont l'espèce est déterminée.

212. On dit qu'en général une chose est en rapport avec une autre, lorsqu'elle en dépend d'une manière quelconque; lorsque l'une des deux venant à changer, l'autre ne sauroit conserver non plus la valeur qu'elle avoit; lorsqu'enfin, pour déterminer l'une avec telle précision que ce soit, il faut connoître l'autre.

Trois voyageurs marchant ensemble, ont employé sept jours pour faire un certain voyage; on demande le tems qu'ils y mettront, étant au nombre de treize?

Cette question n'a aucun sens raisonnable, parce que le tems qu'on demande, est absolument indépendant du nombre des voyageurs, et qu'il n'y a aucun-rapport entre ces deux choses.

Mais trois voyageurs allant ensemble, ont dépensé la somme de sept-cent francs pour faire un certain voyage: on demande la dépense qu'ils feront, étant au nombre de treize?

Cette question est très raisonnable, parce que la dépense journaliere de chaque voyageur étant connue, la dépense totale dépend naturellement du nombre des voyageurs, et que par conséquent il existe un rapport entre ce nombre et la dépense totale.

213. On dit qu'une chose est en *rapport direct* avec une autre, lorsque la liaison qui existe entr'elles est telle, que l'une venant à augmenter, l'autre en est augmentée de meme; ou bien, lorsque l'une étant diminuée, il faut pareillement diminuer l'autre.

214. Lorsqu'au contraire cette liaison est telle, que l'une des deux venant à augmenter, l'autre en est diminuée; ou que, l'une étant diminuée, il faut augmenter l'autre, tellement que l'une des deux est d'autant plus grande, que l'autre est plus petite, elles se trouvent alors en *rapport inverse* l'une avec l'autre.

Deux hommes marchant avec une vitesse égale, l'un pendant trois heures, l'autre pendant cinq heures, on demande lequel des deux aura fait le plus de chemin.

Il est évident que ce sera le dernier, ou en général celui, qui aura été le plus longtems en route.

Donc,

Donc, toutes choses étant d'ailleurs égales, l'espace parcouru sera en rapport direct avec le tems.

Mais deux hommes ayant fait le voyage de Cologne à Paris, l'un en sept jours, l'autre en quinze jours, on demande lequel des deux doit y avoir mis le plus de vitesse.

Ce sera celui des deux, qui aura été le moins de jours en route.

Donc, toutes choses étant d'ailleurs égales, la vitesse est en rapport inverse avec le tems.

Ayant employé, durant un certain nombre de jours, une fois trente ouvriers, une autre fois quarante ouvriers, on demande laquelle de ces deux fois il y aura eu le plus d'ouvrage de fait.

Les quarante en auront naturellement fait plus que les trente, en proportion de leur plus grand nombre.

Ainsi, toutes choses étant d'ailleurs égales, le nombre des ouvriers sera en proportion directe de l'ouvrage qu'ils auront fourni.

Mais ayant employé à un certain ouvrage, une fois trente ouvriers, une autre fois quarante ouvriers, on demande laquelle de ces deux fois cet ouvrage aura été le plutôt achevé.

Il est clair que les quarante ouvriers l'auront plutôt fini que les trente.

Donc, toutes choses étant d'ailleurs égales, le tems est en rapport inverse du nombre des ouvriers qu'on a employés.

Deux jardins étant inégaux en superficie, tandis que la nature du sol est absolument la même pour les deux, on demande lequel des deux pourra rapporter le plus.

Ce sera le plus spacieux des deux.

Donc, toutes choses étant égales d'ailleurs, la superficie d'un jardin est en rapport direct avec la quantité des denrées, qu'il pourra rapporter.

Mais deux jardins de forme rectangulaire étant absolument égaux en superficie, l'un des deux a quarante toises de long, tandis que la longueur de l'autre est de soixante toises, on demande lequel des deux aura le plus de largeur?

Ce sera naturellement celui, qui aura le moins de longueur.

