

livres. Divisant 247892 francs par 54682, on aura sur le champ, et par un calcul bien plus facile, les 4 fr. 10 sous 8 den. de l'exemple.

CHAPITRE QUATRIEME.

LES RAPPORTS DES NOMBRES EN GÉNÉRAL.

119. L'idée de la division fait naturellement naître celle du *rapport*. Ce terme qui signifie généralement le résultat de la comparaison est employé particulièrement en Arithmétique, lorsque le but de cette comparaison est de savoir, combien de fois l'un des deux nombres proposés est contenu dans l'autre.

120. Des deux nombres dont on cherche le rapport, l'un qui fait fonction de dividende, est nommé *terme antécédent*; l'autre qui fait fonction de diviseur, est appelé *terme conséquent*.

121. La grandeur du rapport est naturellement estimée d'après le quotient de cette division. L'égalité ou l'inégalité des deux rapports dépend de celle de leurs quotiens. De plus, dans chaque rapport, l'antécédent est égal au conséquent, multiplié par le quotient.

122. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise les deux termes d'un rapport par un même nombre quelconque, il en résulte un rapport égal au premier. Car dans ce cas la division du nouvel antécédent par le nouveau conséquent donnera le même quotient qu'auparavant.

123. Deux rapports égaux entr'eux forment ce qu'on appelle une *proportion*. Une proportion-

portion aura donc quatre termes, dont deux seront antécédents, et deux conséquents, De ces memes termes, deux seront nécessairement *extremes*, deux seront *moyens*.

124. Dans une proportion quelconque, le produit des extremes est égal au produit des moyens. Car d'après ce qui a été dit en 121, chacun des deux produits sera celui des deux conséquents, multipliés par le quotient.

Des deux rapports $15 : 5$ et $21 : 7$, qui sont égaux entr'eux, parce que le quotient de l'un et de l'autre est trois, composons la proportion $15 : 5 = 21 : 7$. Le produit des extremes, de meme que le produit des moyens, est 105. Cela doit être; car ayant $15 = 5 \times 3$; et $21 = 7 \times 3$; le produit des extremes sera $5 \times 3 \times 7$; celui des moyens $5 \times 7 \times 3$; ils seront donc égaux entr'eux.

125. Réciproquement, toutes les fois que deux nombres quelconques donnent un produit que l'on peut encore décomposer en deux autres facteurs différens des premiers, ces quatre facteurs formeront toujours une proportion, pourvu qu'on les dispose tellement, que les uns deviennent termes extrêmes, les autres termes moyens de la proportion.

Car, supposons que sur trois nombres proposés, il faille chercher un quatrième qui forme avec les trois autres une Proportion géométrique. Il est clair d'abord, qu'il n'y a qu'un seul nombre qui puisse satisfaire à cette condition: ensuite, ce nombre doit être nécessairement celui, dont le produit avec le premier terme, sera égal à celui du second et du troisième. Comme il n'y a non plus qu'un seul nombre qui puisse remplir cette dernière condition, il s'ensuit que les deux conditions sont absolument inséparables, et qu'aucune des deux ne peut exister sans l'autre.

126. Il suit delà, que les quatre termes d'une proportion peuvent être disposés de plusieurs manières différentes, pourvu que l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens soit maintenu.

C'est ainsi qu'ayant $12 : 32 = 15 : 40$

On en tirera $12 : 15 = 32 : 40$

$32 : 12 = 40 : 15$

$32 : 40 = 12 : 15$

$15 : 40 = 12 : 32$

$15 : 12 = 40 : 32$

$40 : 15 = 32 : 12$

$40 : 32 = 15 : 12$

127. Lorsqu'on a un nombre quelconque de rapports égaux entr'eux, la somme de tous les antécédents sera à la somme de tous les conséquents, comme un antécédent est à son conséquent.

