

XI.

Die elementare Geometrie.*

Der geometrische Unterricht muß den Schülern Freude machen, wo das nicht der Fall ist, wo er zu einem zwangsmäßigen Unterrichtsgegenstand herabsinkt, da lasse man ihn ganz fallen. Die schlechte Methode allein macht die Schüler zu Feinden der Geometrie.

Daß die Geometrie in einer Volksschule, welche auf den Namen einer guten, d. h. einer solchen, welche den Grund zu allgemeiner Menschenbildung legt, Anspruch macht, nicht fehlen dürfe, steht fest**. Aber ebenso fest steht, daß ein wissen-

* Nach den in diesem Aufsatze enthaltenen Ansichten ist die Schrift gearbeitet: N. Diesterwegs Elementar-Geometrie für Mittelschulen und höhere Mädchenschulen. Neu herausgegeben von Eduard Langenberg. Mit 90 in den Text gedruckten Holzschnitten. 5. vermehrte Auflage. 1877. M. Diesterweg, Verlagsbuchhandlung in Frankfurt a. M.

** Notwendiger als die Geometrie ist in dem allgemeinen Volksschulunterricht die Zahlenlehre, wegen ihrer Anwendung auf die Verhältnisse des praktischen Lebens als Rechenkunst; bildender und anziehender wegen ihrer durchgängigen Anschaulichkeit und Bildlichkeit, sowie wegen ihrer Anwendung auf die Raumverhältnisse der Natur ist die Geometrie. — Die Zahlenlehre und die Geometrie sind wegen der Einfachheit der Elemente, aus welchen ihr Inhalt besteht und entsteht, die eigentlichen elementaren Fächer der Volksschule, man kann sagen, der allgemein-menschlichen Schule und Bildung. „Es giebt keine königliche Geometrie“, sagte schon ein Alter; die Asiaten, Afrikaner und Amerikaner haben keine andere als die Europäer; die Eigenschaften des Dreiecks sind überall dieselben. Die Geometrie ist ein kosmopolitischer, ja ein kosmischer Gegenstand, sie hat auch auf dem Jupiter ihre Bedeutung. Wo Raum ist, da sind auch die Eigenschaften des Raumes

schafftliches System der Geometrie in die Volksschule nicht gehört, weil es darin nicht gedeiht. Dieselbe muß also elementarisch behandelt werden. Damit sagt man zweierlei, erstens: es werden in den Volksschulunterricht nur solche Sätze aufgenommen, welche ein zarter Mensch von 10 bis 14 Jahren begreifen und anwenden kann, letzteres in seinem Geist zu ferneren Vorstellungen, oder auch äußerlich im Leben; zweitens und hauptsächlich: der Schüler überzeugt sich von der Wahrheit der Sätze gemäß der Stufe seiner Kraft, d. h. auf dem Wege und durch das Mittel unmittelbarer (innerer und äußerer) Anschauung und durch leichte Schlüsse — anschaulich und begriffsmäßig, überall anschaulich, indem dann noch leichte Schlüsse hinzukommen, jedoch nicht überall; einmal da nicht, wo die Anschauung unmittelbar die Gewißheit giebt, dann da nicht, wo der Schüler zur Aufstellung des Beweises die Kraft nicht besitzt. Diese Behandlungsart der Sätze, welche nicht bloß die Selbstthätigkeit des Schülers im allgemeinen, sondern ganz speziell seine Erfindungskraft zu wecken sich bemüht, ist die elementare. Der strenge Systematiker (Euklidianer) mag sie verwerfen, wir können sie nicht entbehren; sie ist die, durch die Natur des Objekts und die Berücksichtigung des Standpunktes des lernenden Schülers diktierte Methode. Wer sie ordentlich zu handhaben weiß, sagt dem Schüler nur hier und da, was ein Wort bedeutet (Wörterklärungen), alles andere läßt er ihn finden. Jeder Satz, nicht bloß die „Aufgabe“, ist eine Aufgabe, eine Frage an

und räumlicher Dinge. Elementar ist sie auch aus dem Grunde, weil sie von der sinnlichen Anschauung aus die Geisteskräfte des jungen Menschen in der anregendsten Weise in Bewegung setzt. Der schwächste Knabe kann sich mit Stäbchen die Arten der Drei- und Vierecke zusammenlegen, ja man kann manche Elementarsätze der Geometrie in den „Kindergärten“ nicht bloß zur Anschauung bringen, sondern selbst finden lassen. Bei Fröbel legten die Kleinen die Wahrheit des Pythagoräischen Lehrsatzes (am gleichschenkligen Dreieck) mit Holztäfelchen vor das sinnliche Auge. Aus diesen und anderen Gründen gehört die Geometrie auf den Grundlehrplan jeder elementaren Bildungsanstalt in dem ganzen Universum. Zu den nationalen Bildungsmitteln gehört sie nicht, sondern zu den Mitteln allgemeiner Geistesbildung vernünftiger Wesen.

den Schüler. Derselbe sucht und findet. Wo das nicht der Fall ist, da streiche man nur sofort die Geometrie von dem Lektionsplane! Wer sie wie einen gegebenen und zu gebenden Stoff behandelt, mißbraucht sie und leistet nichts. Trotzdem aber habe ich in vorliegendem Büchlein die Sätze in lehrender Form dargestellt — der Kürze wegen. Vorausgesetzt wird, daß der Lehrer die Sätze ganz selbständig behandle, je nach dem Bedürfnis seiner Schüler. Die Hauptsache, besonders zu Anfang, ist, das Anschauungsvermögen des Schülers in Thätigkeit zu setzen, so daß er die Wahrheit unmittelbar ergreift. Der Elementarschüler steht im ganzen auf dem Standpunkt des anschaulichen, unmittelbaren Erkennens und bleibt, wenn er nicht zu wissenschaftlicher Bildung aufsteigt, im ganzen sein Leben lang darauf stehen. Des Volkes Auffassungsweise ist die unmittelbare, nicht die vermittelte, syllogistische. Was der Schüler durch direkte Anschauung erkennt, hat für ihn das Gepräge der Gewißheit, die jeden Zweifel ausschließt. Die in solcher Weise als gewiß und einleuchtend aufgefaßte Wahrheit hinterher noch beweisen zu sollen, muß dem Schüler höchst sonderbar und unnatürlich vorkommen. Trotzdem aber wird ein verständiger Schüler Gründe anführen können, wenn sie auch nicht in der Form strengster Ableitung auftreten. Deshalb aber darf nicht auf Schluß und Begründung verzichtet werden. Die Geometrie ist etwas anderes als Naturgeschichte. Ihre bildende Kraft liegt nicht in äußerem Wissen, sondern in (innerem) Erkennen. Der Weg zu demselben geht durch die Sinne in den Kopf und vom Kopf in die Hand. Der Schüler der Geometrie soll Wahrheiten erkennen und — sie anwenden. Diesen Grundsätzen gemäß ist der Stoff „elementar“ behandelt; ihnen gemäß mußte auf manches, was die wissenschaftliche Behandlung fordert, z. B. auf den originellen Beweis „durch die Unmöglichkeit des Gegenteils“ (auf die apagogische Beweisart) verzichtet werden. Auf solche Kunstwege gerät der simple Menschenverstand nicht. Auch eignet sich die scharfsinnige Methode der altgriechischen Geometrie, die geometrische Analysis, bei deren Anwendung auf Aufgaben man sich dieselben gelöst vorstellt, um die Lösung zu finden, nur in einzelnen Fällen und für gute Köpfe zum Gebrauche in dem Anfangsunterricht.

