

# Une nouvelle résolution des équations du second, du troisième et du quatrième degré.

Vom Oberlehrer Dr. Anton v. Zelewski.

## § 1.

L'équation pure du second degré soit

$$(1) \dots\dots\dots x^2 + a = 0$$

Pour résoudre cette équation, on lui donne la forme

$$(2) \dots\dots\dots (x - \sqrt{-a})(x + \sqrt{-a}) = 0$$

Cette équation est satisfaite, si un des deux facteurs s'évanouit; l'équation proposée (1) se décompose dans les deux suivantes:

$$(3) \dots\dots\dots \begin{cases} x - \sqrt{-a} = 0 \\ x + \sqrt{-a} = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations donnent les racines de l'équation proposée sous la forme suivante:

$$(4) \dots\dots\dots \begin{cases} x_1 = \sqrt{-a} = i \sqrt{a} \\ x_2 = -\sqrt{-a} = -i \sqrt{a} \end{cases}$$

De la même manière on peut résoudre l'équation:

$$(5) \dots\dots\dots x^2 - a = 0$$

dont les deux racines sont:

$$(6) \dots\dots\dots \begin{cases} x_1 = \sqrt{a} \\ x_2 = -\sqrt{a} \end{cases}$$

L'équation

$$(7) \dots\dots\dots x^2 + 1 = 0$$

a les racines:

$$(8) \dots\dots\dots \begin{cases} x_1 = \begin{cases} \sqrt{-1} \\ i \end{cases} \\ x_2 = \begin{cases} -\sqrt{-1} \\ -i \end{cases} \end{cases}$$

Les racines de l'équation

$$(9) \dots\dots\dots x^2 - 1 = 0$$

sont représentés par:

$$(10) \dots\dots\dots \begin{cases} x_1 = \begin{cases} \sqrt{1} \\ 1 \end{cases} \\ x_2 = \begin{cases} -\sqrt{1} \\ -1 \end{cases} \end{cases}$$

§ 2.

Pour résoudre l'équation complète du second degré

$$(1) \dots\dots\dots x^2 + px + q = 0$$

posons

$$(2) \dots\dots\dots x = y + zi$$

En remplaçant dans l'équation (1) x par sa valeur, tirée de (2), on aura

$$(y + zi)^2 + p(y + zi) + q = 0$$

ou

$$(3) \dots\dots \left. \begin{aligned} y^2 + 2yzi - z^2 + py + pzi + q \\ y^2 - z^2 + py + q + (2y + p)zi \end{aligned} \right\} = 0$$

Cette équation contient deux expressions, une réelle et une imaginaire, il faut que chacune des deux expressions disparaisse séparément pour que l'équation soit satisfaite; à cause de cela on aura:

$$(4) \dots\dots\dots -z^2 + y^2 + py + q = 0$$

$$(5) \dots\dots\dots zy + p = 0$$

L'équation (5) donne

$$(6) \dots\dots\dots y = -\frac{p}{2}$$

En remplaçant dans l'équation (4) y par sa valeur, tirée de l'équation (6), on aura

$$z^2 = \begin{cases} \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q \\ -\frac{p^2}{4} + q \end{cases}$$

ou

$$(7) \dots\dots\dots z = \pm \sqrt{-\frac{p^2}{4} + q}$$

Au moyen des valeurs de y et z, tirées des équations (6) et (7), on aura pour x dans l'équation (2) l'expression suivante:

$$(8) \dots\dots x = -\frac{p}{2} \pm i \sqrt{-\frac{p^2}{4} + q} \\ -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-1} \sqrt{-\frac{p^2}{4} + q} \\ -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

ce qui représente les deux racines de l'équation proposée (1).

§ 3.

Nous donnerons ici une autre méthode de résoudre une équation complète du second degré, laquelle n'est pas en usage aux écoles, quoiqu'elle nous fasse voir d'une manière nette, que l'équation complète du second degré a deux racines.

Pour résoudre l'équation

$$(1) \dots\dots\dots x^2 + px + q = 0$$

on peut lui donner la forme:

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} x^2 + \frac{2p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}^2 \\ \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \end{aligned} \right\} = 0$$

Cette équation ou l'équation (1) sera satisfaite, si un des deux facteurs s'évanouit; par conséquent il nous faut avoir:

$$x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0$$

$$x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0$$

de là suivent les deux racines de l'équation proposée sous les formes:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

## § 4.

L'équation binôme du troisième degré soit

$$(1) \quad \dots \dots \dots x^3 + a = 0$$

Pour résoudre cette équation il faut lui donner la forme suivante:

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} x^3 - (-a) \\ x^3 - \sqrt[3]{-a^3} \\ (x - \sqrt[3]{-a})(x^2 + x\sqrt[3]{-a} + \sqrt[3]{-a^2}) \end{aligned} \right\} = 0$$

Pour que le premier membre de cette équation s'évanouisse, il faut que les deux équations suivantes soient satisfaites:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} x - \sqrt[3]{-a} &= 0 \\ x^2 + \sqrt[3]{-a}x + \sqrt[3]{-a^2} &= 0 \end{aligned} \right.$$

d'où l'on voit que les racines de l'équation proposée seront:

$$(4) \quad \dots \dots \dots x_1 = \sqrt[3]{-a}$$

$$(5) \quad \dots \dots \dots x_2 = \left\{ \begin{aligned} &-\frac{\sqrt[3]{-a}}{2} + \frac{\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt[3]{-a^2} - \sqrt[3]{-a^2}}}{2} \\ &-\frac{\sqrt[3]{-a}}{2} + \frac{\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt[3]{-a^2} - 4\sqrt[3]{-a^2}}}{2} \\ &-\frac{\sqrt[3]{-a}}{2} + \frac{\sqrt{-3\sqrt[3]{-a^2}}}{2} \\ &-\frac{\sqrt[3]{-a}}{2} + \frac{\sqrt{-3\sqrt[3]{-a^2}}}{2} \\ &-\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-a} \end{aligned} \right.$$

de même:

$$(6) \dots\dots\dots x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-a}$$

Pour avoir les racines de l'équation

$$(7) \dots\dots\dots x^3 - a = 0$$

on n'a qu'à remplacer (a) au lieu de (-a) dans (4), (5) et (6).

Voici les trois racines de l'équation proposée (7):

$$(8) \dots\dots\dots \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{a} \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{a} \\ x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{a} \end{cases}$$

On obtiendra les racines de l'équation

$$(9) \dots\dots\dots x^3 + 1 = 0$$

si on remplace dans (4), (5) et (6) au lieu de (-a) la valeur (-1).

Voici les racines:

$$(10) \dots\dots\dots x_1 = \begin{cases} \sqrt[3]{-1} \\ -1 \end{cases}$$

$$(11) \dots\dots\dots x_2 = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-1} \\ \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} (-1) \\ \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \end{cases}$$

$$(12) \dots\dots\dots x_3 = \begin{cases} \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-1} \\ \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \end{cases}$$

En remplaçant dans (8) au lieu de (a) la valeur (1), on aura les racines de l'équation

$$(13) \dots\dots\dots x^3 - 1 = 0$$

sous les formes suivantes:

$$(14) \dots\dots\dots x_1 = \begin{cases} \sqrt[3]{1} \\ 1 \end{cases}$$

$$(15) \dots\dots\dots x_2 = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{1} \\ \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot 1 \\ \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \end{cases}$$

$$(16) \dots\dots\dots x_3 = \begin{cases} \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{1} \\ \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \end{cases}$$

