

La seconde racine 0,8165 est exactement le tiers de la première 2,4495. La méthode que nous avons enseignée en dernier lieu, est plus expéditive que l'autre, qui cependant est conservée pour les calculs littéraux, où elle est nécessaire.

195. Enfin, s'il faut tirer la racine quarrée d'un entier, suivi d'une fraction, on commence par donner à cette quantité la forme fractionnaire, après quoi on procède à l'extraction.

On demande la racine quarrée de $1\frac{2}{3}$ à trois décimales. A la place de $1\frac{2}{3}$ on trouve $\frac{5}{3}$, ce qui se réduit à 1,6666.... dont la racine est 1,291 à moins d'un cent-millième de près,

1,6666..... } 1,291 racine

66

22

2

44

2266

249

9

2241

2566

2581

15 Reste en moins.

CHAPITRE SEPTIEME.

EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE.

196. On nomme en Arithmétique *cube d'un nombre* le produit du quarré de ce nombre par le nombre lui meme, lequel par rapport à son cube prend le nom de *racine cubique*.

D'après

D'après cette définition, voici la liste des cubes des nombres depuis 1 jusqu'à 12.

<i>Nombres.</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>Cubes.</i>	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728

Les nombres de la première ligne sont les racines cubiques de ceux de la seconde.

197. En faisant l'analyse du carré d'un nombre de deux chiffres, nous avons trouvé que ce carré devoit être composé de trois parties: le carré des dizaines, le double produit des dizaines par les unités, et le carré des unités.

198. En multipliant chacune de ces trois parties, d'abord par les dizaines, ensuite par les unités, on trouvera que le cube d'un nombre de deux chiffres sera composé des quatre parties suivantes. *Premièrement*, le cube des dizaines, suivi de trois zéros. *Secondement*, le triple produit du carré des dizaines par les unités, suivi de deux zéros. *Troisièmement*, le triple produit des dizaines par le carré des unités, ayant un zéro à sa suite. *Quatrièmement*, le cube des unités.

Proposons nous de former le cube de 74. Ici les dizaines sont 7, leur carré 49, leur cube 343. Les unités sont 4, leur carré 16, leur cube 64. Donc:

<i>Cube des dizaines</i>		343
<i>Triple produit du carré des</i>		
<i>dizaines par les unités</i>		588
<i>Triple produit des dizaines</i>		
<i>par le carré des unités</i>		336
<i>Cube des unités</i>		64
<i>Cube de 74</i>		405224

199. L'on voit que pour extraire la racine cubique d'un nombre proposé, il faut suivre une marche absolument retrograde. Voici la méthode qu'on pourra employer.

200. *Premièrement.* Partagez le nombre proposé en tranches, de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche.

201. *Secondement.* Cherchez dans la petite table des cubes (196) le nombre qui constitue la dernière tranche qui reste à gauche; et si vous ne l'y trouvez pas, prenez le cube immédiatement inférieur. Ce dernier cube sera celui des dizaines; vous l'ôterez du premier, et à côté du reste que vous obtiendrez, vous ferez descendre la seconde tranche.

202. *Troisièmement.* Au dessous du nombre total qui en résulte, placez le triple carré des dizaines, suivi de deux points; et voyez combien de fois il est contenu dans le nombre qui est au dessus de lui. Par ce moyen vous connoîtrez les unités, sauf à une revision ultérieure.

203. *Quatrièmement.* A la place des deux points, écrivez le carré des unités, de manière qu'il se trouve immédiatement à la suite du triple carré des dizaines, et sur la même ligne que lui.

204. *Cinquièmement.* Mettez au dessous, le triple produit des dizaines par les unités, suivi d'un point.

205. *Sixièmement.* Ajoutez ensemble les deux dernières lignes, et multipliez la somme par les unités.

206. *Septièmement.* Essayez de retrancher le produit du reste entier que vous aurez obtenu, après avoir fait descendre la seconde tranche. Si ce produit se trouve plus grand que le reste en question, vous conclurez que le quotient de 202 est encore trop grand; il faudra donc le rabaisser d'un, et quelque fois de deux. Dans aucun cas ce quotient ne pourra surpasser 9.

207. *Huitièmement.* Lorsqu'au contraire cette soustraction sera possible, alors, sans rien changer aux unités, vous ferez simplement descendre la troisième tranche à côté du reste, et vous continuerez l'opération de la même manière. Au moment que des nombres entiers vous passerez aux décimales, ne manquez pas de mettre une virgule dans la racine. Enfin, lorsque toutes les décimales seront épuisées, et que la nature du problème exige pour la précision de la racine quelques décimales de plus, alors des zéros, que vous ajouterez successivement à vos restes, vous mettront dans le cas de continuer l'opération.

Essayons de tirer la racine cubique de 405224, nombre que nous savons être un cube parfait, ayant pour racine 74, d'après le calcul fait en 198.

Ayant retranché les trois derniers chiffres, il restera à gauche 405. Le cube immédiatement inférieur à 405 est celui de 7, savoir 343. Otez 343 de 405, il restera 62, à côté desquels vous ferez descendre 224, ce qui donnera en tout 62224. Les dixaines sont donc 7.

Prenez le triple carré des dixaines 147; et mettez le, suivi de deux points, au dessous de 62224. Dites: 147 en 622 combien de fois? Réponse, 4; voilà vos unités.