Glaube aber ja nur kein Lehrer, daß er, ich möchte sagen, zu freiem Unterricht in der Geometrie befähigt sei, der sämtliche Lehrsätze beweisen kann; nein, darum noch lange nicht. Er ist dadurch kaum zum ersten Unterricht befähigt; er wird ihn, wenn er nicht mehr vermag, gebunden geben, sich nicht frei bewegen, darum auch die Schüler nicht frei machen. Will er dieses können, so muß er über jeden Satz frei spekulieren, ihn drehen und wenden, andere Darstellungen und Ausführungen und Auflösungen versuchen und sich bemühen, neue Sätze für sich hinzuzuthun, namentlich die Umkehrungen der Lehrsätze — wo und wie — aufzustellen, kurz sich selbst durch allseitige Behandlung des Stoffes zum Herrn desselben zu machen. Nur dadurch wird er auch dem einzelnen Schüler bei dessen freiem Suchen die erforderlichen Winke zu geben im Stande sein, sich vor dessen freiem Suchen und Finden nicht fürchten, sondern sich desselben freuen, weil er nicht zu besorgen hat, durch dessen Suchen und etwaige Fragen in Verlegenheit gesetzt zu werden. Das ist wahrer, geistlichaffender Unterricht, durch welchen nicht bloß der Schüler, sondern auch der Lehrer zulernt. Dem echten, geborenen Lehrer kommen die besten Gedanken während des Unterrichts. Wie weit ist ein solcher entfernt von der Einbildung, alles Nötige bereits zu wissen, wie gleichfalls von der Furcht, sich Blößen zu geben! Freudig gewahrt und bekennt er es, wenn sein Schüler eine Auflösung findet, die er bis dahin nicht kannte! — Eine geistbildende geometrische Lektion ist ein Akt geistiger Befreiung — die vom Lehrer durch Frage, Aufgabe, Anregung, Winkegebung, Einwürfe u. s. w. eingeleitet wird. Wer selbst nicht suchen kann — was man aber durch Suchen, freilich nur durch Suchen lernt, und „wer suchet, der findet“ — wird auch schwerlich andere dazu ermuntern. Es bleibt dann beim Vortragen, Dozieren — Lernen, Nachmachen u. s. w., was zwar nicht überall zu verwerfen, aber doch noch lange das nicht ist, was hier geleistet werden kann und soll. Das Schrecklichste von allem ist das „Beibringen“. Die „elementare Geometrie“ giebt Anstöße, zeigt einen Weg, den sie selbst geht; durch Selbstschau, Selbstversuchen, kurz Selbstthätigkeit findet man neue Wege. Ohne sie geht es nicht. Aber wenn es so geht, so ist jede geometrische Lektion eine Stunde

geistiger Entwicklung und für die Schüler eine wahre Freude. Denn dem Schüler wird nichts ihn Belastendes, kein Gedächtniswerk, kein mühsames Herbeischaffen des Materials, kein sogenanntes Lernen und Behalten zugemutet; nur freie Thätigkeit. Wer an „Beibringen“ (an dieses ominöse Wort und seinen, jedem wahren Didaktiker verhassten Begriff) denkt, bleibe davon! — Ich kenne keinen heiteren Unterrichtsgegenstand und — für den Geübteren — keinen leichteren für jede Art von Schülern. Man kann den Stoff auch dem stumpfsten Kopf zugänglich machen, wenn auch bei ihm der Fortschritt meist „aus der Hand in den Kopf geschieht“. —

„Grabt nur danach!“ sprach der sterbende Landmann zu seinen Söhnen, indem er ihnen als Preis ihrer Arbeit die Aussicht auf das Finden eines großen Schazes im Weinberge eröffnete. Grabt nur danach! heißt es auch hier. Der zu bearbeitende Acker ist der jugendliche Geist — die Werkzeuge sind Aufmerksamkeit und Nachdenken — die zu erarbeitenden Schätze sind Einsichten, Kenntnisse und Erkenntnisse und geistige Erstarfung. Grabt nur danach! geschenkt werden diese Schätze keinem, erben kann man sie auch nicht, und wer es an sich empfunden hat, wie wohlthätig nach ermüdenden oder gelangweilten Stunden in fader Geselligkeit eine ernste Geistesarbeit selbst auf den erstarkten Mann, nicht bloß auf den denkenden Geist, sondern auch auf Gemüt, Zufriedenheit und Heiterkeit wirkt, der kann es ermessen, welche Bildkraft und, wenn es sein muß, Heilkraft auf das jugendliche Gemüt eine ihm angemessene ernst-freudige Arbeit wirken muß.

Ich gehe nun zu spezielleren Bemerkungen über.

1. Da jeder Satz als Aufgabe hingestellt wird, so läßt man die Schüler mit Schiefertafel und Griffel oder Papier und Bleifeder in der Hand, die Lösung derselben still für sich suchen, es sei denn, daß die Aufgabe durch eine einfache, kurze Antwort gelöst wird. Wer die Lösung gefunden zu haben meint, streckt geräuschlos den Zeigefinger der linken Hand bescheiden in die Höhe — der Lehrer begiebt sich zu ihm und läßt sich das (vermeintlich) Gefundene geräuschlos (flüsternd) andeuten u. s. w.

Je verschiedener die Antworten und Lösungen sind, desto besser; sie werden darauf an der Schultafel mit der ganzen Klasse vorgenommen. Durch nichts empfindet der Schüler eine solche Freude am Lernen, als durch das Gelingen einer selbstthätigen Anstrengung, hier durch glückliche Lösung einer Aufgabe. Wer diese Freude einmal empfunden hat, den braucht man gewiß nicht mehr zur Aufmerksamkeit u. zu ermuntern. Wem sie im ganzen Schulleben nicht wurde, ist für reines Wohlgefallen an der Wahrheit und für selbständiges Suchen derselben nicht gewonnen worden. Die in solcher Manier schlecht geführten Schüler meinen dann, daß sie nichts wissen und finden könnten, was sie „nicht gehabt haben“. Gut geführte Schüler (in der Geometrie) dagegen wollen nicht, daß der Lehrer ihnen die Wahrheit sage, sie selbst wollen sie suchen. Bringt es der Lehrer dahin nicht, so sage er sich nur offen, daß er es nicht weit gebracht habe. Der gute Kopf sträubt sich, die Wahrheit, die er selbst finden kann, zu empfangen.*

2. Die Schüler müssen zwar die herkömmliche Bezeichnung der Linien, Winkel und Figuren durch Buchstaben kennen lernen; aber an der Schultafel, an der man mit einem Stäbchen auf alles Einzelne hinzeigen kann, lassen sie sich vielfach entbehren.

* Obige Wahrheit und die Wahrnehmung des darin steckenden Kennzeichens des guten und des schlechten geometrischen Unterrichts (ein Produkt der Pestalozzischen Schule) kommt, wenn es mit der Lehrerbildung so fortgeht, wie seit 1840 etwa, der Lehrermwelt wieder abhanden. Schon existieren Tausende, welchen der Gedanke, daß die Schüler Wahrheiten finden könnten und sollten, niemals in den Sinn gekommen ist; ja es fehlt nicht an solchen, die darüber spotten, indem sie darin „pädagogische Verftiegenheit“ zu wittern meinen. Hat man sie doch sagen hören: welche Überspanntheit der „Elementargeister“, daß die Jungen, die eben selbst erst produziert worden sind, schon produzieren sollen! Mögen sie! Sie werden den Lehrer, der die Wirkungen des die Selbstthätigkeit des Schülers erweckenden Verfahrens erfahren hat, nicht von dem richtigen Wege abbringen, welcher, wie schon angedeutet, der „heuristische“ und, wenn die Schüler die Eigenschaften der Raumgrößen aus ihrer Entstehung ableiten, der „genetisch-heuristische“ ist und bleiben muß. Nicht das subjektive Belieben, nicht die Willkür, nicht das Herkommen, nicht der traditionelle Schlendrian bestimmt die Methode, sondern die subjektiv-objektive Gesetzmäßigkeit.

Die Darstellung geht dann rascher von statten, die Figuren erscheinen reiner, die Anschauung ungetrübter. Nur halte man bei Vergleichen (z. B. zweier Dreiecke) auf symmetrische Nachweisung! Es ist nicht überall gleichgültig, ob man eine gerade Linie $a b$ oder $b a$ nennt.

3. Die Schule muß die zur praktischen Übung erforderlichen Versinnlichungsmittel und Instrumente besitzen: einen Meterstab, geteilt in 100 Centimeter, — ein hölzernes rechtwinkliges $\triangle$ — einen großen Zirkel mit einem Fuß zum Einschieben der Kreide — ein Quadrat von Holz oder Pappe, welches einen $\square$ -Decimeter darstellt — Würfel, Prismen, Walze, Regel, Kugel — einen Würfel von 1, 2, 3, 4, 5 Centimetern Kantenlänge.

4. Der Schüler besitze ein Lineal mit der Angabe eines Meters oder Decimeters, geteilt in Centimeter, ein kleines rechtwinkliges $\triangle$ von Holz, einen Transporteur, den er sich aus Pappe selbst anfertigen kann, womöglich auch ein Reißzeug u. s. w.