Les deux dernières racines (15) et (16) de l'équation (13) se réunissent de qualités très-remarquables. Si  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  désignent respectivement les racines (15) et (16), on aura

$$(17) \dots \dots \varepsilon_1^2 = \begin{pmatrix} \left( \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^2 \\ \frac{1 - 2\sqrt{-3} - 3}{4} \\ \frac{-2 - 2\sqrt{-3}}{4} \\ \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \end{pmatrix} \varepsilon_2$$

$$(18) \dots \dots \varepsilon_2^2 = \begin{pmatrix} \left( \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right)^2 \\ \frac{1 + 2\sqrt{-3} - 3}{4} \\ \frac{-2 + 2\sqrt{-3}}{4} \\ \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \end{pmatrix} \varepsilon_1$$

$$(19) \dots \dots \varepsilon_1^3 = \begin{pmatrix} \left( \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^3 \\ \frac{-1 + 3\sqrt{-3} + 9 - 3\sqrt{-3}}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(20) \dots \dots \varepsilon_2^3 = \begin{pmatrix} \left( \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right)^3 \\ \frac{-1 - 3\sqrt{-3} + 9 + 3\sqrt{-3}}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

## § 5.

L'équation complète du troisième degré soit

$$(1) \dots \dots \dots x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Pour résoudre cette équation, nous posons

$$(2) \dots \dots \dots x = y + \varepsilon_1 z$$

Les quantités  $y$  et  $z$  sont deux nouvelles quantités inconnues et  $\varepsilon_1$  désigne la quantité  $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ , qui se présentait dans la résolution de l'équation binôme du troisième degré.

Après avoir remplacé dans l'équation (1) au lieu de la quantité  $x$  la valeur, tirée de l'équation (2), on aura:

$$(y + \varepsilon_1 z)^3 + a(y + \varepsilon_1 z)^2 + b(y + \varepsilon_1 z) + c = 0$$

ou:

$$(3) y^3 + 3y^2\varepsilon_1 z + 3y\varepsilon_2 z^2 + z^3 + ay^2 + 2ay\varepsilon_1 z + a\varepsilon_2 z^2 + by + b\varepsilon_1 z + c = 0$$

La quantité  $\varepsilon_2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ , qui se trouve dans cette équation, est déjà connue de l'équation (17, § 4). L'équation (3) peut être écrite:

$$y^3 - \frac{3}{2} y^2 z + \frac{3}{2} y^2 z \sqrt{-3} - \frac{3}{2} y z^2 - \frac{3}{2} y z^2 \sqrt{-3} + z^3 + a y^2 - 2 \frac{a}{2} y z + 2 \frac{a}{2} y z \sqrt{-3} - \frac{a}{2} z^2 - \frac{a}{2} z^2 \sqrt{-3} + b y - \frac{b}{2} z + \frac{b}{2} z \sqrt{-3} + c = 0$$

ou:

$$(4) \quad y^3 + a y^2 + b y + c - \frac{1}{2} (3 y^2 + 2 a y + b) z - \frac{1}{2} (3 y + a) z^2 + z^3 + [3 y^2 + 2 a y + b - (3 y + a) z] z \frac{\sqrt{-3}}{2} = 0$$

Cette équation contient deux expressions, dont l'une est réelle et l'autre imaginaire; pour que cette équation soit satisfaite, il faut que chacune des deux expressions disparaisse séparément; à cause de cela on aura:

$$(5) \quad 2 z^3 - (3 y + a) z^2 - (3 y^2 + 2 a y + b) z + 2 (y^3 + a y^2 + b y + c) = 0$$

$$(6) \quad (3 y + a) z - (3 y^2 + 2 a y + b) = 0$$

La dernière équation donne

$$(7) \quad z = \frac{3 y^2 + 2 a y + b}{3 y + a}$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation (5) au lieu de z, on aura:

$$2 \left( \frac{3 y^2 + 2 a y + b}{3 y + a} \right)^3 - (3 y + a) \left( \frac{3 y^2 + 2 a y + b}{3 y + a} \right)^2 - (3 y^2 + 2 a y + b)^2 \cdot \frac{1}{3 y + a} + 2 (y^3 + a y^2 + b y + c) = 0$$

ou:

$$2 \left( \frac{3 y^2 + 2 a y + b}{3 y + a} \right)^3 - 2 (3 y^2 + a y + b)^2 \cdot \frac{1}{3 y + a} + 2 (y^3 + a y^2 + b y + c) = 0$$

ou:

$$\left( \frac{3 y^2 + 2 a y + b}{3 y + a} \right)^3 - (3 y^2 + 2 a y + b)^2 \cdot \frac{1}{3 y + a} + y^3 + a y^2 + b y + c = 0$$

Après avoir supplée les deux premiers membres de cette équation à la troisième puissance, on aura:

$$\left( \frac{3 y^2 + 2 a y + b}{3 y + a} - \frac{3 y + a}{3} \right)^3 - 3 \left( \frac{3 y^2 + 2 a y + b}{3 y + a} \right) \left( \frac{3 y + a}{3} \right)^2 + \left( \frac{3 y + a}{3} \right)^3 + y^3 + a y^2 + b y + c = 0$$

ou:

$$\left( \frac{-a^2 + 3b}{3y + a} \right)^3 - 9 (3 y^2 + 2 a y + b) (3 y + a) + (3 y + a)^3 + 27 (y^3 + a y^2 + b y + c) = 0$$

ou:

$$\left( \frac{-a^2 + 3b}{3y + a} \right)^3 + (3 y + a)^3 - 54 y^3 - 54 a y^2 - 18 a^2 y - 9 a b + 27 c = 0$$

ou:

$$\left( \frac{-a^2 + 3b}{3y + a} \right)^3 + (3 y + a)^3 - 2 (27 y^3 + 27 y^2 a + 9 y a^2 + a^3) + 2 a^3 - 9 a b + 27 c = 0$$

ou:

$$\left( \frac{-a^2 + 3b}{3y + a} \right)^3 + (3 y + a)^3 - 2 (3 y + a)^3 + 2 a^3 - 9 a b + 27 c = 0$$

ou enfin:

$$(3 y + a)^3 - \left( \frac{-a^2 + 3b}{3y + a} \right)^3 - (2 a^3 - 9 a b + 27 c) = 0$$

Cette équation, multipliée par  $(3 y + a)^3$ , donnera:

(8) . . .  $(3y + a)^6 - (2a^3 - 9ab + 27c)(3y + a)^3 + (a^2 - 3b)^3 = 0$   
de là il suit:

$$(9) \quad (3y + a)^3 = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{2} \pm \sqrt{\frac{(2a^3 - 9ab + 27c)^2}{4} - (a^2 - 3b)^3}$$

Si l'on y fait, pour abréger,

$$(10) \quad \dots \dots \dots \begin{cases} P = a^2 - 3b \\ Q = 2a^3 - 9ab + 27c \end{cases}$$

on obtiendra les six racines de l'équation (8), lesquelles sont représentées par:

$$(11) \quad \dots \dots \dots \begin{cases} y_1 = \frac{-a + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}}}{3} \\ y_2 = \frac{-a + \varepsilon_1 \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}}}{3} \\ y_3 = \frac{-a + \varepsilon_2 \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}}}{3} \\ y_4 = \frac{-a + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}}}{3} \\ y_5 = \frac{-a + \varepsilon_1 \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}}}{3} \\ y_6 = \frac{-a + \varepsilon_2 \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}}}{3} \end{cases}$$

où  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  désignent les valeurs, exprimées par les équations (15, 16 § 4).