Car supposons, par ex. que le quotient de tous ces rapports soit 5, il est clair que, chaque antécédent étant égal à cinq fois son conséquent, la somme de tous les antécédents sera égale à celle de tous les conséquents, prise cinq fois. On prouve de la même manière la proposition suivante :

128. Dans une proportion quelconque, la différence des antécédents est à la différence des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent.

129. On réduit un rapport, lorsqu'on trouve à l'exprimer par des nombres entiers et plus petits, sans rien changer à sa valeur. La réduction sera donc possible dans les cas, où les deux termes d'un rapport sont divisibles par un même nombre entier. Il faut donc avoir des règles pour trouver ce nombre, si
toutes

toutes fois il en est un , pour réduire un rapport proposé. Voici en général quelques règles et principes , qui peuvent y conduire.

130. Tout nombre quelconque est divisible par l'unité et par lui-même.

131. On reconnoit qu'un nombre est divisible par 2 , s'il est terminé par un chiffre pair.

132. On reconnoit qu'un nombre est divisible par 3 , lorsque la somme des chiffres qui le composent , est elle-même divisible par 3.

C'est ainsi que le nombre 1782 est divisible par 3 , parce que la somme de ses chiffres fait 18 , qui est divisible par 3.

133. On reconnoit de meme qu'un nombre est divisible par 9 , lorsque la somme des chiffres qui le composent , est divisible par 9.

C'est ainsi qu'ajoutant les chiffres du nombre 80244 , on trouve 18 , nombre divisible par 9. On en conclurra que 80244 est divisible par 9 : et en effet on en obtient le quotient 8916 , sans reste. Comme la somme des chiffres de ce dernier nombre est 24 , ce qui est multiple de 3 , et que de plus il est terminé par un chiffre pair , on en conclurra qu'il est au moins divisible par 6 ; en effet , on aura pour quotient 1486. Ce dernier nombre est encore divisible par 2 ; il aura pour quotient 743. Ainsi par ces deux règles seules , le nombre proposé a été décomposé dans les facteurs 9, 4, 3, 743.

134. Un nombre est divisible par 10 , et par conséquent aussi par 5 , s'il est terminé par un zéro : cela est clair. Et ce qui ne l'est pas moins , c'est que tous les nombres terminés par un 5 , sont divisibles par 5.

135. Une règle assez remarquable nous apprend à discerner si un nombre est divisible par 11. Ajoutez ensemble le premier, le troisième, le cinquième, le septième etc. de ses chiffres. Ajoutez de même le second, le quatrième, le sixième de ses chiffres. Si la différence entre ces deux sommes est zéro, ou 11, ou 22 etc. vous pouvez être certain que le nombre proposé sera divisible par 11.

Examinant d'après cette règle le nombre 90728, on trouvera 24 pour la première, et 2 pour la seconde des deux sommes: et comme leur différence 22 est divisible par 11, le nombre 90728 lui-même aura 11 pour diviseur. Le quotient 8248 étant encore divisible par 8, et laissant pour quotient 1031, les facteurs seront 11, 8, 1031.

136. Après avoir épuisé ces règles particulières, la recherche des diviseurs d'un nombre, surtout lorsqu'il est composé de beaucoup de chiffres, est un Problème très difficile. C'est ainsi qu'aucune règle, ni d'Arithmétique ni d'Analyse, ne nous fera découvrir directement les facteurs du nombre 186611, lequel cependant est réellement décomposable en 1031 et 181. Pour découvrir ces deux facteurs, il faudroit essayer la division du nombre proposé par tous les nombres premiers, depuis 1 jusqu'à 431.

137. Au défaut d'une règle pour trouver les diviseurs d'un nombre, nous en avons une au moins pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux nombres quelconques proposés. Cette règle consiste dans une suite de divisions, qui dépendent tellement l'une de l'autre, que le diviseur et le reste de chaque division, font dans celle qui suit immédiate-

diatement, fonction de dividende; et de diviseur. La première de ces divisions se fait en divisant le plus grand des deux termes des rapports proposés, par le plus petit. La dernière est celle qui ne laisse point de reste. Le nombre qui a servi de diviseur dans cette dernière, est le plus grand commun diviseur des deux termes de la raison proposée.

