

D a s M o n o c h o r d

o d e r

d e r E i n s a i t e r .

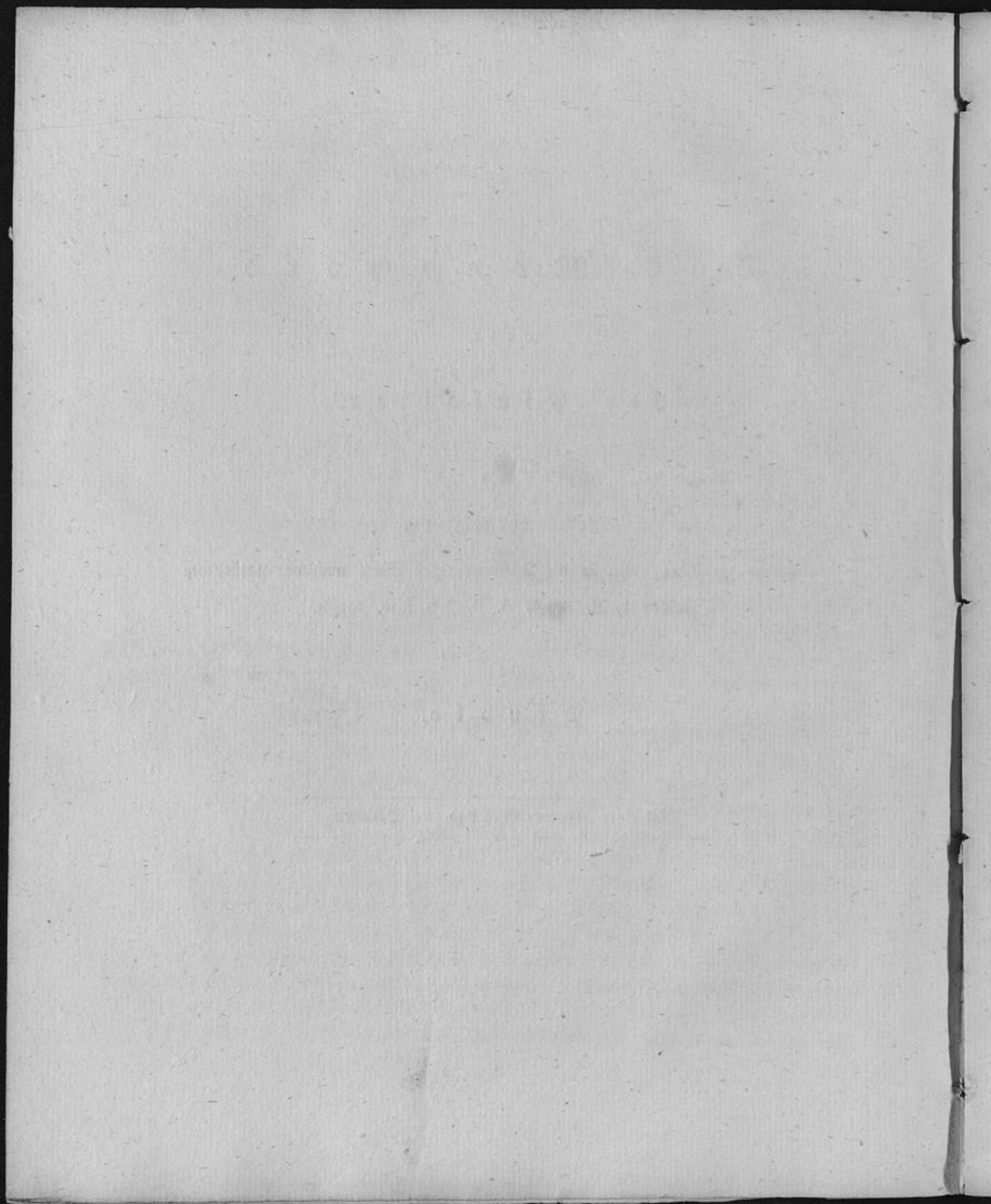
Erste Abtheilung,

enthaltend die Töne, wie sie die Theilung einer Saite nach den natürlichen
Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. s. w. angibt.

V o n

P r u d l o .

Mit einer Figuren-Tafel und zwei Beilagen.



1. Das Monochord ist für Musiker, gewisse Instrumentmacher, Physiker und auch wohl für den Mathematiker ein so wichtiges und gleichwohl in jetziger Zeit, wo durch die sich auf einander häufenden Entdeckungen und Erfindungen das tiefere Eingehen in das vorhandene Alte erschwert, wo nicht unmöglich gemacht wird, so wenig gekanntes, man möchte sagen vergessenes Instrument, daß es wohl keiner besondern Entschuldigung bedarf, wenn es hier zum Gegenstande einer besondern Abhandlung gemacht worden ist, die schon deshalb nicht überflüssig erscheinen dürfte, als es nur zu gewiß ist, daß, wenn auch über dieses Instrument bereits viel geschrieben worden ist, doch noch vieles übrig ist, was sich darüber sagen läßt und beachtet zu werden verdient. Vielleicht daß ein noch tieferes Eingehen in die Sache mit neuen Erscheinungen bekannt macht und zu unerwarteten Aufschlüssen führt!

2. Monochord ist ein zusammengesetztes griechisches Wort, bestehend aus dem Eigenschaftsworte *μόνος* (*monos*), *μόνη*, *μόνον*, einer, ein Einziger, einzig, allein, und dem Substantiv *χορδή*, der Darm, die Darmsaite, lateinisch *chorda*. Diefemnach bedeutet Monochord (*τὸ μονόχορδον*) ein musikalisches Werkzeug, das nur eine Saite hat; daher der deutsche Name „der Einsaiter“.

3. Solcher einsaitiger Instrumente weist die Musik mehrere nach. Eines, das in dieser Hinsicht selbst von Musikern gar nicht gekannt ist, ist die Aeolsharfe, die, wie ich in einer besondern Abhandlung zeigen werde, zur Hervorbringung der Töne nur Einer Saite bedarf, und, da der Wind die Ursache davon ist, den Namen Windmonochord mit vollem Rechte verdient.

Dr. Schmidt's in Greifswalde Hierochord, für Kirchen und Schulen, die Sänger im Tone zu halten, bestimmt, besteht ebenfalls aus einer einzigen gespannten Saite, welche von der Peripherie eines sich drehenden Rades (wie von einem Violinbogen) gerieben und zum Tönen angeregt wird, und auf welche sich, mittelst des Druckes der entsprechenden Tasten, Tangenten niederdrücken, welche die klingende Saite (ungefähr eben so wie die Finger des Violinisten) bald mehr, bald weniger verkürzen, und sie also bald höher, bald tiefer klingen machen.

Die Marine-Trompete, zu deutsch Meertrompete, Trompetengeige, Trumm-scheit, Tympanischiza, den Musikern unter dem verstümmelten Namen Tromtemarie

bekannt, hat im Ganzen hinsichtlich des Außern einige Aehnlichkeit mit dem Violon, und besteht aus einem langen hohlen, oben schmalen, nach unten sich erweiternden und am untern Ende offenen hölzernen Körper, auf welchem nur eine Saite aufgespannt ist, die unterwärts über der Stimme oder Seele auf einem Stege ruht, welcher auf der einen Seite nur locker auf dem Resonanzboden aufliegt, wodurch der Klang etwas schnarrend und dem Klange einer Trompete ähnlich wird. Sie wurde anfangs auf den Schiffen gebraucht (daher der Name Meertrumpete), später auch in den Nonnenklöstern eingeführt, um die Trompetenstimme darauf vorzutragen. Die Saite wird mit dem Violinbogen gestrichen. Der Name Marien trompet ist aus Mißverständnis der französischen Benennung „trompette marine“ entstanden.

Die Benta der brasilianischen Neger, deren sie sich bei ihren Tänzen bedienen, besteht aus einer etwa 3 Fuß langen Ruthe, welche durch eine Pflanzensafer oder Darmsaite zu einem Bogen gespannt wird. Der Spieler faßt das eine Ende der Saite mit den Zähnen und schlägt mit einem Spane gegen das andere Ende derselben, wodurch er einen Ton gleich dem einer Maultrommel (des Brumm-eisens) hervorbringt.

Der Bentua der Achantés in Afrika hat viel Aehnlichkeit mit der brasilianischen Benta, auch nur eine Saite und dieselbe Behandlung.

Die Araber besitzen ein Instrument, das aus einer Pseife und Saite besteht, und die Bewohner von Mosse, Malloua, Bornu in der Nähe des Reiches der Achantés in Afrika, nach des Bowdich's Reiseberichten, eine Art Geige, die nur mit einer aus Kuhhaaren verfertigten Saite bezogen ist, die sie mit einem Bogen, der so ziemlich einem Geigenbogen gleicht, streichen.