Mettez

Mettez le quarré des unités 16 à côté de 147. Ecrivez au dessous de lui le triple produit des dixaines par les unités, qui est ici 84, suivi d'un point. Ajoutez ces deux nombres, savoir :

$$\begin{array}{r} 14716 \\ 84. \end{array}$$

et multipliez la somme 15556 par les unités 4. Le produit 62224 se trouvera exactement égal au reste que vous avez obtenu, après avoir fait descendre la seconde tranche.

Le nombre proposé 405224 est donc un cube parfait, ayant pour racine 74, ce qu'on savoit d'avance.

$$\begin{array}{r} 405224 \quad \} \quad 74 \\ 343 \\ \hline 62224 \\ 14716 \\ 84. \\ \hline 15556 \\ 4 \\ \hline 62224 \end{array}$$

208. Lorsqu'on a trouvé les quatre, cinq ou six premiers chiffres de la racine cubique, on trouvera de meme les trois, quatre ou cinq chiffres qui suivent immédiatement ceux-ci, en continuant à autant de chiffres de plus la division par le triple quarré. Les chiffres qui résultent de cette division, appartiendront également à la racine cubique qu'on demande.

Proposons nous d'extraire la racine cubique de $5\frac{3}{4}$ ou 5,75 jusqu'à huit ou neuf décimales. Voici le calcul, qui, après ce que nous en avons dit, n'a pas besoin de commentaire.

5,750

$$5,750 \left\{ \begin{array}{l} 1,7921 \\ \end{array} \right.$$

$ \begin{array}{r} 1 \\ \hline 4 \ 750 \\ 349 \\ 21. \\ \hline 559 \\ 7 \\ \hline 5 \ 913 \\ 837000 \\ 86781 \\ 399. \\ \hline 90771 \\ 9 \\ \hline 816939 \\ 20061000 \\ 9492304 \\ 1074. \\ \hline 19503044 \\ 2 \\ \hline 19006088 \\ 1054912000 \\ 951379201 \\ 5376. \\ \hline 951432961 \\ 103479039000 \\ 951486723 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1034790 \left\{ \begin{array}{l} 951487 \\ 10875 \end{array} \right. \\ 951487 \\ \hline 8330300 \\ 7611896 \\ \hline 7184040 \\ 6660409 \\ \hline 5236310 \\ 4757435 \\ \hline 478875 \end{array} $
--	---

Ayant calculé les cinq premiers chiffres de la racine, savoir 17921, on aura le sixième, en disant, 951487 en 1034790 combien de fois? Mais il est facile de prévoir, que quelque loin qu'on voulut continuer l'opéra-

L'opération, les diviseurs suivans commenceront tous par 9515; et qu'ainsi la différence entre la véritable extraction de la racine cubique continuée, et la simple division de 10548 par 9515, ne pourra être sensible qu'au cinquième ou sixième chiffre. Cette division donne 10875; et joignant ces chiffres à ceux qu'on a déjà trouvés, on aura 1,7921108,75 pour racine cubique du nombre proposé.

209. L'on voit par cet exemple, que l'extraction de la racine cubique n'est ni longue, ni difficile. La seule chose qui pourroit paroître sujette à des difficultés, c'est cette formation continuelle du quarré de cette partie de la racine, qu'on a déjà calculée. Mais cette partie est toujours composée d'anciennes dixaines et de nouvelles unités; et comme, tant le quarré des dixaines, que le produit des dixaines par les unités peut être supposé connu, parce que réellement on en a eu besoin dans le calcul du chiffre précédent, il s'ensuit que la formation de ce quarré ne sera jamais que l'ouvrage d'une simple addition. De plus, la remarque que nous venons de faire dans le paragraphe précédent, sert à abréger le travail de beaucoup; parce que, pour trouver par exemple, les sept premiers chiffres de la racine, il suffira d'en avoir calculé quatre, moyennant cette opération qu'on nomme extraction de la racine cubique; la connoissance de ceux qui restent, n'exigera qu'une simple division.

210. Mais quelque peu difficile que puisse être l'extraction de la racine cubique en elle-même, et quels que soient d'ailleurs les soulagemens, qu'un calculateur un peu exercé saura y apporter toujours, elle n'est cependant guères en usage parmi les géomètres. L'Arithmétique

métique nous offre dans les logarithmes, dont nous aurons à parler bientôt, un moyen infailible, de déterminer presque par un trait de plume, et pour un nombre quelconque proposé, non seulement les racines quarrées et cubiques, mais aussi celles des ordres supérieurs, quels que soient d'ailleurs leurs exposants. Le seul cas qui obligerait le calculateur, d'employer l'extraction de la racine cubique, seroit celui, où pour le moment il n'auroit pas ses tables de logarithmes sous la main. Mais ce cas n'arrivera guères; les géomètres connoissent trop le besoin qu'ils ont de ces tables à chaque instant, pour s'engager sans elles dans une opération quelconque.

CHAPITRE HUITIEME.

LA RÈGLE DE TROIS SIMPLE.

211. Dans le quatrième chapitre nous avons examiné les rapports des nombres en général, considérés comme abstraits, et ne désignant aucune espèce déterminée. Reste donc à enseigner l'application qu'il faut faire de ces principes généraux, aux quantités dont l'espèce est déterminée.

212. On dit qu'en général une chose est en rapport avec une autre, lorsqu'elle en dépend d'une manière quelconque; lorsque l'une des deux venant à changer, l'autre ne sauroit conserver non plus la valeur qu'elle avoit; lorsqu'enfin, pour déterminer l'une avec telle précision que ce soit, il faut connoître l'autre.