Si l'on pose, pour abréger,

$$(12) \quad \dots \dots \dots \begin{cases} A = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}} \\ B = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}} \end{cases}$$

les six racines dans (11) peuvent être représentées par

$$(13) \quad \dots \dots \dots \begin{cases} y_1 = \frac{-a + A}{3} \\ y_2 = \frac{-a + \varepsilon_1 A}{3} \\ y_3 = \frac{-a + \varepsilon_2 A}{3} \end{cases} \quad (13) \quad \begin{cases} y_4 = \frac{-a + B}{3} \\ y_5 = \frac{-a + \varepsilon_1 B}{3} \\ y_6 = \frac{-a + \varepsilon_2 B}{3} \end{cases}$$

Après avoir remplacé dans l'équation (7) la variable (y) par ses valeurs, tirées des équations (13), on aura les six valeurs correspondantes de la variable z exprimées par les équations suivantes:

$$z_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{3}{9}(a^2 - 2aA + A^2) + \frac{2a}{3}(-a + A) + \frac{3b}{3}}{A} \\ \frac{a^2 - 2aA + A^2 - 2a^2 + 2aA - 3b}{3A} \\ \frac{A^2 - (a^2 - 3b)}{3A} \\ \frac{A^2 - P}{3A} \end{array} \right.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par B, et en ayant égard à la relation  $AB = P$ , on aura:

$$(14) \quad \dots \quad z_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{A^2B - BP}{3AB} \\ \frac{AP - BP}{3P} \\ \frac{A - B}{3} \end{array} \right.$$

De même on obtiendra:

$$z_2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{3}{9}(-a + \varepsilon_1 A)^2 + \frac{2}{3}a(-a + \varepsilon_1 A) + \frac{3}{3}b}{\varepsilon_1 A} \\ \frac{a^2 - 2\varepsilon_1 aA + \varepsilon_1^2 A^2 - 2a^2 + 2\varepsilon_1 aA + 3b}{3\varepsilon_1 A} \\ \frac{\varepsilon_1^2 A^2 - (a^2 - 3b)}{3\varepsilon_1 A} \\ \frac{\varepsilon_1^2 A^2 - P}{3\varepsilon_1 A} \end{array} \right.$$

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par  $\varepsilon_1^2 B$ , et qu'on ait égard aux relations  $AB = P$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1^3 = 1$ , il vient

$$(15) \quad \dots \quad z_2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon_1^4 A^2 B - PB\varepsilon_1^2}{3\varepsilon_1^3 AB} \\ \frac{\varepsilon_1 PA - PB\varepsilon_2}{3P} \\ \frac{\varepsilon_1 A - \varepsilon_2 B}{3} \end{array} \right.$$

$$z_3 = \left\{ \frac{\frac{3}{9}(-a + \varepsilon_2 A)^2 + \frac{2}{3}(-a + \varepsilon_2 A) + \frac{3}{3}b}{\varepsilon_2 A} \right. \\ \left. \frac{\varepsilon_2^2 A^2 - (a^2 - 3b)}{3\varepsilon_2 A} \right\}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par  $\varepsilon_2^2 B$  et en ayant égard aux relations  $\varepsilon_2^3 = 1$ ,  $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_1$ ,  $AB = P$ , on aura:

$$(16) \dots z_3 = \left\{ \frac{\varepsilon_2^4 A^2 B - PB\varepsilon_2^2}{3\varepsilon_2^3 AB} \right. \\ \left. \frac{\varepsilon_2 AP - BP\varepsilon_1}{3P} \right. \\ \left. \frac{\varepsilon_2 A - \varepsilon_1 B}{3} \right\}$$

$$(17) \dots z_4 = \left\{ \frac{\frac{3}{9}(-a + B)^2 + \frac{2a}{3}(-a + B) + \frac{3}{3}b}{B} \right. \\ \left. \frac{a^2 - 2aB + B^2 - 2a^2 + 2aB + 3b}{3B} \right. \\ \left. \frac{B^2 - P}{3B} \right. \\ \left. \frac{AB^2 - AP}{3AB} \right. \\ \left. \frac{PB - AP}{3P} \right. \\ \left. \frac{B - A}{3} \right\}$$

$$(18) \dots z_5 = \left\{ \frac{\frac{3}{9}(-a + \varepsilon_1 B)^2 + \frac{2}{3}a(-a + \varepsilon_1 B) + \frac{3}{3}b}{\varepsilon_1 B} \right. \\ \left. \frac{\varepsilon_1^2 B^2 - P}{3\varepsilon_1 B} \right. \\ \left. \frac{\varepsilon_1^4 AB^2 - \varepsilon_1^2 PA}{3\varepsilon_1^3 BA} \right. \\ \left. \frac{\varepsilon_1 BP - \varepsilon_2 AP}{3P} \right. \\ \left. \frac{\varepsilon_1 B - \varepsilon_2 A}{3} \right\}$$

$$(19) \quad \dots z_6 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{9} (-a + \varepsilon_2 B)^2 + \frac{2}{3} a (-a + \varepsilon_2 B) + \frac{3}{3} b \\ \frac{\varepsilon_2 B}{\varepsilon_2^2 B^2 - P} \\ \frac{3 \varepsilon_2 B}{\varepsilon_2^4 AB^2 - \varepsilon_2^2 AP} \\ \frac{3 \varepsilon_2^3 BA}{\varepsilon_2 B - \varepsilon_1 A} \\ \frac{3}{3} \end{array} \right.$$

Après avoir remplacé dans l'équation (2) au lieu des quantités inconnues  $y$  et  $z$  leurs valeurs correspondantes, tirées des équations (13, 14, 15, 16, 17, 18, 19), on aura les racines de l'équation (4) et par conséquence de l'équation (1). Voilà les racines:

$$x_1 = \left\{ \begin{array}{l} y_1 + \varepsilon_1 z_1 \\ \frac{-a + A}{3} + \varepsilon_1 \left( \frac{A - B}{3} \right) \\ \frac{-a + A + \varepsilon_1 A - \varepsilon_1 B}{3} \\ \frac{-a + A - \frac{A}{2} + \frac{A \sqrt{-3}}{2} - \varepsilon_1 B}{3} \\ \frac{-a + \frac{2A - A + A \sqrt{-3}}{2} - \varepsilon_1 B}{3} \\ \frac{-a - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} A - \varepsilon_1 B}{3} \\ \frac{-a - \varepsilon_2 A - \varepsilon_1 B}{3} \\ \frac{-a + \varepsilon_2 A + \varepsilon_1 B}{3} \end{array} \right.$$

$$x_2 = \left\{ \begin{array}{l} y_2 + \varepsilon_1 z_2 \\ \frac{-a + \varepsilon_1 A + \varepsilon_1 (\varepsilon_1 A - \varepsilon_2 B)}{3} \\ \frac{-a + \varepsilon_1 A + \varepsilon_1^2 A - \varepsilon_1 \varepsilon_2 B}{3} \\ \frac{-a + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) A - \varepsilon_1^3 B}{3} \\ \frac{-a - A - B}{3} \\ \frac{-a + A + B}{3} \end{array} \right.$$

$$x_3 = \left\{ \begin{array}{l} y_3 + \varepsilon_1 z_3 \\ - \frac{a + \varepsilon_2 A + \varepsilon_1 (\varepsilon_2 A - \varepsilon_1 B)}{3} \\ - \frac{a + \varepsilon_2 A + \varepsilon_1^3 A - \varepsilon_2 B}{3} \\ - \frac{a + \varepsilon_2 A + A - \varepsilon_2 B}{3} \\ - \frac{a + A \left( \frac{-1 - \sqrt{-3} + 2}{2} \right) - \varepsilon_2 B}{3} \\ - \frac{a - \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} A - \varepsilon_2 B}{3} \\ - \frac{a + \varepsilon_1 A + \varepsilon_2 B}{3} \end{array} \right.$$

$$x_4 = \left\{ \begin{array}{l} y_4 + \varepsilon_1 z_4 \\ - \frac{a + B + \varepsilon_1 (B - A)}{3} \\ - \frac{a + B (1 + \varepsilon_1) - \varepsilon_1 A}{3} \\ - \frac{a - B \left( \frac{-2 + 1 - \sqrt{-3}}{2} \right) - \varepsilon_1 A}{3} \\ - \frac{a + \varepsilon_1 A + \varepsilon_2 B}{3} \end{array} \right.$$

$$x_5 = \left\{ \begin{array}{l} y_5 + \varepsilon_1 z_5 \\ - \frac{a + \varepsilon_1 B + \varepsilon_1 (\varepsilon_1 B - \varepsilon_2 A)}{3} \\ - \frac{a + B (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 A}{3} \\ - \frac{a - B - A}{3} \\ - \frac{a + A + B}{3} \end{array} \right.$$

$$x_6 = \left\{ \begin{array}{l} y_6 + \varepsilon_1 z_6 \\ - \frac{a + \varepsilon_2 B + \varepsilon_1 (\varepsilon_2 B - \varepsilon_1 A)}{3} \\ - \frac{a + B (\varepsilon_2 + 1) - \varepsilon_2 A}{3} \\ - \frac{a - B \left( \frac{-2 + 1 + \sqrt{-3}}{2} \right) - \varepsilon_2 A}{3} \\ - \frac{a + \varepsilon_2 A + \varepsilon_1 B}{3} \end{array} \right.$$