4. Diese und noch einige andere Instrumente können alle Monochorde heißen; indeß versteht man unter Monochord im engeren Sinne kein Instrument, um damit, wie mit den angeführten, Musik zu machen, sondern um einzelne, der Höhe nach verschiedene Töne darauf hervorzubringen, und die Länge der Saite oder Röhre anzugeben, welche zur Erzeugung dieser Töne erforderlich ist. Wenn man nämlich eine Saite eines Instruments leer streicht oder reißt, so gibt sie einen gewissen Ton, er mag nun hoch oder niedrig sein. Soll sie einen höheren Ton geben, so muß sie entweder eine stärkere Spannung erhalten, oder, wenn dieß nicht geschehen soll, abgekürzt werden. Je kürzer man sie bei unveränderter Spannung macht, einen desto höheren Ton erhält man von ihr, wie das Auslegen der Finger bei den Geigeninstrumenten beweist, und so ist es möglich, für jeden Ton das Stück der Saite der Länge nach zu bestimmen, welches man haben muß, um jenen hervorzubringen. Dieß zu erreichen, dient das Monochord; auf welche Weise? soll später gezeigt werden.

5. Zur Erreichung dieses Zweckes braucht das Monochord nicht mehr als Eine Saite zu haben; es können ihm indeß so viele gegeben werden, als man verschiedene Töne darauf angeben will, und hiernach erhält es verschiedene Namen: Dichord (bei 2 Saiten), Trichord (bei 3), Tetrachord (bei 4), Pentachord (bei 5), Hexachord (bei 6), Heptachord (bei 7), Oktachord (bei 8) u. s. weiter. Der gebräuchlichste unter diesen ist Tetrachord (der Viersaiter), so daß Monochord und Tetrachord

dasselbe Tonwerkzeug bedeuten, während man dagegen unter den übrigen Benennungen meistens andere und zwar wirklich für Musik gebräuchliche Instrumente versteht.

6. Bei mehr als einer Saite muß die eine immer leer sein und den Grundton angeben, damit man die Töne der zutheilenden Saite damit vergleichen kann. Deshalb nennt man auch diese leere Saite die Nichtsaite, den *canon musicus*. Schon die Griechen, insbesondere die Pythagoräer, nannten sie *κρόνον μουσικός*, auch schlechthin bloß *κρόνον*.

Die Stimmung der übrigen Saiten ist verschieden und vom Experimentator allein abhängig. Lichtenberg setzt bei 4 Saiten die beiden äußersten, wodurch der Grundton und die Oktave angezeigt werde, als unveränderlich. Noch in seinem musikalischen Verikon hält die 8saitigen Monochorde für die besten, weil man darauf nicht allein eine ganze Tonleiter, sondern auch vollstimmige Akkorde mit Verdoppelung der einzelnen Töne hörbar machen könne. Der Versuch gegenwärtiger Abhandlung wird zeigen, daß, wenn ich mehr als 2 Saiten gebrauchen wollte, die Stimmung derselben in die im § 18 angegebenen Töne sein würde.

7. Andere Gesichtspunkte haben ihm andere Namen verschafft, als: Klangmesser, französisch *sonomètre* (von *sonus*, Klang, Schall und *μετρον*, Maas), Tonmesser, Tonmaas. Die letzten zwei Benennungen sind, wie schon Lichtenberg bemerkt hat, die richtigeren, oder einzig richtigen, weil nicht der Klang oder Schall, sondern der Ton damit gemessen, d. h. nicht die Stärke des Klangs, sondern dessen Höhe und Tiefe angegeben wird.

8. Die Saiten dieses Tonwerkzeuges können von Darm oder Drath, außerdem beide bloß oder übersponnen sein.

Zur Hervorbringung des Tones werden sie entweder gerissen, wie bei dem *pizzicato* der Bogeninstrumente, oder mit einem Violinbogen gestrichen. Dieses letztere fällt denen, die mit Geigeninstrumenten nicht umzugehen wissen, schwer, wenn der Ton rein erscheinen soll und auf der leeren Drathsaite genommen wird; diesen allen rathe ich den Gebrauch der übersponnenen Saiten, welche den Ton leichter angeben und keine große Geschicklichkeit der Bogenführung voraussetzen, wenn nur sonst das Gehör gut und geübt genug ist, die verschiedenen Töne gehörig von einander zu unterscheiden. In diesem letztern Falle reicht schon ein leises Anschlagen der Saite mit Bleistift, der Feder und dergleichen Sachen hin, den Ton zu erhalten, und ziehe ich dieß Mittel für niedrige Töne allen andern vor, weil dadurch die Saite keinen oder nur höchst geringen Druck erhält, mithin keinen erhöhten Ton gibt, welcher beim Gebrauche des Bogens und des Reißens der Saite mit Fingern stets zum Vorscheine kommt. Bei hohen Tönen ist wieder der Bogen und das Reißens der Saite mehr oder allein zu gebrauchen.

9. Der Körper oder das *Corpus* dieses Instruments, wenn es ganz einfach sein soll, so daß es von Jedermann gebaut werden kann, kann (und so war es ursprünglich) aus einem 2 bis 6 Fuß langen, $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll dicken Brete bestehen. Die Breite desselben richtet sich nach der Anzahl der Saiten, womit man es beziehen will, kann also 2 bis 6 Zoll und darüber betragen. Darüber werden

die Saiten gezogen, die an beiden Enden des Bretchens auf einem niedern fest angemachten Stege ruhen, und wie gewöhnlich auf der einen Seite an Knöpfen, Stiften oder Deschen angehängt, auf der andern aber an Wirbel befestigt sind, mittelst derer ihnen die nöthige Spannung gegeben werden kann.

Aus Mangel eines Bretchens läßt sich jede andere Unterlage auf gleiche Weise und jederzeit zum Monochorde einrichten, wenn nur die Saite an zwei Stellen zu befestigen geht und sich gehörig spannen läßt.

Der Ton eines so eingerichteten Monochords, das gewiß das wohlfeilste aller Instrumente ist, erscheint indeß nicht stark genug; ihn zu verstärken, muß man es auf eine Unterlage legen, wozu Holz am tauglichsten ist. Auf einem hohlen Holzstücke, z. B. auf einem hohlen, mit einer leeren Schublade versehenen Tische, auf einer hohlen Kiste, auf einem Violinkasten, tönt die Saite stärker als auf einem massiven. Die Wirkung bleibt dieselbe, wenn das Monochord, anstatt es zu legen, aufgehängt wird.

Will man die Verstärkung des Tones nicht von der Unterlage abhängig machen, so wird das Monochord selbst hohl gemacht. Dann besteht das Corpus (Fig. 1) aus einem 2 bis 6 Fuß langen, 2 Zoll und darüber hohen, 2 bis 6 Zoll und darüber breiten viereckigen Kästchen (rechtwinklichtes länglichtes Parallelepiped) von Holz, wozu sich aus bekannten Gründen Fichtenholz (*pinus picea*) am besten eignet. Die übrige Einrichtung zum Aufziehen der Saiten bleibt die vorhin angegebene. Der Boden dieses Kästchens braucht nur, wie die gegenüberstehende Decke, über welche die Saiten gehen, höchstens 2 Linien Dicke zu haben. Eines besonderen Gestelles, worauf man es legen, etwa zwei Füße, auf denen es liegen könnte, bedarf es durchaus nicht.

Die Länge des Monochords richtet sich lediglich nach der Theilung der Saite (§ 13 u. folg.). In je mehr Theile dieselbe getheilt werden soll, desto länger muß der Einsaiter sein.

10. Der größern Bequemlichkeit wegen, und wahrscheinlich denen zu Gefallen, die sich mit dem Streichen der Saiten nicht recht zu behaben wissen, hat man Monochorde nach Art der Pianofortegitarren mit einem Schallloche und einer Klaviatur von mehreren Tasten versehen, deren Tangenten aus dem Schallloche hervortreten und die Saiten berühren, wie die Hämmer eines Pianoforte.

Es gibt auch Monochorde, deren Saiten nicht durch Wirbel, sondern durch Gewichte gespannt werden. Anstatt der Wirbel ist eine Rolle angebracht, über welche die Saite geht, an deren Ende Gewichte gehängt werden. (Nr. 2 der Figur-Tafel.)

Außer den angeführten horizontalen hat man auch vertikale Monochorde mit Gewichten, die zur Erreichung gewisser Zwecke vor jenen einen entschiedenen Vorzug haben, indem sie, wie Biot richtig bemerkt, weit mehr Genauigkeit gewähren, als das horizontale, weil in letzterm die Spannung, welche das Gewicht hervorbringen soll, immer mehr oder minder durch die Reibung modificirt wird, welche die Rolle an ihrer Are erfährt; eine Reibung, die um so stärker ist, je mehr sie durch die

Wirkung des Gewichts gegen diese Axt gedrückt wird, weshalb man durch dasselbe Gewicht, an der nämlichen Saite angebracht, nicht immer die nämliche Spannung erhält. Aus diesem Grunde muß man zu Untersuchungen, welche Schärfe erfordern, das vertikale Monochord in Gebrauch ziehen.

11. Zu den Untersuchungen, denen das Monochord dient, muß man auch einen oder mehrere bewegliche Stege oder Schieber haben, die zwischen den zwei fest angemachten Stegen unter die Saiten geschoben werden können, um diese dadurch nach Belieben abzukürzen. Sie können 3, 4 oder 5 kantig, von der Form eines senkrechten 3, 4 oder 5 seitigen Prisma's, sein, und müssen gleiche Höhe mit den festen haben. (Nr. 3, 4 u. 5 der Figur-Tafel.)