Prenons les deux nombres 6713 et 7196, dont il faille chercher le plus grand commun diviseur. En voici le calcul :

$$\begin{array}{r}
 6713 \overline{) 7196} | 1 \\
 \underline{6713} \\
 483 \overline{) 6713} | 13 \\
 \underline{483} \\
 1883 \\
 \underline{1449} \\
 434 \overline{) 483} | 1 \\
 \underline{434} \\
 49 \overline{) 434} | 8 \\
 \underline{392} \\
 42 \overline{) 49} | 1 \\
 \underline{42} \\
 7 \overline{) 42} | 6 \\
 \underline{42} \\
 0
 \end{array}$$

La première division se fera en divisant 7196 par 6713; elle laissera 483. Dans la seconde on divisera 6713 par 483; on aura 434 de reste. On divisera en troisième lieu 483 par 434; on aura 49 de reste. Divisant ensuite 434 par 49, le reste sera 42. Dans la cinquième division enfin on divisera

E

42

42 par 7; et comme il n'y aura point de reste, cette division sera la dernière. Le plus grand commun diviseur sera donc 7, et le rapport proposé $6713:7196$ se trouvera réduit à $959:1028$.

138. La démonstration de cette règle repose sur un principe bien simple: c'est que dans toute division qui laisse un reste après elle, le dividende se retrouve, en multipliant le diviseur par le quotient, et en ajoutant au produit le reste qu'on a obtenu. Il s'ensuivra naturellement que tout nombre, par lequel on a pu diviser le reste et le diviseur d'une division, sera également facteur de son dividende; d'où l'on peut aisément conclure, que tous les dividendes dans cette opération doivent être divisibles par le nombre qui exerçant les fonctions de diviseur dans la dernière division, n'y a point laissé de reste.

Ayant trouvé dans l'exemple précédent, que 7 est le facteur de 42, on conclura qu'il le sera aussi de 49, qui est 1 fois 42, plus 7. Donc, il le sera aussi de 434, égal à 8 fois 49, plus 42. Par la même raison il doit l'être de 483, égal à 1 fois 434, plus 49. Il le sera encore de 6713, qui est 13 fois 483, plus 434. Il le sera enfin de 7196, égal à 1 fois 6713, plus 483. Donc il sera diviseur ou facteur commun des deux nombres proposés.

On voit aussi qu'il doit être leur plus grand facteur commun. Car s'il existoit un facteur commun de 6713 et de 7196, plus grand que 7, il faudroit qu'il fut aussi facteur des deux nombres 7 et 42, qui font fonction de diviseur et de dividende dans la dernière division. Or il est impossible que 7 soit divisible par un nombre plus grand que lui-même. Donc etc.

139. Dans les cas où le dernier diviseur est l'unité même, on conclura que le rapport proposé est déjà réduit aux moindres termes,
et

et qu'il n'admet point de réduction ultérieure. Mais dans ces cas mêmes, l'opération que nous venons d'enseigner, n'est nullement inutile. Elle servira à réduire le rapport proposé à des termes beaucoup plus petits, et tels, que sans en égaler la valeur rigoureuse, elles en approchent si près, que la petite différence de la valeur véritable, est insensible pour les procédés pratiques des sciences et des arts.

140. Cette règle fait trouver deux colonnes de nombres, qui comprennent les termes antécédents et les termes conséquents des rapports approchés qu'on cherche. On y emploie les quotiens qu'on a successivement obtenu dans l'opération de 137, de la manière suivante. Ayant trouvé, par ex: moyennant un certain nombre de ces quotiens, un nombre égal d'antécédents et de conséquents, on multipliera par le quotient qui vient immédiatement après, le dernier des antécédents qu'on a trouvés, et on y ajoutera l'antécédent qui précède celui-ci. Faisant de même pour l'autre colonne, on aura un nouvel antécédent et un nouveau conséquent, dont le rapport mutuel approchera encore plus du rapport donné, que celui qui l'avoit précédé immédiatement. A la tête des colonnes on mettra 0 et 1. Après eux viendront 1 et le quotient de la première division. Après ceux-ci on continuera l'opération comme on vient de le dire. Il faut éclaircir ceci par un exemple.