5. Für den Lehrer bemerke ich noch, daß die Beweise im Buche kurz angegeben sind, daß also die (leicht erkennbaren) Zwischensätze hinzuzufügen sind, weil alle Gründe, die gedacht werden, weil sie gedacht werden müssen, auch ausgesprochen werden sollen. Das Denken bedingt das Sprechen, das Sprechen illustriert das Denken. Die hier und da beigelegte Darstellung in der herkömmlichen mathematischen Zeichensprache (z. B. $r^2 \pi c.$) braucht der Lehrer nicht mitzuteilen. Wenn es aber geschieht, so muß der Begriff vorhergegangen und deutlich erkannt sein. Dann hat das Verständnis der mathematischen Zeichensprache keine Schwierigkeit. Sind die Schüler mit Decimalbrüchen nicht bekannt gemacht, was aber ein Mangel ist, so werden sie vermieden; man gebraucht dann in der Kreislehre das ausreichende Verhältnis 7 : 22.

6. Endlich versteht es sich von selbst, daß man die geometrischen Lektionen* überall wesentlich zur Entwicklung der

* Die Geometrie ist in doppelter Hinsicht ein formaler Unterrichtsgegenstand, einmal in methodischer wegen der formal bildenden Kraft, dann in objektiver Beziehung, weil sie es mit Formen zu thun hat. Ihr Inhalt besteht in Raumformen und deren Eigenschaften und Beziehungen.

formalen Kraft (im Denken und Thun) benutzt; daß man zwar mit Definitionen nicht beginnt, aber es doch zu klarer und bestimmter mündlichen Darstellung der Begriffe bringt.* Man wird dem Schüler nicht zum voraus sagen, was Beweisen und Auflösen heißt, was unter Voraussetzung oder Bedingung zu verstehen ist; aber nachdem er Lehrsätze bewiesen, Aufgaben aufgelöst, Bedingungen und Folgerungen unterschieden hat, wird er selbst finden, was diese Begriffe bedeuten, und er wird darüber Rechenschaft geben können. Auch die elementarste Behandlung der Geometrie muß mathematisches Erkennen und Wissen bleiben, in betreff dessen nur der Praktikant, der Nützlichkeitskrämer, der Utilitarier, der von freier Geistesbildung keine Vorstellung hat, fragt, was es nütze. Das heitere, freie Geistespiel darf mit nichts aus irgend einer Schule verbannt werden. Schillers tiefsinniges Wort: „der Mensch ist nur dann wahrhaft Mensch, wenn er spielt“, darf hier angezogen werden.

7. Was den Inhalt der „elementaren Geometrie“ betrifft, so muß ich sagen, daß ich denselben für Elementarschulen für ausreichend und darin gleichzeitig für verarbeitbar halte. Alle die

* Daß die Bildung der formalen Kraft die Bildung des Charakters, oder was man im engeren Sinn des Wortes „Erziehung“ nennt, nicht ausschließt, weiß der Pädagog. Beide Zweckbeziehungen und Bestrebungen liegen nicht neben und außer, sondern ineinander. Wahrer Unterricht ist geistige Disziplin. Der wahre Unterricht weckt die Denkkraft, der höchste — die Erfindungskraft. Der wahre Unterricht schafft produktive Kräfte, macht den Menschen nicht bloß zu einem thätigen, sondern in höherer Potenz zu einem schaffenden Wesen — die Elementarschule hat vorzugsweise diese Bestimmung — sie regt die Kräfte an und stärkt sie zur Anwendung im Leben; darin liegt ihr Wert und ihre hohe Bedeutung; sie als eine Lernanstalt im gewöhnlichen Sinne des Wortes auffassen, ist eine ganz gemeine Ansicht. Die heuristische Methode ist daher das Muster der geistentwickelnden, geistbildenden Unterrichtsweise. — Manche kleine Aufgabe ist nur aufgestellt, um die Schüler zum selbstthätigen Suchen zu veranlassen. Schlecht geführte Schüler (es kann nicht zu oft gesagt werden) zweifeln an der Möglichkeit, daß sie etwas finden könnten. Durch selbstgemachte Erfahrungen gewinnen sie wieder an Zutrauen zu sich selbst, um welches der dozierende, mit Lernstoff sie überschüttende und jede freie Geistesthätigkeit unterdrückende Unterricht sie gebracht hat. —

Sätze, welche ihre Anwendung und Verwendung erst auf höheren Stufen finden, mehr ein theoretisches als ein praktisches Interesse haben, sind weggelassen. Die Schwierigkeit der Begründung mancher (ausgelassenen) Sätze war auch eine nicht zu umgehende Rücksicht. In der Regel vereinigten sich diese beiden Momente, um die Weglassung zu entscheiden. Die praktischen Lehrer, welche das Objekt und zugleich den Grad der Fähigkeit der Subjekte kennen, welche das Objekt ergreifen und geistig verarbeiten sollen, mögen nun zusehen, ob ihnen Auswahl und Behandlungsweise zusagt. Aber ich muß noch, wenn ich den Text des Büchleins ansehe und bedenke, was alles der Lehrer zu thun hat, um den Inhalt in den Köpfen der Schüler fruchtbar zu machen (nach Goethe ist nur das wahr, was fruchtbar ist), ich muß dann sagen, daß ein solches Büchlein dem Lehrer — man kann sagen — alles überlassen muß. Der Schriftsteller, der das weiß, fühlt es tief, wie wenig die schwarzen Buchstaben auf dem Papier den Geist, die Gewandtheit, die Methode des echten Lehrers und Bildners auch nur anzudeuten vermögen. Doch was er thun kann, darf nicht unterlassen werden.

8. Darum soll hier — ich hoffe für die meisten zum Überfluß — an einem Beispiele gezeigt werden, wie nach meinem Ermessen in dem geometrischen Unterricht zu verfahren ist. Ich rede zu Anfängern, weiche daher einigen Wiederholungen nicht aus.

Zuoberst wird der Grundsatz festgehalten: es wird nicht vordoziert, — es findet kein Lernen (Lernen = Annehmen, Einprägen und Nachmachen) statt, es wird gesucht und — gefunden. Jenes gilt vom Lehrer, dieses vom Schüler. Es versteht sich, daß der Lehrer auch Schüler war und — bleibt. Wer das Suchen und Finden nicht selbst geübt hat und in dieser Übung nicht fortfährt, wird auch andere das Suchen und Finden (das freie Denken und Thun) nicht lehren; er verfällt dann dem herkömmlichen Mechanismus und Schlendrianismus — er doziert wie das Buch, das ihn deshalb vollständig ersetzen könnte, die Schüler ahmen nach und entschuldigen, wenn sie nach etwas, das ihnen noch unbekannt ist, gefragt werden, ihr Nichtwissen mit dem, den schlechten Unterricht, den sie genossen haben, offenbarenden Worte: „das haben wir nicht gehabt“. Als wenn

man nur das wissen könnte, was man „gehabt hat!“ Hatte Pythagoras seinen Lehrsatz auch in der Jugend „gehabt?“ Jene Meinung muß man bei den Schülern gar nicht aufkommen lassen; wenn man sie bei ihnen vorfindet, so rottet man sie dadurch aus, daß man sie zum Suchen und Finden anregt, gemeinschaftlich mit ihnen sucht — in Pestalozzi'scher Manier!

Aus dem genannten Grundsatz folgt die Regel: jeder Satz wird als Aufgabe behandelt. Der Lehrer stellt die Aufgaben: Untersuchet, wie sich die Bogen, auf welchen Peripheriewinkel von verschiedener Größe (rechte, spitze, stumpfe) stehen, zu einander verhalten! Konstruieret in den Kreis ein gleichseitiges $\triangle$! In dieser Weise.

Ausgeführtes Beispiel: Löset die Aufgabe, eine gerade Linie von bestimmter (gegebener) Länge in eine beliebige Anzahl (in 3, 5 u. s. w.) gleiche Teile zu teilen!

Wird diese Aufgabe an richtiger Stelle gegeben, was eine Haupttrübsicht ist, so sind die Aufgaben: eine g. L. und einen Winkel in 2 gleiche Teile zu teilen, vorhergegangen. Die Schüler können demnach bereits gerade Linien und Winkel in 2 und durch wiederholte Halbierungen in 4, 8, 16 gleiche Teile teilen, und zwar nicht bloß mechanisch, durch Probieren, sondern auch geometrisch, durch Konstruktion, welche keine anderen Instrumente zuläßt als Zirkel und Lineal.

Die Schüler suchen, jeder für sich.