12. Indem ich nun zu den Untersuchungen, welche mit dem Monochord anzustellen sind, übergehe, bemerke ich zuvor, daß ich dieselben mit einer Darstellungsweise beginne, die mir die Grundlage für spätere Untersuchungen abgeben soll, übrigens aber von der Methode der physikalischen Schriftsteller abweicht, wenn gleich beide zu gleichem Ziele führen. Ich betrete den mehr mathematisch-musikalischen als physikalischen Weg, indem ich auf die Schwingungen und Schwingungszahlen der Saite und der Töne, die ohnedieß noch von keinem Physiker ad oculos demonstrirt worden sind*), nicht Rücksicht nehme, sondern mich auf die Länge der Saite beschränke und doch dabei dieselben Zahlenwerthe gebrauche, wie die Physiker bei den Schwingungen. Zugleich mache ich nur mit Einer Saite den Anfang, die ich durchgehends auf das große C gestimmt sein lasse.

Mein Monochord hat die Länge von 3 Fuß $7\frac{1}{2}$ Zoll, Breite von $3\frac{1}{2}$ Zoll, Höhe von 1 Zoll 1 Linie; der Abstand der beiden unbeweglichen Stege rs und mn macht 3 Fuß $1\frac{1}{2}$ Zoll, alles in rheinl. oder jetzigem preuß. Duodecimalmaasse, und ist, weil jedes Monochord in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile, z. B. 20, 30 u. getheilt sein muß, in 72 gleiche Theile getheilt. Eigentlich sollte das Monochord in so viel gleiche Theile getheilt werden, als das Produkt aus der Menge der Töne, die nach einander zur Untersuchung kommen sollen, angibt. Sollten 6 Töne einer Oktave untersucht werden, so müßte man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 nach der Ordnung mit einander multipliciren, welches 720 gibt, und dann ein in so viele gleiche Theile getheiltes Monochord gebrauchen. Die Schwierigkeit, eine soweit getriebene Theilung auszuführen, und eine bestimmte Menge so kleiner Theile abzuzählen, gebietet eine Theilung in eine nicht zu große Menge gleicher Theile, und habe ich für den vorgestekten Zweck die Theilung in 72 Theile, wie man sehen wird, für hinreichend gefunden. Nr. 1 der Figur-Tafel stellt genau den vierten Theil aller Dimensionen des wirklichen Monochords vor.

*) Die vor kurzem erschienene Schrift:

„Der physikalische und musikalische Tonmesser. Erfunden und ausgeführt von Heinrich Scheibler, Seidenwaaren-Manufacturist in Grefeld. Essen 1834, in gr. 8. 80 Seiten mit 3 Steindrucktafeln.“

soll zwar nach dem, was ich darüber vor kurzem gehört und gelesen habe, diese Forderung erfüllen, ich bin jedoch außer Stande, darüber jetzt schon ein bestimmtes Urtheil abzugeben, weil ich sie erst seit kurzem besitze und die Experimente noch nicht habe nachmachen können, die durchaus nachgemacht werden müssen, wenn man das Buch selbst verstehen und richtig beurtheilen will.

13. Für den Gebrauch des Monochords gilt der aus der Erfahrung entnommene einzige und höchste Grundsatz:

Je kürzer eine Saite bei derselben Spannung und Dicke wird, desto höher wird auch der Ton, den sie gibt, und hierbei ist nichts so natürlich als die Frage, die sich dem denkenden Menschen von selbst aufdringt, was wohl für ein Ton zum Vorschein kommt, wenn man eine Saite nach den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u. in gleiche Theile theilt, und nun ein solcher Theil zum Tönen gebracht wird?

Ist sie in zwei gleiche Theile getheilt, und man stellt den beweglichen Steg auf die Mitte des Monochords so, daß seine oberste Kante ab (Fig. 4 u. 5) genau unter die Mitte der Saite, in Fig. 1 auf 36, zu liegen kommt, und schlägt dann eine der beiden Hälften leise mit einem Bleistift oder andern dergleichen Dingen an: so hört man genau die Oktave des Grundtones, d. h. desjenigen Tones, den die Saite leer gibt, also das kleine oder ungestrichene c, wenn, wie ich angenommen habe, die ganze Saite das große C gibt.

Theilt man die Saite in drei gleiche Theile, stellt den Schieber auf das Ende jedes Drittels, also auf 24 und 48: so gibt jedes angeschlagene Drittel die Quinte der Oktave, oder die Duodecime des Grundtones, also das kleine g.

Bei vier gleichen Theilen der Saite gibt jedes Viertel, wenn der Schieber auf 18, 36, 54 gestellt ist, die Doppeloktave des Grundtones, also das eingestrichene c, oder c.

14. Sollte, was häufig vorkommt, die Saite auf dem Schieber einen flirrenden, mithin nicht ganz reinen, undeutlichen Ton erzeugen: so läßt sich dem durch ein sanftes Andrücken derselben auf die oberste Kante des Schiebers abhelfen, was mit dem Finger, oder mit einem schmalen Körper, etwa einem Streifen Papier, einer Spielkarte und dergl. geschehen kann. Jedes zu starke Andrücken verändert die Spannung der Saite und macht den Ton höher.

Wenn es schwer halten sollte, die Töne, welche die einzelnen Theile der getheilten Saite geben, mit dem Grundtone der leeren ganzen Saite zu vergleichen, ohne eine solche zweite Saite daneben aufgespannt zu haben, dem ist diese durchaus anzurathen, und wird dieselbe in den Grundton gestimmt. Die Stimmung aber muß bei beiden Saiten vollkommen auf den Einklang geschehen, weil die geringste Abweichung von demselben bei der getheilten Saite im Diskant zu hohe oder zu niedrige Töne gibt, und hiernach das Ziel verfehlt wird, das man gerade mittelst des Monochords erreichen will. Desgleichen müssen beide Saiten von gleichem Stoffe und gleicher Dicke sein, weil besonders der letztere Umstand auf die Höhe des Tones von Einfluß ist.

15. Hat die Saite fünf gleiche Theile, so gibt jedes Fünftel bei untergesetztem Schieber die große Terz der Doppeloktave, also das eingestrichene e oder e. Auf dem in 72 gleiche Theile getheilten Monochord läßt sich die Theilung in 5 größere gleiche Theile ohne Brüche nicht wohl machen; diese Schwierigkeit kann man durch Wegnehmen zweier Theile umgehen, indem man nur 70 Theile nimmt, einen Schieber auf 70 setzt, die Länge der Saite von 70 an rechnet, und sie auf den

in den vorigen vier Fällen angenommenen Grundton C stimmt. Die übrigen Schieber werden dann am Ende jedes 14ten Theiles, also auf 14, 28, 42 und 56 gesetzt.

Sechs gleiche Theile geben jeder die reine Quinte der Doppeloctave, also $\bar{g}$. Die Schieber werden auf 12, 24, 36, 48 und 60 gesetzt.

Nimmt man von den 72 Theilen 2 weg, so erhält man 70, aus denen 7 größere, jeder zu 10 kleineren, entstehen. Ist wieder der Schieber auf 70 gesetzt, und die von 0 bis 70 gehende Saite auf den vorigen Grundton C gestimmt, so gibt jedes Siebentel der ganzen Saite einen Ton, der der kleinen Septime $\bar{b}$ der Doppeloctave unseres jetzigen Tonsystems am nächsten kommt, aber tiefer ist als diese.

Das Achtel der Saite bringt die 3fache Oktave des Grundtones C, also das zweigeschriebene $c = \bar{\bar{c}}$ hervor. 9 Theile geben das Achtel der Saite, die Schieber werden demnach auf 9, 18, 27, 36, 45, 54 und 63 gesetzt.

Das Neuntel der Saite gibt die Sekunde der 3fachen Oktave des Grundtones C, also $\bar{\bar{d}}$. Jedes Neuntel enthält 8 gleiche Theile, und die Schieber setzt man auf 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56 und 64.

Jeder zehnte Theil der Saite gibt die große Terz der 3fachen Oktave des Grundtones C, d. h. $\bar{\bar{e}}$. Man nehme von den 72 Theilen 2 weg, und so läßt sich der Rest von 70 Theilen leicht auf 10 größere, jeden zu 7 kleineren, bringen; die so verkürzte Saite wird wieder aufs C heruntergestimmt, was bei gutem Gehör auch nicht einmal nöthig ist, indem dasselbe immer den hohen Ton mit dem der leeren Saite zu vergleichen und nach ihm zu bestimmen im Stande sein wird.

16. Zur Hervorbringung der Theilung in 11 gleiche Theile muß man von 72 Theilen 6 Theile wegnehmen, um die Zahl 66 zu erhalten, woraus 11 größere entstehen, jeder zu 6 kleineren. Das Elfstel der Saite gibt einen Ton, der etwas höher ist, als die reine Quarte $\bar{f}$ der 3fachen Oktave vom Grundtone C, aber niedriger als $\bar{\bar{f}}$ klingt.

Jedes Zwölftel der Saite gibt die reine Quinte der 3fachen Oktave vom Grundtone C, also $\bar{g}$. Der zwölftel Theil von 72 ist 6, also darf der Schieber nur auf 6, 12, 18, 24, 30 u. s. w. gestellt werden.