Puisque les six dernières équations nous ont fait voir les identités suivantes:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_6 \\x_2 &= x_5 \\x_3 &= x_4\end{aligned}$$

L'équation (1) n'a pas six racines, mais les trois suivantes:

$$(20) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned}x_1 &= -\frac{a + A + B}{3} \\x_2 &= -\frac{a + \varepsilon_1 A + \varepsilon_2 B}{3} \\x_3 &= -\frac{a + \varepsilon_2 A + \varepsilon_1 B}{3}\end{aligned}\right.$$

ou:

$$(21) \quad \dots \left\{ \begin{aligned}x_1 &= -\frac{a + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}}}{3} \\x_2 &= -\frac{a + \varepsilon_1 \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}} + \varepsilon_2 \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}}}{3} \\x_3 &= -\frac{a + \varepsilon_2 \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}} + \varepsilon_1 \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}}}{3}\end{aligned}\right.$$

où on a:

$$(22) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned}A &= \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}} \\B &= \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}}\end{aligned}\right.$$

$$(23) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned}P &= a^2 - 3b \\Q &= 2a^3 - 9ab + 27c\end{aligned}\right.$$

### Le cas irréductible.

Notre résolution de l'équation du troisième degré ne peut servir à la résolution numérique que si une seule racine est réelle, c'est-à-dire, si on a  $\frac{Q^2}{4} > P^3$ . Mais dans le cas irréductible, où on a  $\frac{Q^2}{4} < P^3$ , l'équation se résout très-simplement, en faisant usage des lignes trigonométriques.

En effet, si l'on pose:

$$(24) \quad \dots \dots \dots \rho \cos \varphi = \frac{Q}{2}$$

$$(25) \quad \dots \dots \dots i \rho \sin \varphi = \begin{cases} \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3} \\ \sqrt{(-1) \left(P^3 - \frac{Q^2}{4}\right)} \\ \sqrt{-1} \sqrt{P^3 - \frac{Q^2}{4}} \\ i \sqrt{P^3 - \frac{Q^2}{4}} \end{cases}$$

on peut déterminer la quantité  $\rho$  et l'angle  $\varphi$ . En élevant les équations (24, 25) au carré, on aura

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2 \varphi &= \frac{Q^2}{4} \\ i^2 \rho^2 \sin^2 \varphi &= i^2 \left(P^3 - \frac{Q^2}{4}\right) \text{ ou} \\ \rho^2 \sin^2 \varphi &= P^3 - \frac{Q^2}{4} \end{aligned}$$

Après avoir ajouté ces équations, on trouve

$$(26) \quad \dots \dots \dots \rho^2 = P^3 \text{ ou} \\ \dots \dots \dots \rho = \sqrt{P^3}$$

En remplaçant dans l'équation (24) la quantité  $\rho$  par la valeur tirée de l'équation (26) on aura:

$$(27) \quad \dots \dots \dots \cos \varphi = \frac{Q}{2 \sqrt{P^3}}$$

Au moyen des équations (24, 25, 26) la racine  $x_1$  dans (21) devient:

$$(28) \quad \dots \quad x_1 = \begin{cases} - \frac{a + \sqrt[3]{\rho \cos \varphi} + i \rho \sin \varphi + \sqrt[3]{\rho \cos \varphi} - i \rho \sin \varphi}{3} \\ - \frac{a + \sqrt[3]{\rho} \left\{ \sqrt[3]{\cos \varphi + i \sin \varphi} + \sqrt[3]{\cos \varphi - i \sin \varphi} \right\}}{3} \\ - \frac{a + \sqrt[3]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} + \cos \frac{\varphi}{3} - i \sin \frac{\varphi}{3} \right)}{3} \\ - \frac{a + 2 \sqrt[3]{\rho} \cdot \cos \frac{\varphi}{3}}{3} \\ - \frac{a + 2 \sqrt[3]{\sqrt{P^3}} \cos \frac{\varphi}{3}}{3} \\ - \frac{a + 2 \sqrt[3]{P} \cdot \cos \frac{\varphi}{3}}{3} \end{cases}$$

De même on trouve:

$$(29) x_2 = \begin{cases} -\frac{a + \varepsilon_1 \sqrt[3]{\rho} (\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3}) + \varepsilon_2 \sqrt[3]{\rho} (\cos \frac{\varphi}{3} - i \sin \frac{\varphi}{3})}{3} \\ -\frac{a - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\rho} \{ \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} + \cos \frac{\varphi}{3} - i \sin \frac{\varphi}{3} \} + \frac{1}{2} \sqrt{-3} \sqrt[3]{\rho} \{ \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} - \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \}}{3} \\ -\frac{a - \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\varphi}{3} + i \sqrt{-3} \sqrt[3]{\rho} \sin \frac{\varphi}{3}}{3} \\ -\frac{a - \sqrt[3]{\rho} (\cos \frac{\varphi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3})}{3} \end{cases}$$

$$(30) x_3 = \begin{cases} -\frac{a + \varepsilon_2 \sqrt[3]{\rho} (\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3}) + \varepsilon_1 \sqrt[3]{\rho} (\cos \frac{\varphi}{3} - i \sin \frac{\varphi}{3})}{3} \\ -\frac{a - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\rho} (\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} + \cos \frac{\varphi}{3} - i \sin \frac{\varphi}{3}) - \frac{1}{2} \sqrt{-3} \sqrt[3]{\rho} (\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} - \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3})}{3} \\ -\frac{a - \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\varphi}{3} - i \sqrt{-3} \sqrt[3]{\rho} \sin \frac{\varphi}{3}}{3} \\ -\frac{a - \sqrt[3]{\rho} (\cos \frac{\varphi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3})}{3} \\ -\frac{a - \sqrt[3]{\rho} (\cos \frac{\varphi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3})}{3} \end{cases}$$

A cause des relations:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \sin 30 \\ \sin \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} &= \cos 60 \left\{ \begin{array}{l} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \sin 60 \\ \sin \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} &= \cos 30 \left\{ \begin{array}{l} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \\ \cos \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

nous pouvons donner une autre forme aux racines dans (29, 30):

$$x_2 = \begin{cases} -\frac{a - 2 \sqrt[3]{\rho} (\cos \frac{\varphi}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3})}{3} \\ -\frac{a - 2 \sqrt[3]{\rho} (\cos \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\varphi}{3} \sin \frac{\pi}{3})}{3} \\ -\frac{a - 2 \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\pi - \varphi}{3}}{3} \\ -\frac{a + 2 \sqrt[3]{\rho} \cos (\pi - \frac{\pi - \varphi}{3})}{3} \\ -\frac{a + 2 \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{2\pi + \varphi}{3}}{3} \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} -\frac{a - 2 \sqrt{P} (\cos \frac{\varphi}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3})}{3} \\ -\frac{a - 2 \sqrt{P} (\cos \varphi \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\varphi}{3} \sin \frac{\pi}{3})}{3} \\ -\frac{a - 2 \sqrt{P} \cos \frac{\pi + \varphi}{3}}{3} \\ -\frac{a + 2 \sqrt{P} \cos (\pi + \frac{\pi + \varphi}{3})}{3} \\ -\frac{a + 2 \sqrt{P} \cos \frac{4\pi + \varphi}{3}}{3} \end{cases}$$

Voilà les formules pour le cas irréductible:

$$(31) \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{Q}{2 \sqrt{P^3}}, \quad x_1 = -\frac{a + 2 \sqrt{P} \cdot \cos \frac{\varphi}{3}}{3}, \\ x_2 = -\frac{a + 2 \sqrt{P} \cos \frac{2\pi + \varphi}{3}}{3}, \quad x_3 = -\frac{a + 2 \sqrt{P} \cos \frac{4\pi + \varphi}{3}}{3} \end{cases}$$

§ 6.