Da sie wissen, daß die Grundlinie eines gleichschenkligen $\triangle$ halbiert wird, wenn man den ihr gegenüberliegenden Winkel halbiert, so gerät vielleicht der eine oder der andere Schüler auf die Meinung, daß durch die Teilung dieses Winkels in 3, 5, 7 gleiche Teile auch die Grundlinie (die gegebene Linie) in 3, 5, 7 gleiche Teile geteilt werde. Man läßt die Schüler gewähren; sie werden aber diese Meinung bald als irrig erkennen (gleichviel, ob durch Anschauung oder durch Anwendung bekannter Sätze), und wenn dieses nicht der Fall sein sollte, so kommen sie von ihrem Irrtum zurück durch die (innere) Mahnung, daß sie nicht wissen, wie man einen Winkel in 3, 5, 7 gleiche Teile teilt. Diese Aufgabe müßte also, wie sie einsehen, vorher ge-

löst sein. (Dazu ermuntert sie der Lehrer nicht, weil er weiß, daß die Schüler diese Aufgabe nicht zu lösen vermögen. Gut aber ist es, daß die Schüler auf dieselbe gestoßen sind, weil sie einen Blick in die Weite gewährt.)

Gesetzt nun, die Schüler machen vergebliche Versuche, die Aufgabe zu lösen, das Suchen führt zu keinem Finden — wie dann? —

Dann läßt der Lehrer die Schüler sich nicht bis zur Ermüdung oder Erschöpfung abquälen (das „Brüten“ und „Dämmern“ schwächt), sondern dann giebt er entweder der ganzen Klasse oder diesem oder jenem Schüler (die individuelle Behandlung thut oft in betreff der Erweckung innerer Vernunft, freier Thätigkeit u. s. w. Wunder, und fesselt den Schüler mit geistigem Bande an den Lehrer, den „Gehilfen seiner Freude“) — ich sage, dann richtet der Lehrer katechisierende Fragen an die Schüler oder erteilt ihnen Fingerzeige. In vorliegendem Falle: Leget einmal an die gegebene Linie in dem einen ihrer Endpunkte, unter beliebigem Winkel, eine g. L. von unbestimmter Länge! — Führt das die Schüler noch nicht auf die rechte Spur und zum Ziele, so läßt der Lehrer auf letztere von dem Winkelpunkte aus gleiche Längenzstücke, 3, 5, 7, auftragen — wenn die Schüler diese mit dem Zirkel aufgetragenen gleichen Teile mit den in der gegebenen Linie gesuchten gleichen Teilen zusammenhalten und dann noch nicht auf die gesuchte Konstruktion kommen, so lernt der Lehrer daraus, daß er sie überhaupt schlecht geführt hat.

Also: sie werden den Endpunkt der zweiten L. mit dem Endpunkte der ersten durch eine g. L. verbinden und mit ihr durch die Teilpunkte jener Linie Parallelen ziehen — die Aufgabe ist gelöst — fertig.

Ein zweites Beispiel. Gesetzt, der Lehrer habe den Schülern die Aufgabe gestellt, mit 3 der Länge nach gegebenen geraden Linien a, b, c, ein Dreieck zu konstruieren. Finden sie nicht gleich die leichte Lösung, so macht er sie durch Fragen darauf aufmerksam, daß durch die Endpunkte der g. L. a schon 2 Endpunkte des Dreiecks feststehen und es nur darauf ankommt, den dritten Eckpunkt zu finden. Dieser liegt von dem einen Eckpunkt um die Länge b, von dem andern um die Länge c ent-

fernt. Der gesuchte Punkt muß daher auf zwei Kreislinien liegen, welche mit den Radien b und c aus den Endpunkten der Linie a beschrieben werden, folglich in dem Punkte (oder in einem der 2 Punkte), in welchem sich die Kreislinien schneiden.

Wie nun, wenn die Schüler eine Aufgabe gelöst haben?

Nun stellen die Schüler den Vorgang in doktrinärer, strenger Form zusammen, erstens: Aufgabe; zweitens: Konstruktion (die Lösung); drittens: die Gründe für die Richtigkeit (der Beweis). Alles mit genauer Unterscheidung dieser drei Stücke und mit scharfen Accenten. (Der Beweis für die Lösung der ersten Aufgabe ergibt sich durch die Kongruenz der $\triangle\triangle$, welche entstehen, wenn man durch die Teilpunkte der gegebenen Linie mit der Konstruktionslinie Parallelen zieht.) —

Das ist (meine ich) Anleitung zum Selbstdenken, zu geistiger Selbstthätigkeit überhaupt, ist Entwicklung der Sprachkraft, ist Geistesdisziplin und Stärkung des Charakters zugleich — ist heuristische, dem Entwicklungsgesetze der menschlichen Natur entsprechende Methode — der Preis der Lehrerthätigkeit in den Elementen der exakten Wissenschaften, von der (Gott sei es geklagt — Pestalozzi's Entdeckungen sind bereits ein halbes Jahrhundert alt) bis dato Tausende von deutschen (besonders akademisch gebildeten) Lehrern zum unermesslichen Schaden ihrer Schüler keine Ahnung haben.

9. Der nachfolgende Inhalt wird den Schülern hier und da gelegentlich, aber wiederholt deutlich gemacht, nachdem sie die in demselben vorkommenden Sätze öfter angewandt haben. Der gewöhnliche gesunde Menschenverstand kennt sie, urteilt ihnen gemäß, wenn ihm auch das klare Bewußtsein über sie abgeht. Zur bewußten Bildung ist daselbe aber erforderlich. Der gründliche Unterricht klärt über das, was man richtig vollzogen hat, auf. Man fängt mit den nachfolgenden Grundsätzen (Axiomen) und Erklärungen (Definitionen) nicht an — denn es sind allgemeine Sätze —, sondern man schließt mit ihnen oder (besser) schiebt sie an passenden Orten ein.

1) Jedes Ding ist sich selbst gleich; Winkel a = Winkel a , Linie a b = Linie a b .

2) Das Ganze ist größer, als jeder Teil des Ganzen, und alle Teile zusammen sind dem Ganzen gleich.

3) Wenn 2 Dinge ein und demselben dritten gleich sind, so sind sie einander gleich. Wenn Winkel $a = \text{Winkel } c$, Winkel b auch $= \text{Winkel } c$, so ist Winkel $a = \text{Winkel } b$. — Erstes Ding (oder erste Größe) a , zweites Ding b , drittes Ding c .

Wenn $a + b = 2 R$, $c + d = 2 R$: so ist $a + b = c + d$. Erste Größe $a + b$, zweite Größe $c + d$, dritte Größe $2 R$.

Die dritte Größe kann, wie die beiden andern, eine zusammengesetzte (mehrfache) Größe sein.

4) Von gleichen Größen kann man eine statt der andern setzen.

5) Gleiches zu Gleichem giebt Gleiches (gleiche Summen). $2 \times 3 = 6$; folglich $2 \times 3 + 4 = 6 + 4$. Die Summen gleicher Dinge sind gleich.

6) Gleiches von Gleichem bleibt Gleiches (gleiche Reste oder Differenzen). $12 = 10 + 2$; folglich $12 - 8 = 10 + 2 - 8$. Die Unterschiede gleicher Dinge sind gleich.

7) Gleiches mit Gleichem multipliziert giebt Gleiches (gleiche Produkte). Wenn $a = b$, $c = d$: so ist $a \cdot c = b \cdot d$. Gleiche Faktoren geben gleiche Produkte.

8) Gleiches durch Gleiches dividiert giebt Gleiches (gleiche Quotienten). Wenn $x = q$, $y = z$: so ist $\frac{x}{y} = \frac{q}{z}$. Gleiche Dividenden und Divisoren geben gleiche Quotienten.

9) Die Sätze 5 bis 8 enthalten den allgemeinen Satz: gleiche Operationen mit gleichen Größen vollzogen, liefern gleiche Resultate. (Auf das geistige Leben und die Natur angewandt, besagt er: sehen wir dort und hier dieselben Kräfte walten, so erwarten wir dieselben Resultate, sehen sie voraus. Gleiche Ursachen — gleiche Wirkungen, Kausalgesetz. Alles erfolgt nach Gesetzen).

10) Gleiches zu Ungleichem oder Ungleiches zu Gleichem hinzugethan, und: Gleiches von Ungleichem oder Ungleiches von Gleichem weggenommen, giebt Ungleiches. Wo das Größere oder Kleinere herauskommt, ist leicht zu ermitteln. Desgleichen mit der Multiplikation und Division etc.!

11) Wenn von 3 Größen die erste größer ist als die zweite und die zweite größer ist als die dritte, so ist auch die erste (umfomehr) größer als die dritte. Was größer ist als das Größere, ist auch größer als das Kleinere. Wenn $a > b$, $b > c$, so ist $a > c$.

12) Wenn zwei Linien, Flächen oder Räume (in der Wirklichkeit oder in Gedanken) so gelegt werden können, daß sie mit allen ihren Teilen zusammenfallen, sich decken, so sind sie gleich.