Bei 13 gleichen Theilen, die man aus der Saite macht, erhält man von jedem Theile einen Ton, der etwas niedriger ist, als die große Sexte $\bar{\bar{a}}$ der 3fachen Oktave vom Grundtone C. Man nimmt 65 Theile, und dann immer 5 zusammen, da $5 \cdot 13 = 65$ ist.

Der 14te Theil der Saite gibt einen Ton, der etwas niedriger ist, als die Septime $\bar{b}$ der 3fachen Oktave vom Grundtone C, übrigens aber genau die Oktave des Tons gibt, welcher

durch das Siebentel der Saite entsteht. Von den 72 Theilen behält man nur 70, woraus 14 größere, jeder zu 5 kleineren, werden.

Der 15te Theil der Saite gibt $\overline{\text{h}}$, d. h. die große Septime der 3fachen Oktave des Grundtones C, wenn 60 Theile genommen werden.

Der 16te Theil der Saite gibt $\overline{\text{c}}$, oder die vierfache Oktave des Grundtones C. Man nehme 64 Theile, wenn man sich auf keine Halbierung einlassen will, und stimme allenfalls die Saite auf C.

Der Ton des 17ten Theiles der Saite klingt etwas weniger höher als $\overline{\text{cis}}$, oder die übermäßige vierfache Oktave des Grundtones C, wenn man 68 Theile genommen, und diese zu 4 in 17 Theile getheilt hat.

Bei 18 Theilen der Saite gibt jeder die Sekunde $\overline{\text{d}}$ der vierfachen Oktave des Grundtones C.

Der Ton des 19ten Theiles der Saite klingt etwas tiefer als die kleine Terz $\overline{\text{es}}$ der vierfachen Oktave von C. Man nimmt 57 Theile, und macht daraus 19, jeden zu dreien.

17. Der Ton des 20sten Theiles der Saite ist die große Terz $\overline{\text{e}}$ der vierfachen Oktave von C. Der Schieber wird auf 60 gesetzt, und hierauf der Ton genommen, den 3 Theile der Saite geben.

Der 21ste Theil der Saite, diese zu 63 Theilen genommen, gibt einen Ton, der ein wenig niedriger ist, als das 3gestrichene f, oder als die Quarte der vierfachen Oktave von C, übrigens genau die reine Quinte der Septime $\overline{\text{b}}$ ist, welche der 14te Theil der Saite hervorbringt.

Aus dem 22sten Theile der Saite, diese zu 66 Theilen genommen, erhält man einen Ton, der höher ist, als die reine Quarte $\overline{\text{f}}$ der vierfachen Oktave vom C, aber nicht ganz $\overline{\text{fis}}$ klingt, übrigens jedoch genau die erste Oktave des ersten Tones ist, welchen der eilfte Theil der Saite gibt.

Bei 23 gleichen Theilen der Saite, diese zu 69 Theilen genommen, klingt jeder Theil höher als $\overline{\text{fis}}$, mithin höher als der 22ste Theil der Saite.

Jeder 24ste Theil einer Saite gibt genau die reine Quinte $\overline{\text{g}}$ der vierfachen Oktave vom Grundtone C. Die ganze aus 72 Theilen bestehende Saite wird zu 3 solchen Theilen in 24 größere getheilt.

Jeder 25ste Theil einer Saite gibt genau die erhöhte Quinte $\overline{\text{gis}}$ der vierfachen Oktave vom Grundtone C. Von der Saite nimmt man 50 Theile, und theilt diese in 25 größere, jeden zu 2 kleineren.

18. Die bisher erhaltenen Töne sind also:

$\overset{1}{C}$	$\overset{2}{c}$	$\overset{3}{g}$	$\overset{4}{c}$	$\overset{5}{c}$	$\overset{6}{g}$	$\overset{7}{b}$	$\overset{8}{c}$	$\overset{9}{d}$	$\overset{10}{c}$	$\overset{11}{f}$	$\overset{12}{g}$	$\overset{13}{a}$	$\overset{14}{b}$	$\overset{15}{h}$	$\overset{16}{c}$	$\overset{17}{cis}$
						(—)				(+)		(—)	(—)			(+)
$\overset{18}{d}$	$\overset{19}{es}$	$\overset{20}{e}$	$\overset{21}{f}$	$\overset{22}{f}$	$\overset{23}{fis}$	$\overset{24}{g}$	$\overset{25}{gis}$									
(—)			(—)	(+)	(+)											

wobei die Exponenten die Menge der gleichen Theile angeben, welche aus der Saite gemacht werden müssen, um den zugehörigen Ton zu geben, die in Parenthesen stehenden Zeichen — und + dagegen angeben, ob der Ton niedriger oder höher ist, als der in unserem jetzigen Ton-systeme, und zwar habe ich das Subtraktionszeichen für den niedrigeren, das Additionszeichen für den höheren gewählt.

In Noten ausgedrückt sind es folgende:



Man ersieht hieraus, daß die nach den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. s. w. fortgehende Theilung der leeren Saite 1) mehrere Töne hervorbringt, die in der heutigen Musik keine Anwendung finden, z. B. der Ton 11, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 23; 2) aber umgekehrt viele Töne nicht gibt, die die heutige Musik gebraucht, z. B. den Ton $\bar{cis}$, $\bar{dis}$ ($\bar{es}$), $\bar{f}$, $\bar{fis}$, $\bar{gis}$ ($\bar{as}$), $\bar{a}$, $\bar{b}$, und eine Menge anderer höheren, besonders aber tieferen Töne.

19. Ist die leere Saite nicht auf C, sondern auf einen andern Ton, z. B. D, E, F etc. gestimmt, so ändert sich im Vergleiche zu dem Grundtone der leeren Saite nur die Benennung der durch Theilung kommenden Töne, nicht aber diese. Unter allen Umständen kommen, wenn man die Töne allgemein nach ihren Entfernungen vom Grundtone nennt, dieselben stets in folgender Ordnung:

Der Grundton, die Oktave desselben, die Quinte der Oktave, die Doppeloktave, die große Terz der Doppeloktave, die Quinte der Doppeloktave, die erniedrigte kleine Septime der Doppeloktave, die dreifache Oktave des Grund-

tones, die Sekunde der dreifachen Oktave, die große Terz der dreifachen Oktave u. so fort, wie sie die vorige Theilung bis 25 angibt.

Dabei darf ich nicht unerwähnt lassen, daß, je weiter die Theilung der Saite getrieben wird, die Bestimmung des zugehörigen Tones, selbst beim besten und geübtesten musikalischen Gehöre, desto schwieriger, und eine gehörige Portion Geduld erfordert werde, wenn die häufig fruchtlose Wiederholung des Experiments nicht abschrecken soll. Ich kann mir daher recht wohl denken, wie denen zu Muth sein mag, die ohne musikalische Kenntnisse und ohne musikalisches Gehör sich an dergleichen Experimente wagen!

20. Vergleicht man die Töne der verschiedenen Saitentheile der bis 25 fortgesetzten Theilung mit einander: so gelangt man zu Resultaten, die in mehrfacher Hinsicht, insbesondere für die Praxis und den mathematisch=physikalischen Theil der Musik, eben so interessant als wichtig sind, und zugleich auffordern, dem Monochord eine größere Aufmerksamkeit zu schenken, als es gegenwärtig von Seiten der Musiker und Instrumentenmacher geschieht. Für die Praxis: weil man unter andern dadurch in Stand gesetzt wird, die Griffbreite gewisser Instrumente, namentlich der Gitarren, Zithern, richtig einzutheilen, und die Finger auf die Saiten der Instrumente richtig, d. h. so zu setzen, daß die Töne gut erhalten werden; — für die Theorie: weil man dadurch die verschiedenen Töne durch Zahlen ausdrücken und somit in das Gebiet der Rechnung ziehen kann. *)

21. Das erste Ergebniß dieser Vergleichung ist, daß die Hälfte jeder Saite, oder die Theilung in zweimal so viele Theile, stets die Oktave desjenigen Tones angibt, welchen die ganze oder ungetheilte Saite angibt.

Bei 2 gleichen Theilen gibt jeder das kleine c , wenn die ungetheilte Saite C gibt; bei 4, also noch einmal so vielen Theilen, jeder das $\overline{c}$, mithin wieder die Oktave des vorhergehenden c ; bei 8, also wieder doppelt so vielen, jeder das $\overline{\overline{c}}$; bei 16, jeder das $\overline{\overline{\overline{c}}}$.

Dasselbe Resultat kommt auch bei jedem andern Tone, wenn er auch nicht von der leeren C-Saite hervorgebracht wird.

Das kleine g entsteht durch die Theilung der C-Saite in 3 gleiche Theile; bei 2mal so vielen Theilen aber, d. h. bei 6 Theilen, entsteht durch jeden $\overline{g}$, welches wieder die Oktave von g ist; das doppelte davon, oder 12 Theile, geben jeder $\overline{\overline{g}}$, also wieder die Oktave des vorigen Tones; und so bei 24 Theilen jeder den Ton $\overline{\overline{\overline{g}}}$, die Oktave von $\overline{\overline{g}}$.

Umgekehrt: weiß man die Länge des Stückes der Saite, welches die Oktave eines Tones angibt, so weiß man auch die Länge, welche den tieferen Grundton angibt, indem diese noch einmal so groß, also die Theilungszahl nur halb so groß ist, als bei der Oktave.