Prenons le rapport de 137, savoir $6713:7196$. Par le moyen de six divisions consécutives, qui nous ont fourni les quotiens 1, 13, 1, 8, 1, 6; ces divisions nous ont donné pour commun diviseur 7; ensuite de quoi le rapport a été réduit à $959:1028$. Pour

E 2

trouver

trouver les valeurs approchées de ce dernier rapport, voici la marche qu'on suivra :

Mettez au-dessus des deux séries . . 0 . . . 1.

Le premier antécédent sera 1 dans tous les cas. Le premier conséquent sera le quotient résulté de la première division : dans le cas présent il sera donc 1.

Prenant le quotient de la seconde division, 13, vous direz,

13 fois 1, plus 0 font 13... second antécédent.
13 fois 1, plus 1 font 14... second conséquent.

Le quotient de la troisième division est 1. Donc

1 fois 13, plus 1 font 14... troisième antécédent.
1 fois 14, plus 1 font 15... troisième conséquent.

Le quotient de la quatrième division est 8. Donc

8 fois 14, plus 13 font 125... quatrième antécédent.
8 fois 15, plus 14 font 134... quatrième conséquent.

Le quotient de la cinquième division est 1. Donc

1 fois 125, plus 14 font 139... cinquième antécédent.
1 fois 134, plus 15 font 149... cinquième conséquent.

Le quotient de la sixième division est 6. Donc

6 fois 139, plus 125 font 959... sixième antécédent.
6 fois 149, plus 134 font 1028... sixième conséquent.

Voici à présent les deux colonnes, calculées d'après cette règle.

<i>Antécédents.</i>	<i>Conséquents.</i>
0	1
1	1
13	14
14	15
125	134
139	149
959	1028

Un examen plus attentif de ces deux colonnes nous fera faire les observations suivantes, que l'on peut donner comme générales.

Premièrement. Si dans ces deux colonnes, on prend un antécédent quelconque avec son conséquent, et qu'on leur joigne l'antécédent et le conséquent qui viennent immédiatement après, il se trouvera constamment, que le produit des extremes et le produit des moyens ne sont pas absolument égaux entr'eux, mais cependant, qu'ils ne diffèrent jamais que d'une seule unité.

C'est ainsi qu'en mettant ensemble les quatre termes 14, 15, 125, 134, le produit des extremes sera 1876; celui des moyens 1875. D'où il suit qu'en mettant ces quatre nombres en forme de proportion géométrique, on aura commis une erreur d'un sur 1876.

De meme, mettant ensemble les quatre termes 139, 149, 959, 1028, le produit des extremes sera 142892, celui des moyens 142891. Ainsi donc, en mettant ces quatre nombres en forme de proportion géométrique, on commet une erreur d'un sur 142892.

La première erreur est très petite; la seconde est tout-à-fait insensible.

Secondement. Les différences égales à un, que nous avons remarqué entre le produit des extremes et celui des moyens, sont alternativement en faveur de l'un, et en faveur de l'autre. Dans les nombres 14, 15, 125, 134, le produit des extremes 1876 l'avoit emporté sur celui des moyens 1875. Prenant les nombres immédiatement suivans 125, 134, 139, 149, nous verrons le produit des extremes 18625 inférieur à celui des moyens 18626.

Il suit delà, que si l'on prend pour premier rapport, un certain terme de la première colonne, suivi de son conséquent; et pour second rapport, un terme quelconque de la première colonne, mais plus éloigné, avec son conséquent respectif; l'erreur qui résulte de ce qu'on regarde ces quatre nombres comme étant en proportion géométrique, sera toujours

jours moindre que si à la place de ces derniers on avoit pris ceux qui viennent immédiatement après les deux premiers.