Donc, la surface du jardin restant la même, sa longueur et sa largeur doivent être en raison inverse l'une de l'autre.

Ces exemples seront plus que suffisants pour expliquer ce qu'on entend par rapport direct, et par rapport inverse.

215. On dit qu'une quantité est en *rapport géométrique* avec une autre quantité de différente espèce, lorsque les nombres par lesquels elles sont désignées toutes les deux, constituent dans tous les cas une véritable proportion géométrique.

216. Donc, pour qu'une quantité soit en rapport géométrique direct avec une autre quantité de différente espèce, il faut que l'une des deux étant augmentée dans un rapport numérique quelconque, l'autre soit augmentée dans le même rapport.

217. Ici les anciens employoient un terme particulier, et très propre pour désigner la chose : c'étoit celui d'*équimultiple*. Une quantité ne sauroit être en rapport géométrique direct avec une autre de différente espèce, à moins que les nombres qui désignent successivement l'une, ne soient équimultiples de ceux qui dans les mêmes cas expriment l'autre.

218. Lorsque deux quantités sont en rapport géométrique direct entr'elles, elles s'évanouissent en même tems; de manière que l'une des deux étant supposée égale à zéro, l'autre devient zéro de même.

219. Pareillement, si l'une des deux étoit supposée infiniment grande, l'autre en devient droit infiniment grande aussi; de manière que s'il étoit possible de les poursuivre jusque dans l'infini, on verroit régner entr'elles le même rapport, qui avoit lieu dans le fini.

Ayant deux quantités différentes d'une même marchandise, et connoissant ce qu'a coûté l'une, on demande ce que coutera l'autre.

Le prix total de la marchandise croît naturellement avec sa quantité; il existe donc un rapport direct entre la quantité, et le prix total qu'elle coutera.

De plus, ce rapport est géométrique; étant évident qu'une double quantité coutera deux fois autant; une triple quantité, trois fois etc. Prenant de cette même marchandise une quantité égale à zéro, il est clair que cela ne coutera rien, quelque précieuse qu'elle soit d'ailleurs.

Mettons à côté de cet exemple, celui d'un autre rapport, qui est tout aussi direct, mais qui n'est rien moins que géométrique.

Un jeune homme de 20 ans ayant été pesé à la balance, son poids s'est trouvé de 120 livres. On demande ce qu'il pesera à l'âge de trente ans.

Il est incontestable qu'au moins jusqu'à un certain terme, le poids de l'homme augmente avec le nombre des années; il existe donc un rapport direct entr'eux. Reste à examiner, si ce rapport est géométrique.

Dans ce cas, cet homme ayant pesé 120 livres à l'âge de 20 ans, en aura pesé 60 à l'âge de dix; à cinq ans il aura pesé 30 livres; à un an il aura pesé 6 livres; à deux mois il n'auroit pesé qu'une seule
livre;

livre; enfin au moment de sa naissance, son age étant zéro alors, il n'auroit donc rien pesé du tout.

Cette conséquence mène à l'absurde. Le rapport n'est donc pas géométrique; et l'on se tromperoit grossièrement, si l'on mettoit le probleme en forme de règle de trois.

220. De meme, pour qu'une quantité soit dans un rapport géométrique inverse avec une autre, il faut que l'une étant augmentée dans un rapport numérique quelconque, l'autre soit diminuée précisément dans le meme rapport.

221. Ici les nombres qui désignent dans deux cas différens l'une des deux quantités, étant comparés à ceux qui dans ces memes cas expriment l'autre, il se trouvera que les uns sont encore équimultiples des autres, seulement il faut observer de disposer les uns ou les autres dans un ordre renversé, tellement que le conséquent soit à la place de l'antécédent, et que l'antécédent prenne la place du conséquent.