*) Könnte man ein Gleiches mit den Farben thun, wahrscheinlich wäre man in der Optik schon weiter.

Ist z. B. 8 die Theilungszahl des Tones $\overline{c}$ als Oktave von c , so ist es 4 für den Grundton c .
Ist 12 die Theilungszahl des Tones $\overline{g}$, so ist 6 die für $\overline{g}$ oder die tiefere Oktave.

22. Die Anwendung davon ist: 1) daß man, um auf derselben Saite eines Instruments die Oktave zu greifen, den Finger, der hier die Stelle des Schiebers vertritt, nur auf die Mitte der Saite zu setzen braucht; um die Doppeloktave zu greifen, kommt derselbe auf die Mitte der Hälfte, oder auf den Anfang des Viertels der Saite.

Anmerkung. Wenn bei den Anfängern des Spiels auf Bogeninstrumenten die Musiklehrer mehr auf die Theilung der Saite sahen, als auf das musikalische Gehör, das doch bei jenen erst gebildet werden muß: so würde die Applikatur großen Theils weit schneller erlernt werden, und deshalb kommt es, daß sie Viele, denen ein feines Gehör versagt ist, nie ganz erlernen.

2) Da 2 gleiche Theile einer Saite, jeder für sich, die Oktave geben, die leere dagegen den Grundton davon, so möchte es wohl auch dem Anfänger nicht schwer werden, zu begreifen, daß bei diesen 2 Tönen eine gewisse gegenseitige Abhängigkeit Statt habe, welche durch die Theilung der Saite bedingt werde, und daß, wie man auch immer dieselbe nennen wolle, ob Verhältniß, oder anders, es immer gestattet sei, beide Töne durch die beiden Zahlen 1 und 2 zu bezeichnen, wenn man die Theilung als das Mittel zu deren Hervorbringung zugleich zum Bezeichnungsprincip macht, so daß erwähnte Zahlen 1 und 2 zunächst die Menge der gleichen Theile angeben, in welche die Saite getheilt werden muß, um gewisse Töne, und zwar im vorliegenden Falle den Grundton und dessen Oktave zu geben, alsdann aber auch zugleich die beiden Töne selbst, welche auf solchem Wege erhalten werden, wobei die Zahl 1, wie natürlich, die ganze, ungetheilte, also leere Saite, und 2 die Theilung in 2 gleiche Theile derselben, folglich 1 auch den Grundton der leeren, und 2 die Oktave desselben, oder denjenigen Ton bezeichnet, welchen jeder der beiden durch die Halbierung der Saite hervorgegangenen Theile für sich allein gibt.

Anmerkung. Wollte man den Grundton C und dessen Oktave c durch die Theile der Saite bestimmen: so müßte, wenn 1 die ganze Saite und somit auch ihren Grundton C vorstellt, die Oktave c , streng genommen, durch $\frac{1}{2}$ bezeichnet werden, weil in der That die Hälfte der Saite die Oktave c des Grundtones C gibt. Eben so müßte man auch die Quinte g der Oktave durch $\frac{1}{3}$ bezeichnen, weil dieser Ton durch den dritten Theil der leeren Saite hervorgebracht wird (§ 13). Die Doppeloktave $\overline{c}$ des Grundtones C ließe sich dann durch $\frac{1}{4}$ ausdrücken, da der vierte Theil der Saite diesen Ton $\overline{c}$ erscheinen läßt. $\overline{c}$ wäre dann durch $\frac{1}{2}$, $\overline{g}$ durch $\frac{1}{3}$, das erniedrigte $\flat$ durch $\frac{1}{2}$, $\overline{c}$ durch $\frac{1}{3}$ u. s. w. auszudrücken.

Von dieser sonst ganz richtigen und bei den musikalischen Theoretikern allein üblichen Bezeichnungsweise, die ihren Grund in den Theilen der Saite hat, gehe ich indeß in dieser

Abhandlung ab, theils die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ u. s. w. zu vermeiden, theils um mich der Bezeichnungsweise der Physiker anzuschließen, die die Töne nach der Menge der Schwingungen der Saite (12) bezeichnen. Ich erreiche dieß, indem ich ganze Zahlen zur Bezeichnung der Töne gebrauche, welche das Monochord gibt. Diese Zahlen sind durch die Theilung der Saite von selbst gegeben. So gibt die Theilung der Saite nach der Zahl 2 die Oktave, nach der Zahl 3 die Quinte der Oktave, nach der Zahl 4 die Doppeloktave u. s. w., und deshalb bezeichne ich, wenn der Grundton C mit 1 bezeichnet wird, dessen Oktave c mit 2, die Quinte g der Oktave mit 3, die Doppeloktave c mit 4, die große Terz e der Doppeloktave mit 5 u. s. w. Die überraschenden Resultate, welche diese Bezeichnungsweise liefert, empfehlen sie noch mehr. (Vergl. § 52 u. folg.)

23. Diese und noch mehrere andere später anzuführende Zahlen, die zur Bezeichnung der Töne eingeführt worden sind, werden von den Physikern die Zahlenwerthe der Töne genannt; ein Ausdruck, der mir nicht recht gefallen will, weil er, gleich den Zahlen, einen verschiedenen Werth der Töne voraussetzt, den doch sicher Niemand zu erweisen und durch Zahlen festzustellen vermöchte, wenn es gleich wahr ist, daß das Ohr eine Verschiedenheit der Töne hinsichtlich der Höhe und Tiefe und nach dem Klanggepräge (dem timbre der Franzosen) empfindet; dagegen halte ich den Ausdruck „Tonzahl“, d. h. die Zahl, deren man sich zur Bezeichnung eines Tones bedient, für weit passender, weil er nur soviel sagt, als der angegebene Begriff umfaßt, und doch den gegebenen Erörterungen zufolge vollkommen verständlich, außerdem ähnlichen Ausdrücken, wie Verhältnißzahl, Mischungszahl, nachgebildet ist. Auch das Wort „Theilungszahl“ ist für gleichen Zweck sehr brauchbar, weil es sagt, wie viel Theile die Saite haben muß, um gewisse Töne zu geben.

24. Diese 2 Tonzahlen 1 und 2 kann man, da sie jedenfalls eine Art Verhältniß bilden und ein jedes Verhältniß in einen Bruch verwandelt werden kann, zu einem Bruche in der Art zusammenstellen, daß die Zahl 1 den Nenner, die Zahl 2 den Zähler macht, d. h. daß die den tieferen Ton vorstellende Tonzahl allemal zum Nenner, die den höheren Ton angegebende dagegen zum Zähler gemacht wird, daß also steht $= \frac{1}{2}$. Diese Art der Zusammenstellung der beiden Zahlen zu einem Bruche hat jedoch mit dem wirklichen gemeinen Bruche nicht viel mehr als die Gestalt gemein, und muß daher dessen Bedeutung hier wohl aufgefaßt werden.

Brüche der Art, wie $\frac{1}{2}$, werden von mir allemal zur Bezeichnung eines einzigen Tones, und zwar desjenigen der beiden Töne gebraucht, der durch den Zähler angegeben wird. Da nun 2 das kleine c als die Oktave von C vorstellt, und 1 den Grundton C selbst, so bedeutet demnach $\frac{1}{2}$ nichts weiter als den Ton c, welcher unter diesen zweien der höhere ist. Wählt man, wie das in gegenwärtiger Abhandlung durchgehends der Fall ist und im Verlaufe derselben

sich von selbst rechtfertigt, zur Bezeichnung der höheren Töne größere Zahlen: so werden demnach die zur Bezeichnung der höheren Töne eingeführten Brüche stets einen größeren Zähler haben als der Nenner ist, und es kann hierbei nur noch die Frage entstehen: zu was der Nenner diene, da der Bruch nur zur Bezeichnung eines einzigen Tones und zwar desjenigen Tones dienen soll, der durch den Zähler angegeben wird?

An und für sich betrachtet ist zur Bezeichnung eines Tones nur ein Zeichen nöthig, wie zur Bezeichnung einer Zahl ein Zeichen vollkommen hinreicht. Der Mensch indessen begnügt sich nicht mit der Isolirung der Dinge, sondern sucht dieselben vielmehr mit einander zu vergleichen, verbindet sie wohl gar mit einander zu einem Ganzen, um auf solchem Wege nicht selten zu neuen ganz überraschenden Resultaten zu gelangen, und wäre es manchmal auch nur, um demselben Dinge eine neue Form zu geben. Ähnliches geschieht auch bei den Tönen, die er nicht immer einzeln jeden für sich betrachtet und gebraucht, sondern häufig mehrere zu einer Gruppe verbindet, oder einer Vergleichung unter einander unterwirft. Besonders findet das letztere Statt, wobei die Ausmittelung der verschiedenen Entfernung, in welche zwei Töne von einander kommen können, die Hauptsache macht, d. h. man wünscht zu wissen, ob ein gewisser Ton, z. B. c , die Oktave, die Quinte, Quarte eines andern u. s. w. sei?