Exemples:

$$(1) \quad \dots \quad x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

$$Q = \begin{cases} -2 \cdot 9^3 + 9 \cdot 9 \cdot 26 - 27 \cdot 24 \\ 9^2 (-18 + 26) - 27 \cdot 24 \\ 9^2 \cdot 8 - 27 \cdot 24 \\ 27 \cdot 24 - 27 \cdot 24 \\ 0 \end{cases}$$

$$P = \begin{cases} 9^2 - 3 \cdot 26 \\ 3 (27 - 26) \\ 3 \end{cases}$$

$$P = 3^3$$

$$x_1 = \begin{cases} -\frac{-9 + \sqrt[3]{-3^3} + \sqrt[3]{-3^3}}{3} \\ -\frac{-9 + \sqrt{-3} - \sqrt{-3}}{3} \\ 3 \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} -\frac{-9 + \varepsilon_1 \sqrt{-3} - \varepsilon_2 \sqrt{-3}}{3} \\ -\frac{-9 + \frac{1}{2} \sqrt{-3} \sqrt{-3} + \frac{1}{2} \sqrt{-3} \sqrt{-3}}{3} \\ -\frac{-9 + \sqrt{-3}^2}{3} \\ -\frac{-9 - 3}{3} \end{cases}$$

4

$$x_3 = \begin{cases} -\frac{-9 + \varepsilon_2 \sqrt{-3} - \varepsilon_1 \sqrt{-3}}{3} \\ -\frac{-9 - \frac{1}{2} \sqrt{-3} \sqrt{-3} - \frac{1}{2} \sqrt{-3} \sqrt{-3}}{3} \\ -\frac{-9 - \sqrt{-3}^2}{3} \\ -\frac{-9 + 3}{3} \end{cases}$$

2

(2) . . . . .  $x^3 - 3x - 2 = 0$

$$Q = \begin{cases} -27 \cdot 2, \frac{Q}{2} = -3^3, \frac{Q^2}{4} = 3^6, P = 9, P^3 = 3^6 \\ -2 \cdot 3^3 \end{cases}$$

$$\frac{Q^2}{4} - P^3 = \begin{cases} 3^6 - 3^6 \\ 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \begin{cases} -\frac{\sqrt[3]{-3^3} + \sqrt[3]{-3^3}}{3} \\ -\frac{-3 - 3}{3} \end{cases}$$

2

$$x_2 = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2}{3} \\ -\frac{3}{3} \\ -1 \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon_2 - 3\varepsilon_1}{3} \\ -1 \end{cases}$$

$$(3) \dots\dots\dots x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$$

$$Q = -2 \cdot 8^3 + 9 \cdot 8 \cdot 5 + 27 \cdot 14$$

$$\frac{Q}{2} = \begin{cases} -8^3 + 9 \cdot 4 \cdot 5 + 27 \cdot 7 \\ -11 \cdot 13 \\ -143 \end{cases}$$

$$\frac{Q^2}{4} = \begin{cases} 11^2 \cdot 13^2, P = \begin{cases} 8^2 - 3 \cdot 5, P^3 = 7^6 \\ 20449 \\ 49 \\ 7^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{Q^2}{4} - P^3 = \begin{cases} 11^2 \cdot 13^2 - 7^6 \\ (11 \cdot 13 + 7^3) (11 \cdot 13 - 7^3) \\ (143 + 343) (143 - 343) \\ -486 \cdot 200 \\ -97200 \end{cases}$$

$$\cos \varphi = \begin{cases} \frac{Q}{2 \sqrt{P^3}}, \cos (180^\circ - \varphi^0) = \frac{143}{343} \\ -\frac{143}{\sqrt{7^6}} \\ -\frac{143}{7^3} \\ -\frac{143}{343} \end{cases}$$

$$\log \cos (180^\circ - \varphi^0) = \begin{cases} \log 143 - \log 343 \\ 2,15534 - 2,53529 \\ 9,62005 - 10 \end{cases}$$

$$180^\circ - \varphi^0 = 65^\circ 21' 35,555'' \dots$$

$$\varphi = 114^\circ 38' 24,444'' \dots$$

$$\frac{\varphi}{3} = 38^\circ 12' 48,146146'' \dots$$

$$\frac{2\pi + \varphi}{3} = 158^\circ 12' 48,146146'' \dots$$

$$\frac{4\pi + \varphi}{3} = 278^\circ 12' 48,146146'' \dots$$

$$x_1 = \begin{cases} -\frac{a + 2 \sqrt{P} \cos \frac{\varphi}{3}}{3} \\ -\frac{8 + 2 \cdot 7 \cos (38^\circ 12' 48,146146'' \dots)}{3} \end{cases}$$

$$\log \cos 38^\circ 12' 48,146146'' \dots = 0,89526 - 1$$

$$\cos 38^\circ 12' 48,146146'' \dots = 0,7857$$

$$x_1 = -\frac{8 + 14 \cdot 0,7857}{3}$$

$$\log 14 \cdot 0,7857 = \begin{cases} \log 14 + \log 0,7857 \\ 1,14613 + 0,89526 - 1 \\ 1,04139 \end{cases}$$

$$14 \cdot 07857 = 11$$

$$x_1 = \begin{cases} -\frac{-8+11}{3} \\ -1 \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} -\frac{-8+2\sqrt{p} \cos \frac{2\pi+q}{2}}{3} \\ -\frac{-8+14 \cdot \cos 158^\circ 12' 48,146146'' \dots}{3} \\ -\frac{-8-14 \cdot \cos 21^\circ 47' 11,853853'' \dots}{3} \\ \frac{8+14 \cos 21^\circ 47' 11,853853'' \dots}{3} \end{cases}$$

$$\log 14 \cdot \cos 21^\circ 47' 11,853853'' \dots = \begin{cases} \log 14 + \log \cos 21^\circ 47' 11,853853'' \dots \\ 1,14613 + 9,96774 - 10 \\ 1,11387 \end{cases}$$

$$14 \cdot \cos 21^\circ 47' 11,853853'' \dots = 13$$

$$x_2 = \begin{cases} \frac{8+13}{3} \\ +7 \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} -\frac{-8+14 \cos 278^\circ 12' 48,146146'' \dots}{3} \\ -\frac{-8+14 \cdot \cos 81^\circ 47' 11,853853'' \dots}{3} \end{cases}$$

$$\log 14 \cdot \cos 81^\circ 47' 11,853853'' \dots = \begin{cases} \log 14 + \log \cos 81^\circ 47' 11,853853'' \dots \\ 1,14613 + 9,15491 - 10 \\ 0,30104 \end{cases}$$

$$14 \cdot \cos 81^\circ 47' 11,853853'' \dots = 2$$

$$x_3 = \begin{cases} -\frac{-8+2}{3} \\ +2 \end{cases}$$

#### Les équations du quatrième degré.

##### § 7.

Les racines de l'unité jouent une rôle importante dans la résolution des équations du quatrième degré, dont nous allons nous occuper, il faut donc rappeler ici les propriétés de ces racines.