222. On pourroit énoncer cela plus généralement, et l'appliquer à plusieurs termes à la fois, en disant, que dans le rapport inverse d'une quantité à une autre de différente espèce, les nombres qui expriment successivement l'une, sont encore équimultiples de ceux qui dans les memes cas expriment l'autre, mais mis en forme de dénominateur, auxquels on donnera pour numérateur commun l'unité. On pourroit désigner cette propriété par le terme d'*équisousmultiples*.

Supposons qu'une certaine distance ait été parcourue par quatre couriers dans des tems différens, savoir: par le premier en douze jours, par le second en six jours, par le troisieme en quatre jours, par le quatrieme en trois jours; il est évident que la
la

vitesse du second doit avoir été le double, la vitesse du troisieme le triple, la vitesse du quatrieme le quadruple de celle du premier. Mettant ces quatre nombres en forme de dénominateurs, de sorte qu'il y ait $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; et comparant leur les tems respectifs qui leur répondent, savoir 12, 6, 4, 3; et l'on verra ces derniers nombres, qui expriment les tems, équi-multiples des fractions $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, dont les dénominateurs expriment les vitesses.

223. Lorsque deux quantités de différente espèce sont en rapport géométrique inverse entr'elles, il faut que l'une des deux étant supposée égale à zéro, l'autre en devienne infiniment grande; et réciproquement, que l'une étant supposée infiniment grande, l'autre s'évanouisse entièrement.

La grande pyramide d'Egypte, ayant été achevée, comme on dit, en 20 ans par 40000 hommes qu'on y employoit, on demande en combien d'années elle auroit été achevée, en y mettant un seul ouvrier? il auroit fallu 40000 fois plus de tems que dans le premier cas, ce qui fait huit cent mille ans. Ici le nombre des ouvriers doit être regardé comme nul en comparaison de l'ouvrage immense dont il est question; aussi le tems est-il, pour ainsi dire, bien près de devenir infiniment grand.

224. On appelle règle de trois simple, celle, par laquelle trois termes d'une progression géométrique quelconque étant donnés, on apprend à trouver le quatrieme.

225. Ce quatrieme terme sera, ou un des deux extrêmes, ou un des deux moyens. On sait que généralement le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Donc, pour trouver le terme inconnu dans le premier cas, on divisera le produit des moyens par l'autre extrême qui est connu, et dans le second, on divisera le produit des extrêmes par le moyen qui est connu.

226. On est convenu de désigner par la lettre x le terme inconnu, en attendant qu'on l'ait trouvé. La place qu'on veut assigner à cette inconnue x , dans la proportion, est indifférente en elle-même. Dans la plupart des livres élémentaires on en fait le quatrième terme de la proportion. Le troisième terme sera celui des trois donnés, qui est de même espèce avec x . On réservera les deux premières places pour les deux termes, dont l'espèce est différente de celle de l'inconnue x . De cette manière, les deux termes qui constituent chacun des deux rapports, seront toujours de même espèce entr'eux.

227. Dans le cas du rapport direct, on placera les termes du premier rapport de manière, que le troisième regarde le premier, et que le quatrième réponde au second. Dans celui du rapport inverse, on renversera les deux termes du premier rapport : alors le premier terme sera celui qui dans l'énoncé de la question appartenait au quatrième : et le second sera celui qui dans le même énoncé regardait le troisième.

228. Les quatre termes étant ainsi disposés, on multipliera le second terme par le troisième et on divisera le produit par le premier. Si les termes du premier rapport sont des nombres complexes, on ne fera pas mal de les réduire d'abord à la moindre espèce : la multiplication alors pourra très bien se faire par parties aliquotes. Quant à la nature complexe du troisième terme, elle ne fera jamais de difficulté, étant de même espèce que l'inconnue même.

Exem-

Exemple I. 42 lb. 13 onc. 5 gr. d'une certaine marchandise ont coûté 782 fr. 18 cent.; on demande ce que coûteront 19 lb. 7 onc. 3 gr. de la même marchandise.

On aura donc 42 lb. 13 onc. 5 gr. : 19 lb. 7 onc. 3 gr.
ou 5485 : 2491
comme 782, 18 fr. : x.