13) Diese Sätze sind Grundsätze (ewige Wahrheiten), von welchen keine Ausnahme existiert, weil eine solche nicht denkbar ist, so wenig denkbar wie eine Wirkung ohne Ursache, eine Ursache ohne ihre Wirkung (das Kausalgesetz). Überall auf der Erde ist $2 \cdot 2 = 4$, nirgends $= 5$, und die gerade Linie ist auch auf dem Jupiter der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.

14) Ein Grundsatz (Axiom) ist ein Satz, der so einfach ist, daß man ihn sofort versteht und als richtig anerkennt, so daß er nicht eines Beweises, nur einer Erläuterung (Exemplifizierung) bedürftig ist. Das Gegenteil eines Axioms ist undenkbar, d. h. es ist undenkbar, daß ein Axiom falsch sei. Überhaupt, wenn das direkte Gegenteil eines Satzes undenkbar ist, so ist der Satz wahr. (Auf diesem Satze ruht die Gewißheit des sogenannten apagogischen Beweises, des Beweises durch die Unmöglichkeit des Gegenteils. Er gewährt nur eine indirekte Erkenntnis.)

15) Ein Lehrsatz (Theorem, ist ein Satz, der eines Beweises fähig ist, der bewiesen werden kann. Z. B.: die Summe aller Winkels eines $\triangle = 2 R$.

16) Einen Satz beweisen heißt: seine Wahrheit von andern Wahrheiten ableiten (deduzieren), ihn vermittelt anderer Sätze, die man bereits als richtig anerkannt hat, als wahr darthun; zeigen, daß er wahr sein muß, weil andere wahr sind u. s. w. (Man beweist nur das Beweisbare, nicht das Unbeweisbare.)

17) Jeder Lehrsatz wird unter gewissen Voraussetzungen oder Bedingungen aufgestellt (keine Behauptung schwebt in dem leeren Raume oder in der blauen Luft). Z. B.: der pythagoräische Lehrsatz enthält die Voraussetzung, daß das $\triangle$, von

dem er behauptet wird, ein rechtwinkliges $\triangle$ sei. Um die Voraussetzung oder Bedingung richtig zu erkennen, thut man wohl, den Lehrsatz mit Wenn einzuleiten (hypothetisch auszudrücken): wenn dieses ein rechtwinkliges $\triangle$ ist, so u. s. w. Wenn diese 2 $\triangle\triangle$ alle Seitenpaare gleich haben, so u. s. w.

18) Einen Satz umkehren, heißt: die Bedingung zur Folgerung, die Folgerung zur Bedingung machen. Satz: wenn a ist, so ist b; Umkehrung: wenn b ist, so ist a. Wenn 2 g. L. $\parallel$ sind, so sind die inneren Wechselwinkel einander gleich. Umgekehrt: wenn die inneren Wechselwinkel gleich sind, so sind die Linien $\parallel$.

In der Regel sind, wenn die direkten Sätze wahr sind, auch die umgekehrten wahr. Daß das aber nicht ganz allgemein gilt, zeigt das Beispiel: wenn es regnet, so wird es naß; wenn es naß wird, so regnet es.*

19) Eine Aufgabe (ein Problem) ist ein Satz, welcher verlangt, daß etwas gethan, eine Operation vollzogen werde. Die Angabe dessen, wie das verlangte gethan, wie die Operation vollzogen wird, heißt die Auflösung. (Man löst nur das Lösbare, nicht das Unlösbare, das sich Widersprechende.)

Die Aufgaben sind entweder allgemein, z. B.: ein gleichseitiges $\triangle$ zu beschreiben, oder es wird verlangt, daß an oder mit bestimmten Dingen (Stücken) eine Aufgabe vollzogen werden soll, z. B.: über einer g. L. von bestimmter Länge ein gleichseitiges $\triangle$ zu beschreiben. Von diesen bestimmten Stücken sagt man: sie seien gegeben (gegebene Stücke).

* Das Weitere zeigt die Logik, deren Studium keinem Lehrer erlassen werden kann. Im Seminar kann man ihre wichtigsten Lehren an den Unterricht in der Mathematik und in der Muttersprache anknüpfen. Man probiere, welche Schlüsse von Examinanden aus folgendem Obersatz in Verbindung mit jedem der 4 Untersätze gezogen werden:

Obersatz: Wenn A ist, so ist B.

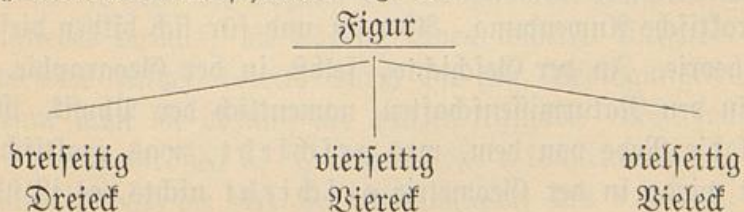
1. A ist, folglich — —
2. A ist nicht, — —
3. B ist, — —
4. B ist nicht, — —

und ob sie jeden Schluß durch Beispiele zu illustrieren verstehen. —

20) Diese Stücke kann man nicht immer ganz willkürlich wählen, sondern diese Wahl ist oft in bestimmte Grenzen eingeschlossen, wenn die Lösung der Aufgabe möglich sein soll. Wenn z. B. mit 3 gegebenen geraden Linien ein $\triangle$ beschrieben werden soll, so müssen je 2 zusammen größer sein als die dritte. Wäre dieses nicht, so wäre die Aufgabe oder vielmehr die Auflösung unmöglich. Die Angabe der Grenze, innerhalb welcher die Aufgabe sich halten muß, heißt die *Grenzbestimmung* (Determination).

21) Wie ein Lehrsatz oft auf mehrfache Weise bewiesen, so kann oft eine Aufgabe in mehrfacher Weise aufgelöst werden. Dadurch wird die Aufgabe nicht unbestimmt, wohl aber dadurch, daß mehrere, verschiedene Größen der Aufgabe Genüge leisten. Z. B.: welche 2 ganze, positive Zahlen geben zusammen 12? $11 + 1$, $10 + 2$ u. s. w. Welche Größen haben im rechtwinkligen $\triangle$ die beiden spitzen Winkel? Der ersten Frage genügen 6 richtige Antworten; der zweiten unzählig (unendlich) viele.

22) Eine Erklärung (Definition) ist ein Satz, welcher angiebt, was ein Ding ist, worin seine Wesenheit besteht. Sie enthält darum die Eigenschaften oder Merkmale, welche das Ding zu dem machen, was es ist, seine wesentlichen Merkmale, von welchen die übrigen abgeleitet werden können. Z. B.: ein geradliniges $\triangle$ ist eine ebene Figur, deren Grenze drei g. L. bilden. Ein solches $\triangle$ enthält eine Menge von Merkmalen oder Eigenschaften, die in den in seiner Definition angegebenen stecken, aus denselben abgeleitet werden können, die aber deswegen nicht zu Anfang mitgedacht werden. Sind diese entwickelt, so denkt man sie mit oder kann sie mitdenken; vorher aber nicht. (Man erklärt nur das Erklärbare, nicht das Unerklärbare.) Die richtige Definition eines Begriffs muß enthalten: den ihm übergeordneten, allgemeineren Begriff und die Merkmale, welche ihn von den nebengeordneten unterscheiden. Z. B.:



Der dem Drei-, Vier- und Vieleck gemeinschaftlich übergeordnete (höhere, allgemeinere) Begriff ist „Figur“. Drei-, Vier- und Vieleck sind demselben in gleichem Grade unter-, folglich nebengeordnet. Sollen dieselben nun definiert werden, so wird ihnen der gemeinschaftliche übergeordnete Begriff beigelegt und das Merkmal beigelegt, welches sie voneinander unterscheidet. Das Viereck ist eine Figur, deren Grenze 4 Linien bilden, u. s. w.; das Vieleck ist eine Figur, deren Grenze mehr als 4 Linien bilden.