Die Entfernung eines Tones von einem andern durch Worte auszudrücken, wie überhaupt so viele Begriffe in jedem vorkommenden Falle auf dieselbe und zum Verstehen erforderliche Weise von neuem auseinander zu setzen, führt meist zu unnöthigen Weitläufigkeiten; in der Regel drückt ein dafür gewähltes Zeichen die Sache kürzer aus, wie namentlich der binomische und polynomische Lehrsatz in der Mathematik beweist, der in Buchstaben und Ziffern ausgedrückt weit leichter und kürzer zu geben und zu behalten ist, als in Worten. Deshalb wird ein passendes Zeichen, einen Ton und zugleich die Entfernung desselben von einem andern auszudrücken, nur erwünscht sein, und ein solches ist in einem Bruche zu finden, dessen Nenner den niederen zur Vergleichung angenommenen Grundton eines höheren, der Zähler hingegen diesen höheren Ton vorstellt, so daß der Zähler hierbei eben so die Hauptsache ist und den verlangten Ton vorstellt, als der Nenner in der Lehre von den Brüchen die eigentliche Zahl ist, während der Nenner denjenigen Ton bezeichnet, auf welchen man den im Zähler stehenden Ton bezogen wissen will. $\frac{2}{1}$ stellt demnach nicht 2 Töne vor, sondern nur den Ton 2, d. h. das kleine c , und die 1 gibt nur an, daß das c die Oktave von 1 oder von C sei, oder dafür angesehen werden solle.

25. Auf ähnliche Weise wird also $\overline{c}$ als Oktave von c durch Anwendung der beiden zugehörigen Theilungszahlen 4 und 2 durch $\frac{4}{2}$, $\overline{\overline{c}}$ als Oktave von $\overline{c}$ mittelst der zugehörigen Theilungszahlen 8 und 4 durch $\frac{8}{4}$, und $\overline{\overline{\overline{c}}}$ als Oktave von $\overline{\overline{c}}$ durch $\frac{16}{8}$ ausgedrückt werden, daß also 4 in dem Bruche $\frac{4}{2}$ wieder der eigentliche Ton ist, den man angeben will, und die 2 nichts weiter sagt, als daß er die Oktave des Tones ist, der durch 2 bezeichnet wird, oder daß man ihn in diesem Falle dafür ansehen soll.

26. Vergleicht man diese Brüche $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{4}$ mit einander, so haben sie als Brüche, ohne Rücksicht auf die Bedeutung, die ich ihnen in dieser Abhandlung gegeben habe, einerlei Werth, und lassen sich alle durch $\frac{2}{1}$ ausdrücken, so daß man, wenn es sich nicht um die Bezeichnung einer bestimmten Oktave irgend eines Tones handelt, die Oktave eines jeden Tones überhaupt durch $\frac{2}{1}$ ausdrücken kann, d. h. zur Erhaltung derselben muß man die Saite in noch einmal so viele Theile theilen, als der Grunton erfordert. Hat dieser einer Theilung in 4 Theile nöthig, so bedarf die Oktave desselben einer Theilung in 8 Theile, und jeder dieser 8 Theile gibt sie an, wenn man den Schieber an den Anfang jedes Achtels mit seiner obersten Kante unter die Saite setzt.

Man ersieht hieraus, daß der Bruch $\frac{2}{1}$ eine doppelte Bedeutung hat: eine weite, allgemeine, um jede Oktave zu bezeichnen, und eine enge, besondere, wornach er nur den Ton c als Oktave von C bezeichnet.

27. Der Ausdruck $\frac{2}{1}$ indeß läßt sich so umändern und einrichten, daß man jeden Ton dadurch bezeichnen und doch zugleich angeben kann, daß er die Oktave von einem andern sei.

Erinnert man sich nämlich der Tonbezeichnung durch die Buchstaben F G A H C D E F
G A H c d e f g a h $\overline{c}$ $\overline{d}$ $\overline{e}$ $\overline{f}$ $\overline{g}$ $\overline{a}$ $\overline{h}$ $\overline{\overline{c}}$ $\overline{\overline{d}}$ $\overline{\overline{e}}$ $\overline{\overline{f}}$ $\overline{\overline{g}}$ $\overline{\overline{a}}$ $\overline{\overline{h}}$ $\overline{\overline{\overline{c}}}$ $\overline{\overline{\overline{d}}}$ $\overline{\overline{\overline{e}}}$ u. s. w.,
 und daß noch heute mitunter Ziffern, anstatt der Buchstaben, zur Bezeichnung der Töne gebraucht werden: so wird Niemand in Abrede stellen können, daß man, wenn man c mit 1, d mit 2, e mit 3 u. s. w. bezeichnet, die obigen Töne auch so schreiben könnte:

IV V VI VII I II III IV V VI VII 1 2 3 4 5 6 7 $\overline{1}$ $\overline{2}$ $\overline{3}$ $\overline{4}$ $\overline{5}$ $\overline{6}$ $\overline{7}$
 $\overline{\overline{1}}$ $\overline{\overline{2}}$ $\overline{\overline{3}}$ $\overline{\overline{4}}$ $\overline{\overline{5}}$ $\overline{\overline{6}}$ $\overline{\overline{7}}$ $\overline{\overline{\overline{1}}}$ $\overline{\overline{\overline{2}}}$ $\overline{\overline{\overline{3}}}$ $\overline{\overline{\overline{4}}}$ u. s. w.;

eine Bezeichnung, die zu einfach, zu analog der vorigen und daher zu einladend ist, als daß man sie unberücksichtigt lassen sollte.

Sonach könnte man den Ton $\overline{g}$ als die Oktave von g auch so ausdrücken: $\frac{\overline{g}}{g}$, oder $\frac{\overline{5}}{5}$;

a als die Oktave von A würde man bezeichnen: $\frac{a}{A}$ oder $\frac{6}{VI}$; H mit $\frac{H}{H}$ oder $\frac{VII}{VII}$; $\overline{hs}$ mit $\frac{\overline{hs}}{hs}$

oder $\frac{\sharp 4}{\sharp 4}$; $\overline{ges}$ durch $\frac{\overline{ges}}{ges}$ oder $\frac{b14}{b14}$.

Man kann auch größerer Genauigkeit wegen, um auch die Entstehungsweise des Tones mit anzugeben, die Ton- oder Theilungszahlen beifügen, und sie nach Art der Exponenten rechts mit kleineren Ziffern anhängen. — c ließe sich demnach geben durch

$\frac{c^2}{1}$ oder $\frac{1^2}{1}$; $\overline{c}$ durch $\frac{\overline{c}^4}{c}$ oder $\frac{\overline{1}^4}{1}$; $\overline{\overline{c}}$ durch $\frac{\overline{\overline{c}}^8}{c}$ oder $\frac{\overline{\overline{1}}^8}{1}$.

28. Wenn nun gleich einerseits hieraus hervorgeht, daß es möglich sei, die einfachste Sache anscheinend schwer zu machen, den einfachsten Ausdruck schwerfällig zu geben, da $\frac{\overline{c}^8}{c^4}$ oder $\frac{\overline{1}}{1^4}$ nichts weiter als den Ton $\overline{c}$ angibt: so möchte wohl andererseits eben so wenig in Abrede zu stellen sein, daß der Ausdruck $\overline{c} = \frac{\overline{c}^8}{c^4}$ alles sage, was man im vorliegenden Falle über den Ton $\overline{c}$ zu wissen verlangen kann. $\overline{c}$ soll die Oktave von c vorstellen; dieß gibt der hinzugefügte Nenner c an. Der Ton $\overline{c}$ entsteht durch eine Theilung der Saite in 8 Theile; dieß gibt der Exponent 8 an. Daß dann die Theilungszahl 4 des Nenners nicht fehlen dürfe, wird leicht begriffen.

Die Nothwendigkeit dieser Bezeichnungsweise eines Tones, im Vergleiche zu einem andern nach der Entfernung beider von einander, erhellt aber schon daraus, daß jeder Ton nicht bloß die Oktave eines andern, sondern auch die Sekunde, Terz, Quarte, Quinte desselben u. s. w. vorstellen kann, wie $\overline{c}$ wirklich die Septime von d , die Sexte von e , die Quinte von f , die Quarte von g u. s. w. ist, und man wird auch wirklich sehen, wie sich derselbe Ton nach seinen verschiedenen Entfernungen von andern auf ähnliche und doch verschiedene Weise ausdrücken lassen werde.

Anmerkung. Die theoretischen musikalischen Schriftsteller bedienen sich, soweit mir bekannt ist, des Bruches zur Bezeichnung der Entfernung eines Tones von andern nirgends, sondern schreiben auf eine nicht ganz gefällige Art $\overline{c}$ als Oktave von c so: Oktave $\overline{c} c$. G als Quinte von C schreiben sie: Quinte $G C$. So Koch in seinem vortrefflichen musikalischen Lexicon.

29. In Folge dieser Untersuchung lassen sich jetzt alle übrigen Töne, welche aus der Theilung einer Saite in 3, 4, 5, 6, 7, 8 und noch mehr gleiche Theile entstehen, auf ähnliche Art bezeichnen.