Si l'équation

$$(1) \dots\dots\dots x^4 - 1 = 0$$

est donnée, on lui peut donner la forme suivante:

$$x^4 - 1^4 = 0$$

ou:

$$(x^2 - 1^2)(x^2 + 1^2) = 0$$

ou:

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

de là il vient

$$(2) \dots\dots\dots \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Les racines des équations (2) et par conséquence de l'équation (1) sont:

$$(3) \dots\dots\dots \begin{cases} x_1 = \sqrt[4]{1} \\ \quad \quad \quad 1 \\ x_2 = \sqrt[4]{-1} \\ \quad \quad \quad -1 \\ x_3 = \sqrt[4]{-1} \\ \quad \quad \quad i \\ x_4 = \sqrt[4]{-1} \\ \quad \quad \quad -i \end{cases}$$

Soit

$$(4) \dots\dots\dots x^4 + 1 = 0$$

l'équation proposée. Pour résoudre cette équation, il lui faut donner la forme suivante:

$$x^4 - \sqrt[4]{-1}^4 = 0$$

ou:

$$(x^2 - \sqrt[4]{-1}^2)(x^2 + \sqrt[4]{-1}^2) = 0$$

ou:

$$(x^2 - \sqrt{-1})(x^2 + \sqrt{-1}) = 0$$

ou

$$(5) \dots\dots\dots (x^2 - i)(x^2 + i) = 0$$

de là il vient

$$(6) \dots\dots\dots \begin{cases} x^2 - i = 0 \\ x^2 + i = 0 \end{cases}$$

Les racines de ces équations, qui satisfont aux équations (5) et (4), sont:

$$(7) \dots\dots\dots \begin{cases} x_1 = \sqrt{-i} \\ x_2 = -\sqrt{-i} \\ x_3 = \sqrt{-i} \\ x_4 = -\sqrt{-i} \end{cases}$$

Puisque nous avons:

$$(8) \dots\dots\dots \left. \begin{matrix} \sqrt{-1} \\ \sqrt[4]{-1} \end{matrix} \right\} = \begin{cases} \sqrt{0+1\sqrt{-1}} \\ \sqrt{\frac{V_0^2+1^2+0}{2}} + \sqrt{\frac{V_0^2+1^2-0}{2}}i \\ \sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}} \\ (1+i)\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$(9) \dots\dots\dots \left. \begin{matrix} \sqrt{-1} \\ \sqrt{-\sqrt{-1}} \end{matrix} \right\} = \begin{cases} \sqrt{0-1\sqrt{-1}} \\ \sqrt{\frac{V_0^2+1^2+1}{2}} - \sqrt{\frac{V_0^2+1^2-0}{2}}i \\ \sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}} \\ (1-i)\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

alors nous pouvons donner aux racines (7) les formes suivantes:

$$(10) \dots\dots\dots \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}} \\ x_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}} \\ x_4 = -\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation:

$$(11) \dots\dots\dots x^4 + a = 0$$

nous pouvons l'écrire:

$$x^4 - \sqrt[4]{-a}^4 = 0$$

ou

$$(12) \dots\dots (x - \sqrt[4]{-a}) (x^3 + x^2 \sqrt[4]{-a} + x \sqrt[4]{-a}^2 + \sqrt[4]{-a}^3) = 0$$

Cette équation et par conséquence l'équation (11) sera satisfaite par les racines des équations:

$$(13) \dots\dots\dots x - \sqrt[4]{-a} = 0$$

$$(14) \dots\dots\dots x^3 + \sqrt[4]{-a} x^2 + \sqrt[4]{-a}^2 x + \sqrt[4]{-a}^3 = 0$$

L'équation (13) nous donne:

$$x_1 = \begin{cases} \sqrt[4]{-a} \\ \sqrt[4]{-1} \sqrt[4]{a} \end{cases}$$

Au moyen de l'équation (8) nous pouvons donner à cette racine la forme suivante:

$$(15) \dots\dots\dots x_1 = \left( \sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}} \right) \sqrt[4]{a}$$

Pour résoudre l'équation du troisième degré (14) il faut faire ces calculs:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2} &= \left\{ \frac{2 \sqrt[4]{-a^3} - 9 \sqrt[4]{-a} \sqrt[4]{-a^2} + 27 \sqrt[4]{-a^3}}{10 \sqrt[4]{-a^3}}, P = \left\{ \begin{aligned} &\sqrt[4]{-a^2} - 3 \sqrt[4]{-a^2} \\ &- 2 \sqrt[4]{-a^2} \end{aligned} \right. \\ \frac{Q^2}{4} &= 100 \sqrt[4]{-a^6} & P^3 &= - 8 \sqrt[4]{-a^6} \\ \frac{Q^2}{4} - P^3 &= \left\{ \begin{aligned} &100 \sqrt[4]{-a^6} + 8 \sqrt[4]{-a^6}, \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3} = 6 \sqrt[4]{-a^2} \sqrt{3} \\ &108 \sqrt[4]{-a^6} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

A cause de ces relations les racines de l'équation (14) seront:

$$\begin{aligned} (16) \quad x_2 &= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{\sqrt[4]{-a} + \sqrt[3]{10 \sqrt[4]{-a^3} + 6 \sqrt{3} \sqrt[4]{-a^3}} + \sqrt[3]{10 \sqrt[4]{-a^3} - 6 \sqrt{3} \sqrt[4]{-a^3}}}{3} \\ &-\frac{\sqrt[4]{-a} \left\{ 1 + \sqrt[3]{10 + 6 \sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6 \sqrt{3}} \right\}}{3} \\ &-\frac{\sqrt[4]{-a} \left\{ 1 + \sqrt[3]{(1 + \sqrt{3})^3} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{3})^3} \right\}}{3} \\ &-\frac{\sqrt[4]{-a} \left\{ 1 + 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} \right\}}{3} \\ &-\frac{3 \sqrt[4]{-a}}{3} \\ &- \sqrt{i} \sqrt[4]{a} \\ &-(\sqrt{\frac{1}{2}} + i \sqrt{\frac{1}{2}}) \sqrt[4]{a} \end{aligned} \right. \\ (17) \quad x_3 &= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{\sqrt[4]{-a} \{ 1 + \varepsilon_1 (1 + \sqrt{3}) + \varepsilon_2 (1 - \sqrt{3}) \}}{3} \\ &-\frac{\sqrt[4]{-a} \{ 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \sqrt{3} - \varepsilon_2 \sqrt{3} \}}{3} \\ &-\frac{\sqrt[4]{-a} \left\{ 1 - 1 + \frac{\sqrt{-3}}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} \sqrt{-3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} \sqrt{-3}}{2} \right\}}{3} \\ &-\frac{\sqrt[4]{-a} \cdot 3i}{3} \\ &-\frac{i \sqrt{i} \sqrt[4]{a}}{3} \\ &-i \left( \sqrt{\frac{1}{2}} - i \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \sqrt[4]{a} \\ &\left( \sqrt{\frac{1}{2}} - i \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \sqrt[4]{a} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$(18) \dots x_4 = \begin{cases} -\frac{\sqrt[4]{-a} \{1 + \varepsilon_2 (1 + \sqrt{3}) + \varepsilon_1 (1 - \sqrt{3})\}}{3} \\ i \sqrt[4]{-a} \\ i \sqrt[4]{-a} \\ -(\sqrt[4]{\frac{1}{2}} - i \sqrt[4]{\frac{1}{2}}) \sqrt[4]{a} \end{cases}$$

De même on peut trouver les racines de l'équation:

$$(19) \dots x^4 - a = 0$$

Voici les racines:

$$(20) \dots \begin{aligned} x_1 &= \sqrt[4]{a} \\ x_2 &= -\sqrt[4]{a} \\ x_3 &= i \sqrt[4]{a} \\ x_4 &= -i \sqrt[4]{a} \end{aligned}$$

Il y a une autre résolution de l'équation binôme du quatrième degré, qu'il ne vaut pas la peine de donner ici, parcequ'elle se trouve presque dans tous les traités élémentaires d'algèbre.