C'est ainsi que voulant mettre en proportion géométrique les quatre nombres 14, 15, 959, 1028, on aura pour produit des extremes 14592; pour celui des moyens 14385; la différence 7 est celle de 1 sur 2056. Si l'on avoit mis 14, 15, 125, 134, le produit des extremes étant alors 1876, celui des moyens 1875; la différence auroit été de 1 sur 1876. Or la première est la moindre des deux.

Troisièmement. Les derniers termes des deux colonnes seront ceux memes du rapport proposé. Dans cet exemple, on a trouvé pour dernier antécédent 959, pour dernier conséquent 1028; or 958:1028 est précisément le rapport proposé.

Comparant ensemble ces différentes propositions partielles, on est conduit au théoreme général qui suit, et que nous donnons pour un des plus importants de l'Arithmétique.

141. Les termes correspondans des deux colonnes dont la construction a été enseignée en 140, font connoître en des nombres bien plus petits, les valeurs approchées du rapport proposé. Ces valeurs en approchent d'autant plus, que les termes qu'on a choisis sont plus éloignés du commencement. L'erreur qu'elles laissent subsister, est toujours moindre que celle de l'unité sur le produit qu'on obtiendrait, en multipliant l'antécédent qu'on a employé, avec le conséquent qui vient immédiatement après.

Prenons toujours pour exemple le rapport proposé 959:1028. La table suivante nous fait connoître la suite des valeurs approchées que la règle qu'on vient de donner, nous fait découvrir; de meme que les limites des erreurs qu'on commet, en mettant ces valeurs approchées à la place du rapport proposé.

Valeurs.

<i>Valeurs approchées.</i>		<i>L'erreur est moindre que celle de 1 sur les produits qui suivent :</i>		
1 :	1 . . .	1 fois	14, ou	14
13 :	14 . . .	13 fois	15, ou	195
14 :	15 . . .	14 fois	134, ou	1876
125 :	134 . . .	125 fois	149, ou	18625
139 :	149 . . .	139 fois	1028, ou	152892
959 :	1028 . . .	Valeur rigoureuse.		

Donnons encore quelques exemples.

Exemple I. Le pied de Cologne étant à celui de Paris comme 122 : 144, ou comme 61 : 72, on demande les valeurs approchées de ce rapport. On aura les quotiens qui suivent : 1, 5, 1, 1, 5.

De cette série de quotiens on retirera sur le champ les rapports approchés qui suivent :

1	:	1
5	:	6
6	:	7
11	:	13
61	:	72

Prenant 6 : 7, l'erreur sera moindre que celle de 1 sur 78; en effet elle ne sera que de 1 sur 86.

Exemple II. Multipliant chacun des deux nombres 61 et 72 par lui-même, on trouvera que le pied quarré de Cologne est à celui de Paris, comme 3721 : 5184. Ce rapport pouvant paroître trop compliqué, on demande à le réduire. Les quotiens successifs qu'on obtient, savoir 1, 2, 1, 1, 5, 3, 1, etc. nous en font connoître les valeurs qui suivent, savoir :

1	:	1
2	:	3
3	:	4
5	:	7
28	:	39
89	:	124
117	:	163
674	:	939
		etc. etc.

Avec

Avec 5 : 7 l'erreur est au-dessous d'un deux-centième. Celle que laissera 117 : 163 sera moindre que celle de 1 sur 120000.

Exemple III. Multipliant le rapport de l'exemple précédent 3721 : 5184 par 61 : 72, on trouvera le rapport du pied cubique de Cologne à celui de Paris, savoir 226981 : 373248. Ce rapport étant beaucoup trop compliqué pour l'usage journalier qu'on pourra être obligé d'en faire, on demande à le réduire. Les quotiens successifs deviennent ici 1, 1, 1, 1, 4, 3, 11 etc. Ils nous donneront les rapports approchés qui suivent, savoir ;

1	:	1
1	:	2
2	:	3
3	:	5
14	:	23
45	:	74
509	:	837

etc. etc. Le pied cubique de Cologne est donc à un 70ème près, égal aux trois cinquièmes de celui de Paris. Supposant le premier au second comme 45 : 74, l'erreur ne sera pas seulement d'un sur quarante mille.