Die Quinte der Oktave des Grundtones C , welcher aus dem Drittheil der Saite entsteht, d. h. g , wird also zunächst durch $\frac{3}{2}$ bezeichnet werden können; die Doppeloktave durch $\frac{4}{2}$, die große Terz der Doppeloktave durch $\frac{5}{2}$, die Quinte der Doppeloktave durch $\frac{6}{2}$, die zu tiefe kleine Septime der Doppeloktave durch $\frac{7}{2}$, die dreifache Oktave durch $\frac{8}{2}$, die Sekunde der dreifachen Oktave durch $\frac{9}{2}$ u. s. f., so daß der Zähler dieses Bruches gesagtermaßen stets die Theilungszahl der Saite, d. h. angibt, in wieviel gleiche Theile dieselbe getheilt werden muß, um den zugehörigen Ton zu geben, und der Nenner 1 nur sagt, daß man diesen Ton auf den Grundton, den die leere Saite gibt, bezieht. $\frac{12}{2}$ bezeichnet also die Quinte $\overline{g}$ der dreifachen Oktave vom Grundtone C , indem jeder der 12 Theile, welche aus der Saite gemacht werden, diesen Ton gibt.

In diesem Falle, wenn der Nenner 1 ist, also den Grundton C vorstellt, kann man, wie bei wirklichen Brüchen, deren Nenner bisweilen auch $= 1$ ist, den Nenner der so eben ange-

fürten Theilungszahlen $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{9}{1}$ u. s. w. auslassen, und es bleiben nur die Zähler 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. s. w. übrig, die dann auf die einfachste Art die zugehörigen Töne nach der Theilung der Saite angeben, so daß für diesen Fall 2 die Oktave, 3 die Quinte der Oktave, 4 die Doppeloktave, 5 die große Terz der Doppeloktave, 6 die Quinte der Doppeloktave, 7 die zu tiefe Septime der Doppeloktave, 8 die dreifache Oktave des Grundtones u. s. w. vorstellt.

30. Außer der Vergleichung der Oktave und aller übrigen durch die Theilung der Saite in 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und noch mehr gleiche Theile hervorgehenden Töne mit dem Grundtone der leeren Saite, lassen sich aber auch, wie schon in § 28 gesagt worden ist, alle diese Töne unter einander vergleichen und verschieden bezeichnen, je nachdem sie auf einen nahen oder entfernten Ton bezogen werden.

So gibt es Quinten unter ihnen. g ist die Quinte von c , $\bar{g}$ von $\bar{c}$, $\bar{d}$ von $\bar{g}$, $\bar{g}$ von $\bar{c}$, $\bar{h}$ von $\bar{e}$, $\bar{d}$ von $\bar{g}$, $\bar{g}$ von $\bar{c}$.

Nimmt man auf die Theile der Saite Rücksicht, welche für jeden der eben angegebenen Töne passen, und bezeichnet diese Quinten $g, \bar{g}, \bar{d}, \bar{g}, \bar{h}, \bar{d}$ und $\bar{g}$ nach § 28 durch die Theilungszahlen der Saite: so gibt $\frac{3}{2}$ die Quinte g von c , $\frac{4}{3}$ die Quinte $\bar{g}$ von $\bar{c}$, $\frac{5}{4}$ die Quinte $\bar{d}$ von $\bar{g}$, $\frac{12}{8}$ die Quinte $\bar{g}$ von $\bar{c}$, $\frac{15}{10}$ die Quinte $\bar{h}$ von $\bar{e}$, $\frac{18}{12}$ die Quinte $\bar{d}$ von $\bar{g}$, und $\frac{24}{16}$ die Quinte $\bar{g}$ von $\bar{c}$.

31. Eine Vergleichung des Zählers und Nenners dieser uneigentlichen Brüche unter einander zeigt bald, daß der Zähler stets anderthalbmal so groß ist als der Nenner, d. h. man muß den Nenner ganz und noch halb nehmen, um den Zähler zu erhalten, oder man muß zur Erhaltung einer Quinte zuerst so viele und noch halb so viele gleiche Theile aus der Saite machen, als der niedrigere Ton Theile der Saite erfordert.

g ist die Quinte von c ; um c zu geben, muß die Saite in 2 gleiche, um g zu geben dagegen dieselbe Saite in 3 gleiche Theile getheilt werden, vorausgesetzt, daß sie leer den Ton C gibt. Um ferner die Quinte $\bar{g}$ von $\bar{c}$ zu bekommen, muß man aus der Saite so viele und noch halb so viele gleiche Theile machen, als deren der tiefere Ton $\bar{c}$ erfordert, also 4 und 2, oder zusammen 6 gleiche Theile, wobei ich von neuem aufmerksam darauf mache, daß diese 2 Zahlen, die hier den Zähler und Nenner machen (§ 24), durchaus keinen wirklichen Bruch vorstellen, auch Verschiedenes bezeichnen, da die Theile, welche durch die im Zähler stehende Zahl angegeben werden, jedesmal kleiner sind, als die des Nenners.

Unter solchen Umständen wird es denn erlaubt sein, die Quinte überhaupt, ohne Rücksicht auf die Höhe, in der sie sich befindet, durch $\frac{3}{2}$, als den einfachsten der Brüche, oder, wenn man beide Glieder mit 2 verkleinert, durch $\frac{1\frac{1}{2}}{1}$ auszudrücken.

32. Will man jedoch genau angeben, welcher Ton die Quinte ist, so darf nur die Bezeichnungsweise der Oktave (§ 24) auf den vorliegenden Fall ausgedehnt werden, wobei ich immer noch $\bar{c}$ als den Ton der ganzen leeren Saite voraussetze.

$\bar{g}$ als die Quinte von $\bar{c}$ läßt sich also ausdrücken durch $\frac{\bar{g}^3}{\bar{c}^2}$ oder durch $\frac{5^3}{2^1}$, $\bar{g}$ als die Quinte von $\bar{c}$ durch $\frac{\bar{g}^6}{\bar{c}^4}$ oder durch $\frac{5^6}{4^1}$, $\bar{d}$ als Quinte von $\bar{g}$ durch $\frac{\bar{d}^9}{\bar{g}^6}$ oder durch $\frac{2^9}{5^6}$, $\bar{g}$ als Quinte von $\bar{c}$ durch $\frac{\bar{g}^{12}}{\bar{c}^8}$ oder durch $\frac{5^{12}}{3^8}$, $\bar{h}$ als Quinte von $\bar{e}$ durch $\frac{\bar{h}^{15}}{\bar{e}^{10}}$ oder durch $\frac{7^{15}}{3^{10}}$ u. s. w.

Man wird selbst die Quinten auf ähnliche Weise bezeichnen können, welche die bisherige Theilung der Saite nicht gibt, z. B. $\bar{a}$ als Quinte von $\bar{d}$ durch $\frac{\bar{a}^6}{\bar{d}^4}$ oder $\frac{6}{2}$, $\bar{g}is$ als Quinte von $\bar{cis}$ durch $\frac{\bar{gis}^5}{\bar{cis}^4}$ oder $\frac{5}{4}$, $\bar{c}$ als Quinte von $\bar{f}$ durch $\frac{\bar{c}^3}{\bar{f}^2}$ oder $\frac{3}{2}$, $\bar{fis}$ als Quinte von $\bar{h}$ durch $\frac{\bar{fis}^4}{\bar{h}^3}$ oder $\frac{4}{3}$ u. s. w. Die Theilungszahlen konnten noch nicht hinzugefügt werden, weil die bisherige Untersuchung dergleichen für diese und viele andere Fälle noch nicht geliefert hat.

33. Unter den durch Theilung der Saite erhaltenen Tönen hat es auch Quartan. So ist $\bar{c}$ die Quarte von $\bar{g}$, $\bar{c}$ die von $\bar{g}$, $\bar{g}$ von $\bar{d}$, $\bar{e}$ von $\bar{g}$, $\bar{e}$ von $\bar{h}$, $\bar{g}$ von $\bar{d}$, und man kann nun, ganz analog der vorhergehenden Bezeichnungsweise (§ 24), diese Quartan auch so ausdrücken: $\bar{c}$ als die Quarte von $\bar{g}$ durch $\frac{\bar{c}^4}{\bar{g}^3}$, $\bar{c}$ durch $\frac{4}{3}$, $\bar{g}$ durch $\frac{12}{9}$, $\bar{c}$ durch $\frac{16}{12}$, $\bar{e}$ durch $\frac{20}{15}$, $\bar{g}$ durch $\frac{24}{18}$, so daß der Zähler den verlangten, in Rede stehenden Ton allein angibt, der Nenner nur sagt, welche Entfernung der im Zähler stehende Ton von dem im Nenner angegebenen hat, daß also hier der Zähler stets die Quarte von dem Tone des Nenners ist.

Auch sind die Töne, die durch diese Brüche vorgestellt werden, von einander verschieden. So ist $\frac{12}{9}$ ein anderer Ton als $\frac{4}{3}$, wenn gleich beide, mit dem tieferen Tone des Nenners verglichen, Quartan desselben sind; denn $\frac{4}{3}$ gibt den Ton $\bar{c}$, $\frac{12}{9}$ dagegen $\bar{g}$, jener ist die Quarte von $\bar{g}$, dieser dagegen von $\bar{d}$, jener entsteht durch die Theilung der leeren Saite in 4, $\bar{g}$ hingegen in 12 gleiche Theile; auch sind die Theile im Zähler, weil deren immer mehrere sind, kleiner als die im Nenner.