## § 8.

Résolution de l'équation générale du quatrième degré. L'équation générale du quatrième degré soit:

$$(1) \dots x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

Pour résoudre cette équation, nous posons

$$(2) \dots x = y + zi$$

où  $y, z$  sont deux nouvelles quantités inconnues et  $i = \sqrt{-1}$ . Après avoir remplacé dans l'équation (1) au lieu de la quantité  $x$  la valeur tirée de l'équation (2), on aura:

$$(y + zi)^4 + \alpha (y + zi)^3 + \beta (y + zi)^2 + \gamma (y + zi) + \delta = 0$$

ou

$$y^4 + 4y^3zi - 6y^2z^2 - 4yz^3i + z^4 + \alpha y^3 + 3\alpha y^2zi - 3\alpha yz^2 - \alpha z^3i + \beta y^2 + 2\beta yzi - \beta z^2 + \gamma y + \gamma zi + \delta = 0$$

ou:

$$(3) y^4 - 6y^2z^2 + z^4 + \alpha y^3 - 3\alpha yz^2 + \beta y^2 - \beta z^2 + \gamma y + \delta + (4y^3 - 4yz^2 + 3\alpha y^2 - \alpha z^2 + 2\beta y + \gamma) zi = 0$$

Puisque cette équation contient deux expressions, une réelle et une imaginaire, il faut que chacune des deux expressions disparaisse séparément pour que l'équation soit satisfaite; à cause de cela on aura:

$$(4) \dots y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta + z^4 - (6y^2 + 3\alpha y + \beta) z^2 = 0$$

$$(5) \dots 4y^3 + 3\alpha y^2 + 2\beta y + \gamma - (4y + \alpha) z^2 = 0$$

De la dernière équation il vient

$$(6) \dots z^2 = \frac{4y^3 + 3\alpha y^2 + 2\beta y + \gamma}{4y + \alpha}$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation (4) on aura:

$$y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta + \frac{(4y^3 + 3\alpha y^2 + 2\beta y + \gamma)^2}{(4y + \alpha)^2} - (6y^2 + 3\alpha y + \beta) \frac{4y^3 + 3\alpha y^2 + 2\beta y + \gamma}{4y + \alpha} = 0$$

ou:

$$(y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta) (4y + \alpha)^2 - (4y^3 + 3\alpha y^2 + 2\beta y + \gamma) (6y^2 + 3\alpha y + \beta) (4y + \alpha) + (4y^3 + 3\alpha y^2 + 2\beta y + \gamma)^2 = 0$$

En effectuant la multiplication, on aura:

$$\begin{aligned} & 16y^6 + 16\alpha y^5 + 16\beta y^4 + 16\gamma y^3 + 16\delta y^2 + \\ & + 8\alpha y^5 + 8\alpha^2 y^4 + 8\alpha\beta y^3 + 8\alpha\gamma y^2 + 8\alpha\delta y + \\ & + \alpha^2 y^4 + \alpha^3 y^3 + \alpha^2\beta y^2 + \alpha^2\gamma y + \alpha^2\delta - \\ & - 96y^6 - 72\alpha y^5 - 16\beta y^4 - 4\alpha\beta y^3 - \\ & - 12\alpha^2 y^4 - \\ & - 72\alpha y^5 - 54\alpha^2 y^4 - 12\alpha\beta y^3 - 3\alpha^2\beta y^2 - \\ & - 9\alpha^3 y^3 - \\ & - 48\beta y^4 - 36\alpha\beta y^3 - 8\beta^2 y^2 - 2\alpha\beta^2 y - \\ & - 6\alpha^2\beta y^2 - \\ & - 24\gamma y^3 - 81\alpha\gamma y^2 - 4\beta\gamma y - \alpha\beta\gamma - \\ & - 3\alpha^2\gamma y + \\ & + 16y^6 + 24\alpha y^5 + 9\alpha^2 y^4 + 8\gamma y^3 + 4\beta^2 y^2 + \gamma^2 + \\ & + 16\beta y^4 + 12\alpha\beta y^3 + 6\alpha\gamma y^2 + 4\beta\gamma y = 0 \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} & - 64y^6 - 96\alpha y^5 - 48\alpha^2 y^4 - 32\beta y^4 - 8\alpha^3 y^3 - 32\alpha\beta y^3 - 8\alpha^2\beta y^2 - 4\alpha\gamma y^2 - \\ & - 16\delta y^2 - 4\beta^2 y^2 - 2\alpha^2\gamma y - 2\alpha\beta^2 y + \alpha\delta y + \alpha^2\delta - \alpha\beta\gamma + \gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} & (4y^2)^3 + 3 \cdot (4y^2)^2 \cdot (2\alpha y) + 3 \cdot (4y^2) (2\alpha y)^2 + (2\alpha y)^3 + 8\beta y^2 (4y^2 + 2\alpha y) + 4\alpha\beta y (4y^2 + 2\alpha y) + \\ & + \alpha\gamma (4y^2 + 2\alpha y) + \beta^2 (4y^2 + 2\alpha y) - 4\delta (4y^2 + 2\alpha y) + \alpha\beta\gamma - \alpha^2\delta - \gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

ou:

$$(7) \quad (4y^2 + 2\alpha y)^3 + 2\beta (4y^2 + 2\alpha y)^2 + (\alpha\gamma + \beta^2 - 4\delta) (4y^2 + 2\alpha y) + \alpha\beta\gamma - \alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$$

Avant de résoudre cette équation du troisième degré, il faut faire pour abréger:

$$(8) \quad P = \begin{cases} 4\beta^2 - 3(\alpha\gamma + \beta^2 - 4\delta) \\ \beta^2 - 3(\alpha\gamma - 4\delta) \end{cases}$$

$$(9) \quad Q = \begin{cases} 2 \cdot (2\beta)^3 - 9 \cdot 2\beta (\alpha\gamma + \beta^2 - 4\delta) + 27 (\alpha\beta\gamma - \alpha^2\delta - \gamma^2) \\ 16\beta^3 - 18\beta^2 - 18\alpha\beta\gamma + 9 \cdot 8\beta\delta + 27\alpha\beta\gamma - 27 (\alpha^2\delta - \gamma^2) \\ - 2\beta^3 + 9\beta (\alpha\gamma - 4\delta) - 27 \{ (\alpha^2 - 4\beta) \delta + \gamma^2 \} \end{cases}$$

A cause de ces relations il vient de la dernière équation

$$(10) \quad 4y^2 + 2\alpha y = - \frac{2\beta + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}}}{3}$$

ou:

$$(11) y^2 + \frac{\alpha}{2} y + \frac{2\beta + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}}}{3} = 0$$

Si nous y faisons pour abréger:

$$(12) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} A = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}} \\ B = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^3}} \end{array} \right.$$

il vient de l'équation (11)

$$(13) \dots \dots \dots y_1 = \frac{-\alpha + \sqrt[3]{\frac{3\alpha^2 - 4(2\beta + A + B)}{3}}}{4}$$

$$(14) \dots \dots \dots y_2 = \frac{-\alpha - \sqrt[3]{\frac{3\alpha^2 - 4(2\beta + A + B)}{3}}}{4}$$

Posons pour abréger

$$(15) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} D = 3\alpha^2 - 8\beta \\ F = A + B \end{array} \right.$$

A cause de cela on aura

$$(16) \dots \dots \dots y_1 = \frac{-\alpha + \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}}{4}$$

$$(17) \dots \dots \dots y_2 = \frac{-\alpha - \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}}{4}$$