Exemple IV. Le diamètre du cercle est à la circonférence comme 100000000 : 314159265. On veut simplifier ce rapport. On trouvera les quotiens 3, 7, 15, 1, 292 etc. On en tire les rapports approchés qui suivent, savoir :

1	:	3
7	:	22
106	:	333
113	:	355

etc. Le rapport 7 : 22, trouvé par *Archimède*, sera donc déjà très rapproché ; il ne laissera qu'une erreur de 1 sur 2400 à peu près. Le rapport 113 : 355 est celui d'*Adrien Metius* : l'erreur qu'il laisse sub-

subsister, est moindre que celle de 1 sur 355 fois 33102, ou de 1 sur douze millions, en parties de la circonférence.

Exemple V. L'année tropique étant de 365 jours 5 h. 48' 45'', cherchons le rapport de ces 5 heures 48' 45'' à une journée entière. Réduisant l'un et l'autre en secondes, on trouvera 20925 secondes pour l'un et 86400 pour l'autre. Les deux termes de ce rapport étant divisibles par 25, 9, 3 ou par 675, il se réduira par une simple division à 31 : 128. Ainsi donc, au bout de 128 années, les 5 heures 48' 45'' qui constituent l'excès d'une année sur 365 jours, auront fait très exactement 31 journées entières. Et c'est là ce qu'il faudroit ajouter au bout de 128 ans, afin de ramener l'année civile à la véritable époque des mouvemens célestes.

En donnant à chaque quatrième année 366 jours au lieu de 365, on aura donc dans l'espace de 128 années, 32 jours complémentaires; ce qui fera dans le cours de 128 ans un jour de trop. On pouvoit corriger très facilement l'erreur, en supprimant ce jour au bout de chaque période de 128 ans. Le Calendrier Grégorien y a pourvu d'une autre manière; il a excepté de la règle générale des bissextiles les années séculaires, en ordonnant que trois de ces années soient communes, et la quatrième bissextile. La règle que nous avons trouvée, eut été plus simple et plus exacte.

Exemple VI. Le mois synodique, ou le tems qui s'écoule d'une nouvelle lune à l'autre, est de 29 jours 12 heures 44' ou 42524 minutes. La durée de l'année tropique est de 365 jours 5 heures 49' ou de 525949 minutes. Le rapport de l'une à l'autre étant de 42524 : 525949, on demande à le réduire à une plus grande simplicité.

Les quotiens successifs seront ici 12, 2, 1, 2, 2, 21. Il en résultera les rapports approchés qui suivent:

suivent :	1	12
	2	25
	3	37
	8	99
	19	235

etc. L'erreur que laissera ce dernier rapport, est à peu près de 1 sur cent mille. Ainsi donc 235 mois synodiques sont à très peu près égaux à 19 années solaires; desorte que le commencement de la 20^{ème} année sera aussi celui du 236^{ème} mois. Telle est la période au bout de laquelle les nouvelles lunes et les pleines lunes reviennent précisément aux memes jours de l'année.

Cette période, appelée vulgairement Cycle lunaire, a été trouvée par *Meton*, Astronome d'Athenes, 430 années avant J. C. Il est intéressant de remarquer, qu'après la connoissance exacte de la durée du mois, le calcul de cette grande période ne suppose qu'une règle très facile de l'Arithmétique élémentaire.

142. La solution que nous venons de donner de cet important probleme, est donc d'un très grand usage, non seulement dans les sciences mathématiques et physiques, mais aussi dans les arts et dans la société en général. Nous ne prétendons pas au reste d'en donner la démonstration ici; elle excèderoit les bornes de l'arithmétique élémentaire. C'est à l'analyse d'en donner raison: aussi nous y reviendrons en son lieu.