10. Das Suchen der Beziehungen, in welchen die gesuchten Stücke der Aufgaben und die Behauptungen der Lehrsätze mit bereits bekannten Sätzen stehen, an die sie geknüpft und von ihnen aus durch die gefundenen Mittelglieder gelöst und bewiesen werden können, ist eine allgemeine Regel, die ganz richtig ist, die aber nicht weiter detailliert werden kann, darum also die subjektive Erfindungskraft des Schülers herausfordert. Diese kann geübt werden und wird durch die beschriebene Methode geübt; aber sie kann nicht auf spezielle, in allen einzelnen Fällen sicher führende Regeln zurückgeführt werden. Wie es keine Regel dafür giebt, wie man etwas Verstecktes suchen solle, so giebt es auch keine Regel, die dem Menschen vorschreibe, an das zu denken, was er braucht. Das ist und bleibt ewig eine Sache des Genies. Wer keine Spur davon besitzt, wird in Ewigkeit wissenschaftlich nichts erfinden, daher auch selbständig keine neuen Auflösungsweisen, keine neuen Beweise finden. Aber auch das Genie muß geweckt werden — durch Übung. Der richtig behandelte mathematische, insonderheit der geometrische Unterricht gewährt vor allen anderen Unterrichtszweigen eine Prüfung der Köpfe. — Keinem Kenner der Geometrie wird es entgehen, daß sie an sich mehr die ruhigen, theoretischen als die unruhigen, praktischen Köpfe anzieht. Es kommt freilich alles auf die Art der Behandlung des Stoffes an, und die geometrischen Sätze finden auch eine praktische Anwendung. Aber an und für sich bilden dieselben eine Theorie. In der Geschichte, selbst in der Geographie, noch mehr in den Naturwissenschaften, namentlich der Physik, ist fast überall die Rede von dem, was geschieht, was praktisch bewirkt wird; in der Geometrie geschieht nichts, es ist überall vom Sein die Rede. Alles in ihr ist gleichzeitig, eins ist so

wahr wie das andere, kein Streit, kein Einanderentgegenwirken, kein Spiel der Kräfte —, reines Sein, aber eins durch das andere und mit dem andern. Der Reiz der Geometrie liegt in diesem Erkennen des einen durch das andere, in der Ableitung des einen vom andern, in dem logischen Prozeß. Darum hat die Geometrie den vorzüglichsten Reiz für die Köpfe, welche Anlage zur Spekulation haben. Aber eben darum, weil das praktische Leben ihre Kenntniss nicht unbedingt fordert, weil bei ihr niemals die Rede davon ist, ob sie profitabel wirkt, ist das Interesse und das Wohlgefallen an ihr ein reines, die Beschäftigung mit ihr ist von sittlicher Wirkung. —

11. Die sogen. „geometrische Analysis“ der alten griechischen Geometer ist, wie bereits angedeutet, eine sehr scharfsinnige, äußerst bildende Methode. Wir wollen hier dem Wißbegierigen eine Vorstellung davon geben. Vorzugsweise wendet man sie auf die Lösung von Aufgaben, aber auch auf Lehrsätze an. Die Methode heißt „analytisch“ (auflösend), weil man sich die zu lösende Aufgabe als gelöst, als fertig vorstellt und sie demnächst zergliedert, wie aus dem Nachfolgenden erhellt.

Zur Ausführung konstruiert man eine Figur, welche die gegebenen Stücke (die vorausgesetzten Bedingungen) mit den gesuchten enthält.

Demnächst sucht man die Art der Abhängigkeit des Gesuchten von dem Gegebenen zu erkennen; man geht von dem Gesuchten aus und schließt von da rückwärts auf das Gegebene. Gelingt dies, so kehrt man die Betrachtung um, geht von dem Gegebenen aus und konstruiert von ihm aus vorwärts (synthetisch) die Lösung der Aufgabe. Läßt sich das Gesuchte nicht unmittelbar und direkt mit dem Gegebenen in Verbindung bringen, sondern hängt es von einem Mitgliede ab und dieses von dem Gegebenen, so setzt die Lösung der Aufgabe die Konstruktion des Mittelgliedes voraus, die Lösung einer anderen Aufgabe. Hat man dieselbe früher bereits durch die geg. Bedingungen gelöst, so erkennt man die Lösung der ganzen Aufgabe. Man soll z. B. durch die geg. Größen a , b , c die Größe x konstruieren. Erkennt man unmittelbar die Art der Abhängigkeit des x von a , b , c ,

so kommt man direkt von a, b, c auf x . Hängt aber x von d ab, und d von a, b, c , so konstruiert man erst durch a, b, c die Größe d und durch d die Größe x . In letzterem Falle ist die Aufgabe auf eine andere (diese vielleicht noch auf eine zweite) reduziert. Jedenfalls muß man bis auf die geg. Bedingungen zurückschließen, weil eben durch diese (die geg. Stücke) die Aufgabe gelöst werden soll.

12. Wendet man die „geometrische Analysis“ prüfend auf eine Behauptung (einen Lehrsatz) an: es werde z. B. behauptet, daß aus den geg. Bedingungen oder Voraussetzungen a, b, c die Eigenschaft x folge, so sucht man zu erkennen, wovon x abhängt. Angenommen von m , m von l , l von c, b, a ; alsdann kehrt man die Schlussreihe um und schreitet von a, b, c zu l , von l zu m , von m zu x fort. Gelangt man zu dem Schluß: wenn x wahr wäre, so müßte auch p wahr sein, p aber ist falsch, alsdann ist auch x falsch. —

Als Beispiel wollen wir den pythagoräischen Lehrsatz wählen.

Gesetzt, es werde behauptet daß das Quadrat der Hypotenuse den beiden Quadraten der Katheten zusammen gleich sei, und man wollte nun diese Behauptung prüfen: so würde man zunächst denken, daß sich im Fall der Wahrheit des Satzes das Hypotenusen-Quadrat in zwei Teile zerlegen lassen müsse, von welchen der eine Teil dem einen, der andere Teil dem andern Quadrat der Katheten gleich wäre. Der naheliegende Gedanke würde dann der sein, diese Teilung von der Spitze des rechten Winkels aus durch ein Perpendikel auf die Hypotenuse und dessen Verlängerung zu versuchen. Man würde mit einem gleichschenkligen Dreieck beginnen.* Der Augenschein würde dann auch lehren,

* Nämlich mit dem einfachsten Falle. Daß in diesem Falle der Satz richtig sei, lehrt unmittelbar die Anschauung, wenn man das Quadrat der Hypotenuse eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks nach innen legt und die Quadrate der beiden gleichen Katheten beschreibt. Das Quadrat der Hypotenuse zerfällt dann in 4 Dreiecke, deren jedes Quadrat der Katheten 2 hat.

Es entsteht dann die Vermutung, daß der Satz allgemeine Gültigkeit haben möge. Die oben angegebene Teilung des Hypotenusen-Quadrats bestärkt diese anschauliche Vermutung. Eine solche zuzulassen, ist (mit Verlaub!) didaktische Weisheit; sie führt auf den Weg des Entdeckens oder Erfindens (meinetwegen Findens). —

daß im Fall der Ungleichheit der Schenkel des rechten Winkels der kleinere Teil des Hypotenusen-Quadrats zunächst liege dem kleineren Katheten-Quadrat. Beide wären dann miteinander zu vergleichen. Nun sind aber bis dahin nicht Parallelogramme, sondern Dreiecke miteinander verglichen worden. Man käme dadurch auf die Vorstellung, daß man die Vergleichung der beiden Parallelogramme auf Dreiecke zu reduzieren habe. Wie diese konstruiert würden, lehrt der geometrische Blick. In der Figur sind die zu ziehenden Hülfslinien durch Striche angedeutet. Jedes dieser Dreiecke ist die Hälfte eines der betr. Parallelogramme; denn jedes steht fest mit dem betreffenden auf derselben Basis und liegt zwischen denselben Parallelen (dieselbe Grundlinie, dieselbe Höhe). Es kommt also nun darauf an, die Gleichheit dieser Dreiecke darzuthun. Das erhellt aus der Gleichheit zweier Seitenpaare und der von ihnen eingeschlossenen Winkel. Schluß: weil die Dreiecke flächengleich sind, so sind es auch die doppelten: die Parallelogramme.

Die Umkehrung des analytischen Ganges ist der synthetische Beweis. Dort ging man von der zu beweisenden Behauptung aus und schritt zu den gegebenen Bedingungen zurück, hier geht man von diesen aus und gelangt schließlich zur Feststellung der behaupteten Thesıs.

Theoreme und Probleme werden nach dem Wesen der „geometrischen Analysis der Alten“ in derselben Weise behandelt.