En remplaçant dans l'équation (6) au lieu de (y) sa valeur tirée de l'équation (16) on aura:

$$z^3 = \frac{\left(\frac{-\alpha + \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}}{4}\right)^3 + 3\alpha \left(\frac{-\alpha + \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}}{4}\right)^2 + 2\beta \frac{-\alpha + \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}}{4} + \gamma}{\sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-\alpha + \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}})^3 + 3\alpha (-\alpha + \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}})^2 + 8\beta (-\alpha + \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}) + 16\gamma}{16\sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}} \\ -\alpha^3 + 3\alpha^2 \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}} - \alpha(D-4F) + \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}^3 + 3\alpha^3 - 6\alpha^2 \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}} + \alpha(D-4F) - 8\alpha\beta + 8\beta \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}} + 16\gamma \\ \frac{16\sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}}{2(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) + (-3\alpha^2 + 8\beta) \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}} + \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}^3} \\ \frac{16\sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}}{\left(\frac{D-4F}{3}\right)^2 - (3\alpha^2 - 8\beta) \left(\frac{D-4F}{3}\right) + 2(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) \sqrt[3]{\frac{D-4F}{3}}} \\ \frac{16\left(\frac{D-4F}{3}\right)}{\left(\frac{D-4F}{3}\right) \left\{ \frac{D-4F-3D}{3} \right\} + \frac{6(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) \sqrt[3]{3(D-4F)}}{9}} \\ - \frac{16\left(\frac{D-4F}{3}\right)}{(D-4F)(D+2F) + 3(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) \sqrt[3]{3(D-4F)}} \\ \frac{24(D-4F)}{24(D-4F)} \end{array} \right.$$

En faisant pour abréger

$$(18) \dots\dots\dots G = \alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma$$

on aura:

$$(19) \dots\dots\dots z_1 = \sqrt{\frac{-(D+2F)(D-4F) + 3G\sqrt{3(D-4F)}}{24(D-4F)}}$$

$$(20) \dots\dots\dots z_2 = -\sqrt{\frac{-(D+2F)(D-4F) + 3G\sqrt{3(D-4F)}}{24(D-4F)}}$$

En remplaçant dans l'équation (6) au lieu de (y) sa valeur, tirée de l'équation (17) on aura:

$$z^2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\left(-\alpha - \sqrt{\frac{D-4F}{3}}\right)^3}{16} + 3\alpha \frac{\left(-\alpha - \sqrt{\frac{D-4F}{3}}\right)^2}{16} + 2\beta \frac{-\alpha - \sqrt{\frac{D-4F}{3}}}{4} + \gamma \\ \frac{\sqrt{\frac{D-4F}{3}}}{16} \\ \frac{\left(-\alpha - \sqrt{\frac{D-4F}{3}}\right)^3 + 3\alpha \left(-\alpha - \sqrt{\frac{D-4F}{3}}\right)^2 - 8\alpha\beta - 8\beta \sqrt{\frac{D-4F}{3}} + 16\gamma}{16 \sqrt{\frac{D-4F}{3}}} \\ \frac{-\alpha^3 - 3\alpha^2 \sqrt{\frac{D-4F}{3}} - \alpha(D-4F) - \left(\frac{D-4F}{3}\right) \sqrt{\frac{D-4F}{3}} + 3\alpha^2 + 6\alpha^2 \sqrt{\frac{D-4F}{3}} + \alpha(D-4F) - 8\alpha\beta + 16\gamma - 8\beta \sqrt{\frac{D-4F}{3}}}{16 \sqrt{\frac{D-4F}{3}}} \\ \frac{2(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) + (3\alpha^2 - 8\beta) \sqrt{\frac{D-4F}{3}} - \frac{D-4F}{3} \sqrt{\frac{D-4F}{3}}}{16 \sqrt{\frac{D-4F}{3}}} \\ \frac{2G \sqrt{\frac{D-4F}{3}} + \frac{(3D-D+4F)}{3} \left(\frac{D-4F}{3}\right)}{16 \left(\frac{D-4F}{3}\right)} \\ \frac{(D+2F)(D-4F) + 3G\sqrt{3(D-4F)}}{24(D-4F)} \end{array} \right.$$

ou

$$(21) \dots\dots\dots z_3 = \sqrt{\frac{(D+2F)(D-4F) + 3G\sqrt{3(D-4F)}}{24(D-4F)}}$$

$$(22) \dots\dots\dots z_4 = -\sqrt{\frac{(D+2F)(D-4F) + 3G\sqrt{3(D-4F)}}{24(D-4F)}}$$

En remplaçant dans l'équation (2) au lieu de (y) et (z) les valeurs correspondantes, tirées des équations (16), (17), (19), (20), (21), (22) on aura les racines de l'équation proposée (1) dans les formes suivantes:

$$(23) x_1 = \begin{cases} y_1 + z_1 i \\ -\alpha + \frac{\sqrt{\frac{D-4F}{3}}}{4} + \sqrt{\frac{(D+2F)(D-4F) - 3G\sqrt{3(D-4F)}}{24(D-4F)}} \\ -\frac{3\alpha + \sqrt{3(D-4F)}}{12} + \frac{\sqrt{6(D+2F)(D-4F)^2 - 18G(D-4F)\sqrt{3(D-4F)}}}{12(D-4F)} \\ -\frac{3\alpha(D-4F) + \sqrt{3(D-4F)}(D-4F) + \sqrt{6(D+2F)(D-4F)^2 - 18G(D-4F)\sqrt{3(D-4F)}}}{12(D-4F)} \\ -\frac{3\alpha(D-4F) + \sqrt{3(D-4F)^3} + \sqrt{6(D+2F)(D-4F)^2 - 18G\sqrt{3(D-4F)^3}}}{12(D-4F)} \end{cases}$$

$$(24) x_2 = \begin{cases} y_1 + z_2 i \\ -\frac{3\alpha(D-4F) + \sqrt{3(D-4F)^3} - \sqrt{6(D+2F)(D-4F)^2 - 18G\sqrt{3(D-4F)^3}}}{12(D-4F)} \end{cases}$$

$$(25) x_3 = \begin{cases} y_2 + z_3 i \\ -\frac{3\alpha(D-4F) - \sqrt{3(D-4F)^3} + \sqrt{6(D+2F)(D-4F)^2 - 18G\sqrt{3(D-4F)^3}}}{12(D-4F)} \end{cases}$$

$$(26) x_4 = \begin{cases} y_2 + z_4 i \\ -\frac{3\alpha(D-4F) - \sqrt{3(D-4F)^3} - \sqrt{6(D+2F)(D-4F)^2 - 18G\sqrt{3(D-4F)^3}}}{12(D-4F)} \end{cases}$$

$$(23) x_1 = \begin{cases} y_1 + \\ - \alpha + \\ - 3\alpha - \\ - 3\alpha (I \\ - 3\alpha ( \end{cases}$$

$$(24) x_2 = \begin{cases} y_1 + \\ - 3\alpha ( \end{cases}$$

$$(25) x_3 = \begin{cases} y_2 + \\ - 3\alpha (I \end{cases}$$

$$(26) x_4 = \begin{cases} y_2 + \\ - 3\alpha (I \end{cases}$$

© The Tiffen Company, 2007

# **TIFFEN** Gray Scale

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 K 11 12 13 14 15 B 17 18 19

R G B W G B Y C M



$G \sqrt{3} (D - 4F)$   
 $F)$   
 $4F)^2 - 18G (D - 4F) \sqrt{3} (D - 4F)$   
 $12 (D - 4F)$   
 $2F) (D - 4F)^2 - 18G (D - 4F) \sqrt{3} (D - 4F)$   
 $3)$   
 $F) (D - 4F)^2 - 18G \sqrt{3} (D - 4F)^3$   
 $3)$   
 $F) (D - 4F)^2 - 18G \sqrt{3} (D - 4F)^3$   
 $)$   
 $+ 2F) (D - 4F)^2 - 18G \sqrt{3} (D - 4F)^3$   
 $3)$   
 $2F) (D - 4F)^2 - 18G \sqrt{3} (D - 4F)^3$   
 $)$