Le rapport de la quantité au prix étant évidemment direct, les termes du premier rapport pourront subsister aux places qu'ils occupent. Il faudra multiplier 782, 18 fr. par 2491, et diviser le produit par 5485.

$$\begin{array}{r}
 782, 18 \\
 \times 2491 \\
 \hline
 78218 \\
 705962 \\
 512872 \\
 156436 \\
 \hline
 1948410,38 \\
 16455 \\
 \hline
 30291 \\
 27425 \\
 \hline
 28660 \\
 27425 \\
 \hline
 12353 \\
 10970 \\
 \hline
 13838 \\
 10970 \\
 \hline
 2868
 \end{array}
 \quad
 \left\{
 \begin{array}{l}
 5485 \\
 \hline
 355, 22
 \end{array}
 \right.$$

On aura $x = 355$ fr. 22 cent.

Exem-

Exemple II. On demande combien de livres, onces etc. d'une certaine marchandise on pourra acheter pour la somme de 355 fr. 22 cent.; ayant acheté une fois 42 lb. 13 onc. 5 gros pour la somme de 782 fr. 18 cent.?

On aura donc $782,18 : 355,22$

Comme 42 lb. 13 onc. 5 gros : x.

Le rapport de la quantité au prix étant encore direct, l'ordre des termes pourra subsister. Il faudra multiplier 42 lb. 13 onc. 5 gros par 35522, et diviser le produit par 78218.

$$\begin{array}{r}
 42 \text{ lb. } 13 \text{ onc. } 5 \text{ gros.} \\
 35522 \\
 \hline
 71044 \\
 142088. \\
 \text{par 8 onc. } 17761 \\
 \text{par 4 onc. } 8880, \dots 8 \\
 \text{par 1 onc. } 2220 \dots 2 \\
 \text{par 4 gros } 1110 \dots 1 \\
 \text{par 1 gros } 277 \dots 8 \dots 2 \\
 \hline
 1522175 \dots 3 \dots 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 78218 \\ 19..7..3 \end{array} \right. \\
 78218. \\
 \hline
 739993 \\
 703962 \\
 \hline
 560313 \\
 216186 \\
 \hline
 576499 \\
 547526 \\
 \hline
 28973 \\
 8 \\
 \hline
 251786 \\
 254654 \\
 \hline
 2868 \quad \text{Reste en moins.}
 \end{array}$$

On trouvera 19 lb. 7 onc. 3 gros.

Exem-

Exemple III. Un certain ouvrage ayant été achevé en 17 jours, par 213 ouvriers, on demande combien il faudra d'ouvriers pour le finir en 11 jours ?

Ici on dira 17 jours : 11 jours

comme 213 ouvriers : x .

Mais le nombre des ouvriers étant en raison inverse de celui des jours, il faudra renverser le premier rapport ; d'où il résultera la proportion suivante :

$$11 : 17 = 213 : x.$$

Multipliant 213 par 17, et divisant par 11, on trouvera 329 ; tel sera le nombre des ouvriers qu'on demandoit.

Exemple IV. Un fossé de 219 toises de long ayant été creusé dans un certain terrain, on voudroit en creuser un tout-à-fait pareil dans un autre terrain, en y employant les memes ouvriers ; on demande de plus qu'il soit achevé dans le même tems. Il n'y a que la nature du terrain qui met de la différence dans les deux cas ; on a reconnu par plusieurs expériences, que le terrain du second fossé est beaucoup plus difficile à travailler, dans le rapport à-peu-près de 11 à 19. On demande quelle sera la longueur de ce second fossé.

On aura la proportion $11 : 19 = 219 : x$. Mais la longueur du fossé, toutes choses d'ailleurs égales, étant évidemment en raison inverse de la dureté du terrain, il faudra renverser les deux termes du premier rapport ; la proportion deviendra ainsi $19 : 11 = 219 : x$; ce qui donnera $x = 126$ toises, et un peu moins que cinq pieds.