13. Der Inhalt der Geometrie besteht in Erklärungen (Definitionen), Grundsätzen (selbstverständlichen Sätzen, Axiomen), Lehrsätzen (Theoremen) und Aufgaben (Problemen). Die Definitionen erklären Begriffe durch Angabe ihrer wesentlichen Merkmale, die Axiome werden durch Beispiele erläutert, die Lehrsätze bewiesen oder demonstriert, die Aufgaben gelöst. Die Lehrsätze stellen Behauptungen unter bestimmten Bedingungen oder Voraussetzungen (Prämissen) auf. Die Demonstrationen werden geführt durch Definitionen, Axiome und bereits erwiesene Sätze. Die Aufgaben werden gelöst durch Konstruktionen und Rechnungen; die Stücke, welche zur Auflösung verwandt werden sollen, heißen gegebene Stücke. Die Geometrie gehört zu den Wissenschaften, deren Inhalt ab-

solute (evidente und notwendige) Wahrheiten innewohnt; man nennt sie exakte Wissenschaften. Die in der Geometrie behandelten Vorstellungen und die in ihr erzeugten Gebilde sind idealer Natur, die reale Wirklichkeit entspricht ihnen nicht; es existieren keine mathematischen Punkte, Linien, Flächen und Körper. Ob sie der sinnlichen Anschauung entnommen (von ihr abstrahiert), oder ob sie reine Gebilde unseres Geistes sind, ob z. B. die Axiome (Gleiches zu Gleichem u. s. w., wenn zwei Größen einer dritten gleich sind u. s. w.) aus sinnlicher Wahrnehmung stammen, ist eine gelehrte Streitfrage;* der Elementarlehrer hält sich an den ersten Teil dieser Alternative. Er entwickelt aus sinnlichen Anschauungen die mathematischen Vorstellungen und Begriffe, operiert dann selbständig mit ihnen, indem er zunächst ihr Wesen feststellt und dann aus ihnen Schlüsse zieht. In der Definition eines geradlinigen Triangels liegt nur die Vorstellung einer von drei Geraden begrenzten Figur. Diese Figur hat aber noch andere (sehr viele) Eigenschaften, welche zu Anfang nicht mitgedacht, nachher aber gesucht werden. Die wenigen, den Begriff bildenden Merkmale heißen konstituierende oder konstitutive, die aus ihnen entwickelten attributive, die aber dem Dinge ebenso wesentlich sind wie jene, nur von Anfang an nicht mitgedacht wurden.

14. Ich will hier ein Wort darüber sagen, warum ich in dem „Pädagogischen Jahrbuche für 1864“ die Geometrie zu den induktiven Wissenschaften gerechnet habe, obgleich die Beweisführung eines Lehrsatzes durch Ableitung der Deduktion aus Prämissen und bereits erwiesenen Wahrheiten geschieht und die Aufgaben synthetisch gelöst werden (wenn auch der Beweis und die Lösung durch Analysis gefunden wurden).

Induktion ist Schluß aus einzelnen Fällen auf alle Fälle einer Art, ist Verallgemeinerung bestimmter Merkmale und Übertragung derselben auf eine ganze Gattung von Dingen. Alle Menschen sind sterblich, jedes Tier hat ein Nervensystem, alle Planeten drehen sich in derselben Richtung um die Sonne, keinem

* Ob a posteriori, oder a priori.

fehlt die Drehung um eine Achse, es folgt dieses aus der Natur der Planeten.*

Dieses sind Schlüsse nach der Induktion, induktische Schlüsse, Generalisationen. Ein durch Induktion gefundener Satz ist allgemeiner als die Sätze, aus welchen er ermittelt ist.

Auf ihnen ruht nach meiner Meinung das Grundwesen der Geometrie. Erstens sind die Grundobjekte derselben (Punkt, Linie, Fläche, Körper) der Erfahrung und Beobachtung sinnlicher Gegenstände entnommen, durch Abstraktion gewonnen. Die Urteile, daß jeder Körper einen Raum einnehme, von Flächen begrenzt sei, die Fläche von Linien u. s. w., sind allgemeine Urteile, sind Schlüsse aus der Beobachtung einzelner Fälle, folglich Induktionsschlüsse.

Zweitens werden die Wahrheiten, welche an einzelnen Figuren (dem sinnlichen Auge vorliegend oder durch produktive Phantasie vorgestellt) nachgewiesen werden, auf alle Figuren derselben Art übertragen. Was von einem Dreieck, Parallelogramme, Kreise gilt, gilt von allen Dreiecken, Parallelogrammen, Kreisen. Induktionsschlüsse!

Die Ansicht unter „Erstens“ ist, wie die Kenner wissen und wie oben schon angedeutet wurde, eine bestrittene; die Gegner derselben leiten die mathematischen Grundvorstellungen ohne Beobachtung, Erfahrung und Experiment unmittelbar aus der Natur des menschlichen Geistes ab. Ich schließe mich an gelehrte Männer (wenn auch nicht an Whewell, den Verfasser der „Geschichte der induktiven Wissenschaften“, doch an John Stuart Mill, den Verfasser des „Systems der deduktiven und induktiven Logik“) an, indem ich die Grundprinzipien der Geometrie (Axiome) für Produkte (Generalisationen) der Erfahrung, für Induktionen aus der Erfahrung halte. Die meisten einzelnen geometrischen Wahrheiten werden durch innere Anschauung (intuitiv) erkannt und durch Ableitung oder Deduktion erwiesen (demonstriert). Die geistigen Vorgänge bei dieser Thätigkeit sind daher überhaupt

* Alle sogen. praktischen Wahrheiten und Regeln, Sprichwörter u. s. w. sind aus einzelnen Fällen gezogene Schlüsse, Induktionen. Ihr Charakter ist Verallgemeinerung. Wo die nicht ist, da ist auch keine Induktion.

zusammengesetzter, unmittelbar direkter und indirekter, induktiv=deduktiver Natur. Man bleibt nämlich bei der unmittelbaren (intuitiven) Anschauung nicht stehen, sondern will die also erkannten oder auch die nicht immer anschaulich erkannten Wahrheiten verstandesmäßig mit anderen Wahrheiten in Verbindung bringen und ihre Gewißheit mittelbar durch diese darthun. Die intuitiv gefundenen Wahrheiten sollen durch Syllogismen bewiesen werden. Begreiflicherweise ist dieses nur möglich, wenn die einzelnen Wahrheiten in solcher Verbindung stehen, daß sie voneinander abgeleitet werden können, wie es z. B. in den mathematischen Wissenschaften, beispielsweise zur Zeit aber in der Chemie noch nicht der Fall ist. In unvollkommenen Zuständen einer Wissenschaft stehen die einzelnen, durch Induktionen gefundenen Sätze unverbunden (juxtaponiert) nebeneinander. Werden dieselben aber nach und nach als Glieder einer Kette erkannt, so daß von dem ersten bis zum letzten ein innerer Zusammenhang, eine Ableitung durch Schlüsse (Syllogismen) stattfindet, so steigt das so verbundene Wissen zum Range einer Wissenschaft im engeren Sinne des Wortes — das prinzipiell induktive Wissen ist dann in eine deduktive oder demonstrative Wissenschaft verwandelt worden. Das großartigste Beispiel aus dem Gebiete der Naturwissenschaften bietet Humboldts „Kosmos“ dar. Die Naturgesetze sind Produkte von Induktionen, welche von diesem großen Manne zu einer solchen Einheit verbunden worden sind, daß es ihm möglich war, die Entstehung der Welt aus der bloßen Annahme einer Urmaterie zu erklären und auf dieselbe die durch Induktion gefundenen Natur-, namentlich die Bewegungsgesetze anzuwenden.

Meine Meinung ist also die: die geometrischen Urvorstellungen werden durch Induktion gewonnen, darum und aus den angeführten Gründen kann die Geometrie zu den induktiven Wissenschaften gerechnet werden; aber trotzdem rechnet man sie, da ihre Wahrheiten aus sogenannten aprioristischen Prinzipien entwickelt werden, mit Recht nicht zu den Erfahrungs-, sondern zu den reinen und strengen Wissenschaften. —

15. Die Gesetze der Geometrie sind auch Gesetze der Natur. Dieselben können daher sowohl aus der äußeren wie

aus der inneren (geistigen) Natur geschöpft werden. Bildender ist natürlich der letztere Weg, indem man die geometrischen Wahrheiten aus einer kleineren Anzahl von Vorderjäten, deren Gewißheit und Allgemeinheit von jedem Denkenden zugegeben wird, ableitet. Leicht erkennbar aus jenem Umstande ist die Wahrheit, daß die Geometrie (die Mathematik überhaupt) nicht bloß wegen ihrer sicheren Methode, sondern auch wegen ihres Inhaltes die schwierigere Aufgabe Erklärung der Naturerscheinungen einleitet, vorbereitet und begründet. Darum hat man die mathematische Bildung für die Basis der Bildung zum Naturforscher, ja jeder streng wissenschaftlichen Bildung erklärt, und man hat Plato das Wort in den Mund gelegt, daß es keinen besonderen Weg zur Geometrie für Könige gebe, und daß ein Nichtgeometer zum Erforschen der Natur und ihrer Geseze (der Philosophie) unfähig sei.

Beiläufig geschehe hier der etwas verwunderlichen Thatsache Erwähnung, daß es eine gewisse wohlbekannte Klasse von Menschen giebt, welche eine Art von Besorgnis oder Furcht vor dem Einfluß der Verbreitung der Naturwissenschaften unter dem Volke äußern, daß man aber weder von ihnen noch von andern jemals etwas von einer durch die Geometrie zu befürchtenden Gefahr gehört hat. Diese Thatsache muß den in Verwunderung setzen, welcher weiß, nicht nur, daß, wie oben gesagt worden, die Geseze der Geometrie auch Naturgeseze sind, sondern daß die Geometrie (die Mathematik überhaupt) die Geseze der Natur fundiert. Steckt Gefahr in dem Betrieb der Naturwissenschaften, so steckt sie doppelt in der Mathematik, allerdings nicht in dem Inhalt ihrer Sätze, wohl aber in den Wirkungen ihrer Methode, welche in dem Geiste die Liebe zu untrüglicher Gewißheit und damit die Abneigung gegen alles oberflächliche Fürwahrhalten und Behaupten erzeugt. Gerade darin stecke — meinen andere — die Würde dieser Wissenschaft und ihr hoher Wert als Disziplin des Erkenntnisvermögens und des Charakters. —

16. Noch ist eines Umstandes zu gedenken, der die Geometrie als Beschäftigungsmittel der Jugend und zwar der frühen Jugend empfiehlt: ihre Einfachheit. Was ist einfacher als ein Punkt, eine Linie? Und doch, wie viel läßt sich damit

machen, welche Menge von Kombinationen lassen sie zu! Man vergleiche mit diesen einfachen Objekten die fast zahllose Menge der Merkmale und verschiedenen Momente, welche in der Naturgeschichte, in der Geographie, der Physik u. s. w. vor das Auge treten und berücksichtigt werden müssen! In dem geometrischen Unterricht befindet man sich gewissermaßen auf einem leeren Felde, vor einer leeren Tafel, auf der man die einfachen und doch so mannigfaltigen Gebilde entstehen sieht. Da ist nichts Kompliziertes, was Verwirrung, Zerstreuung, abziehende Nebengedanken erzeugen könnte, alles ist einfach und wegen seiner Einfachheit klar und durchsichtig. Die Produkte der Thätigkeit werden nicht, wie in der Natur, in der Menschengeschichte, in den sozialen Wissenschaften von einer Menge zusammenwirkender Ursachen, realer Gründe und praktischer Momente, sondern von einem Grunde, einer Vorstellung erzeugt — ein Umstand, den die Geometrie vor diesen Wissensgebieten, selbst vor der Rechenkunst, selbst vor der theoretischen Zahlenlehre voraus hat und ein reines Wohlgefallen an ihr erzeugt, die Aufmerksamkeit der Lernenden fesselt, sie zu einem grundlegenden, anbahnenden, elementaren Lehrgegenstand stempelt und den Lernenden zu einer Bearbeitung komplizierter Gegenstände befähigt.

17. Oben habe ich für manche Situationen das empirische, experimentelle Verfahren in dem geometrischen Unterricht für zulässig erklärt. Einmal, weil die Beobachtung und das Experiment dieselben Resultate liefert wie das Nachdenken (wer praktisch genau mißt, findet die Summe der drei Winkel eines geradl. Dreiecks $= 180^\circ$), dann zweitens, um nochmals daran zu erinnern, weil die Köpfe sehr verschieden sind und man sich bei dem einen oder andern mit der empirischen, äußerlich aufgefundenen Wahrheit begnügen muß. Der Unterschied der Standpunkte zweier Schüler besteht dann nicht in dem Unterschiede des Wissens, sondern in dem Unterschiede der Erkenntnis. Beide besitzen dasselbe materielle Wissen; aber nur der eine kennt die Gründe und kann die Begründung leisten, was der andere nicht kann.

18. Summa, wer sich und andern über die in der Geometrie herrschenden Methoden (oder die Gesamt-Methode) Rechen-

schaft zu geben hat, muß mehr wissen, als den Unterschied von Konkret und Abstrakt, muß über die Begriffe:

- 1) aufsteigend und absteigend (induktiv und deduktiv, induzierend und deduzierend);
- 2) intuitiv und demonstrativ (unmittelbares und vermitteltes Erkennen);
- 3) progressiv und regressiv (fort- und zurückschreitend);
- 4) synthetisch und analytisch (verbindend oder kombinierend und auflösend);
- 5) heuristisch und genetisch und — dogmatisch (suchend und findend, erzeugend und — anlehrend)

orientiert sein, und, was die in dem Unterricht der „elementaren Geometrie“ anzuwendende Methode betrifft, in ihr die durch die Begriffe intuitiv, progressiv und synthetisch ausgesprochenen Thätigkeiten anzuwenden verstehen. Den einseitigen, unfreien Lehrer kennzeichnet die Gebundenheit an eine Form, den freien charakterisiert die Handhabung der verschiedenen Formen, je nach der Verschiedenheit der Ob- und Subjekte. Die schlechteste von allen Formen und Arten ist die langweilige. Die Hauptrückicht bleibt, wie bei allem Jugendunterricht, nicht die streng-wissenschaftliche, sondern die auf die Entwicklung und Bildung der Schüler gerichtete, die pädagogische — sowie pädagogischer Religions-, so pädagogischer mathematischer Unterricht. Von Vorfagen und Nachsprechen, Anlehren und Beibringen, Memorieren und Auftragen, kurz von dogmatischer Methode ist nicht im allerentferntesten die Rede. Was zu behalten ist, ergiebt sich durch den fortgesetzten und fortschreitenden Unterricht, wie durch die ins Werk gesetzten Übungen von selbst. Es kommt auf die produktive Thätigkeit des Lernenden an; wer ihn dafür gewinnt, der hat ihn. Es darf indessen auf ganz bestimmten, präzisen und korrekten mündlichen Ausdruck nirgends verzichtet werden. Durch denselben gelangt der Lehrer erst zur Überzeugung, daß die Sache dem Schüler zu hellem Bewußtsein gelangt ist.

Genug. Am Ende aller Enden fällt dem Lehrer, der andere durch Vorschriften leiten will, der Ausspruch Goethes ein:

„Worte sind zwar gut, sie sind aber nicht das Beste; das Beste wird nicht klar durch Worte.“ Dieses Beste ist in aller Unterweisung, die zur charaktervollen Bildung führen soll, der Geist des Lehrers, und in ihm, außer der tiefen Sachkenntnis und des methodischen Verfahrens, die inkarnierte Liebe zum Beruf und darum zum Lernenden. —

19. Zum Schluß noch zwei Bemerkungen.

Große Menschen, wie Pestalozzi und Goethe, schauen große Wahrheiten, Prinzipien. Darum stehe hier eine Wortschau beider.

Zuerst eine Aufforderung Pestalozzis, die selbstverständlich eine weit größere Ausdehnung verdient als Anwendung auf den vorliegenden Gegenstand:

„Mensch, achte kein menschliches Urteil für reif, das dir nicht als ein Resultat einer in allen Teilen vollendeten Anschauung des zu beurteilenden Gegenstandes in das Auge fällt; achte im Gegenteil jedes Urteil, das vor einer vollendeten Anschauung reif scheint, für eine wurmstichige Frucht!“

Dann ein damit übereinstimmender, aus Erfahrung und Selbstschau stammender Ausspruch von Goethe, diesem, was Entwicklungs- und Bildungsgang betrifft, Normalmenschen. Er sagt:

„So sollte es mir immer ergehen, daß ich durch Anschauen und Betrachten der Dinge erst mühsam zu einem Begriffe gelangen mußte, der mir vielleicht (nein, ganz gewiß) nicht so auffallend und fruchtbar gewesen wäre, wenn man ihn mir überliefert hätte. Ich lebte im Anschauen. Ich besaß darum die entwickelnde, entfaltende Methode.“ —

Die Gedanken anderer oder auch die eigenen mitzuteilen ist keine Kunst, das kann jeder, und man braucht es nicht zu lernen, es ist Wortunterricht; aber zu unmittelbar lebendigen Anschauungen anregen und dadurch selbsteigne Vorstellungen und Gedanken im Lernenden erwecken, kurz ihn zu eigener Thätigkeit anfeuern: das ist's, das ist Kunst — die Kunst des entwickelnd-erziehenden und bildenden Lehrers! —