34. Stellt man diese zur Bezeichnung der Quartan dienenden Brüche zusammen: $\frac{4}{3}$, $\frac{12}{9}$, $\frac{16}{12}$, $\frac{20}{15}$, $\frac{24}{18}$, und vergleicht sie mit einander: so zeigt sich sogleich, daß sie, als bloße Brüche betrachtet,

alle einerlei Werth haben, indem der Nenner in dem darüber stehenden Zähler $1\frac{1}{2}$ mal enthalten ist, also der Zähler jedes dieser Brüche um $\frac{1}{2}$ mal größer ist, als der zugehörige Nenner, d. h. der Zähler ist nicht bloß so groß als der Nenner, sondern man muß den Nenner ganz und noch den dritten Theil davon dazunehmen, ehe der Zähler herauskommt; oder: man muß zur Erhaltung der Quarte eines niedrigeren Tones aus der Saite ein Drittel mehr Theile machen, als der niedrigere für sich erfordert. Indem sich also alle diese Brüche durch Aufheben auf $\frac{4}{3}$ als den in kleinsten Zahlen ausgedrückten bringen lassen, so wird sich denn eine Quarte überhaupt, ohne Unterschied, ob sie im Bass oder Diskant ist, durch $\frac{4}{3}$, oder mit 3 aufgehoben, durch $\frac{1\frac{1}{3}}{1}$ ausdrücken lassen, und nur dann, wenn eine bestimmte Quarte bezeichnet werden soll, wird man die ursprünglichen Ausdrücke, wie überhaupt diejenige, nach den früheren analog gebildete Bezeichnungsweise gebrauchen, die den verlangten Ton bestimmt angibt.

So wird $\overline{\overline{g}}$ als Quarte von $\overline{\overline{d}}$ durch $\frac{\overline{\overline{g}}}{\overline{\overline{d}}}$ und mit Hinzufügung der Theilungszahlen musikalisch und mathematisch genau durch $\frac{\overline{\overline{g}}^{12}}{\overline{\overline{d}}^9}$, $\overline{\overline{c}}$ als Quarte von $\overline{\overline{g}}$ durch $\frac{\overline{\overline{c}}^{16}}{\overline{\overline{g}}^{12}}$, $\overline{\overline{e}}$ als Quarte von $\overline{\overline{h}}$ durch $\frac{\overline{\overline{e}}^{20}}{\overline{\overline{h}}^{15}}$, $\overline{\overline{g}}$ als Quarte von $\overline{\overline{d}}$ durch $\frac{\overline{\overline{g}}^{24}}{\overline{\overline{d}}^{18}}$, und selbst andere hier nicht angeführte Quartan, z. B. $\overline{\overline{f}}$ als Quarte von $\overline{\overline{c}}$ durch $\frac{\overline{\overline{f}}}{\overline{\overline{c}}}$; auch durch lauter Zahlen statt Töne, $\overline{\overline{g}}$ durch $\frac{\overline{\overline{g}}^{12}}{\overline{\overline{g}}^9}$, $\overline{\overline{c}}$ durch $\frac{\overline{\overline{c}}^{16}}{\overline{\overline{c}}^{12}}$ u. s. w. sich ausdrücken lassen, so daß der letzte Ausdruck nichts weiter sagt, als daß der Ton $\overline{\overline{c}}$ die Quarte von $\overline{\overline{g}}$ sei, und durch Theilung der Saite in 16 Theile erhalten werde, während $\overline{\overline{g}}$ nur einer Theilung derselben in 12 bedürfe.

35. Die große Terz läßt sich jetzt ebenfalls überhaupt, wie für jeden besondern Fall, in der Gestalt eines Bruches und mit den zugehörigen Theilungszahlen versehen, ausdrücken.

Die Theilung der Saite in gleiche Theile gab folgende große Terzen: die erste ist $\overline{\overline{e}}$ von $\overline{\overline{c}}$, ferner $\overline{\overline{e}}$ von $\overline{\overline{c}}$, $\overline{\overline{h}}$ von $\overline{\overline{g}}$ und $\overline{\overline{e}}$ von $\overline{\overline{c}}$.

In Gestalt eines Bruches sind sie: $\frac{\overline{\overline{e}}}{\overline{\overline{c}}}$, $\frac{\overline{\overline{e}}}{\overline{\overline{c}}}$, $\frac{\overline{\overline{h}}}{\overline{\overline{g}}}$ und $\frac{\overline{\overline{e}}}{\overline{\overline{c}}}$; durch die Theilungszahlen angegeben: $\frac{5}{4}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{15}{12}$ und $\frac{20}{16}$; auf beide Arten zusammen wird ausgedrückt: $\overline{\overline{e}}$ durch $\frac{\overline{\overline{e}}^5}{\overline{\overline{c}}^4}$, $\overline{\overline{e}}$

durch $\frac{\overline{e}^{10}}{\overline{c}^5}$, $\overline{h}$ durch $\frac{\overline{h}^{15}}{\overline{g}^{12}}$ und $\overline{e}$ durch $\frac{\overline{e}^{20}}{\overline{c}^{16}}$, so daß hier, wie im vorhergehenden, wieder $\frac{\overline{e}^5}{\overline{c}^4}$

nichts weiter sagt, als daß $\overline{e}$ die große Terz von $\overline{c}$ sei, und eine Theilung der Saite in 5 Theile nöthig habe, wenn $\overline{c}$ in 4 Theile zerlegt werden solle, um eine große Terz tiefer zu liegen, als $\overline{e}$ selbst (§ 24).

Da die Brüche $\frac{5}{4}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{15}{12}$ und $\frac{20}{16}$, als Brüche betrachtet, gleich sind, und jeder für sich eine, wenn auch bestimmte große Terz bezeichnet: so wird es wieder erlaubt sein, die große Terz überhaupt durch einen der 4 Brüche, und zwar am bequemsten durch den ersten $= \frac{5}{4}$ auszudrücken.

36. Kleine Terzen, welche die Theilung der Saite gibt, sind: $\overline{g}$ von $\overline{e}$, $\overline{g}$ von $\overline{e}$; $\overline{d}$ von $\overline{h}$ und $\overline{g}$ von $\overline{e}$; in Bruchform $\frac{\overline{g}}{\overline{e}}$, $\frac{\overline{g}}{\overline{e}}$, $\frac{\overline{d}}{\overline{h}}$ und $\frac{\overline{g}}{\overline{e}}$; durch Theilungszahlen $\frac{6}{4}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{15}{12}$ und $\frac{20}{16}$; auf beide Arten $\overline{g} = \frac{\overline{g}^6}{\overline{e}^5}$, $\overline{g} = \frac{\overline{g}^{12}}{\overline{e}^{10}}$, $\overline{d} = \frac{\overline{d}^{18}}{\overline{h}^{15}}$ und $\overline{g} = \frac{\overline{g}^{24}}{\overline{e}^{20}}$.

Die kleine Terz wird sich überhaupt wieder durch $\frac{6}{5}$, als den ersten und einfachsten der Brüche, ausdrücken lassen, so daß überall der einfachste der Brüche eine doppelte Bedeutung hat: eine weite, wornach er jede kleine Terz, und eine engere, wornach er die niedrigste der kleinen Terzen bezeichnet, die durch die Theilung der Saite in 6 und 5 gleiche Theile entsteht. (Vergl. § 26).

37. Außer der wirklichen kleinen Terz, wie sie in unserer jetzigen Musik gebraucht wird, erhält man durch die Theilung der Saite in 7 Theile, im Vergleiche mit dem Tone, der durch die Theilung in 6 Theile entsteht, eine Terz, deren beide Töne näher an einander liegen, oder wo der höhere der beiden Töne ein wenig niedriger ist, als der bei der wirklichen kleinen Terz. Ich nenne diese Terz die erniedrigte kleine, zum Unterschiede von der den Musikern unter der Benennung der verminderten kleinen Terz bekannten, welche in $\overline{g}is$ und dem benachbarten $\overline{b}$ besteht.

Die niedrigste ist $\overline{b}_{(-)}$ im Vergleiche zu $\overline{g}$, die zweite genau eine Oktave höher $\overline{b}_{(-)}$ zu $\overline{g}$.

Jene läßt sich ausdrücken durch $\frac{7}{6}$, diese durch $\frac{14}{12}$, oder $\frac{\overline{b}^7}{\overline{g}^6}$ und $\frac{\overline{b}^{14}}{\overline{g}^{12}}$, überhaupt aber diese Art kleiner Terz durch $\frac{7}{6}$.

38. Hierbei kann die Frage entstehen, um wieviel denn diese erniedrigte kleine Terz von der wirklichen kleinen Terz abweiche, oder niedriger sei?

Die Beantwortung ist auf dem eingeschlagenen Wege nur durch die Theilungszahlen möglich, indem man untersucht, welche von den beiden Theilungszahlen $\frac{6}{5}$ (für die kleine) und $\frac{7}{6}$ (für die erniedrigte

kleine Terz) einen höheren Ton gebe. Dieß wieder läßt sich nicht anders ermitteln, als daß man diese Theilungszahlen $\frac{5}{2}$ und $\frac{7}{2}$ als wirkliche Brüche behandelt, sie gleichnamig macht und dann mit einander vergleicht.

Der Bruch mit dem größern Zähler gibt nothwendig einen höhern Ton, weil der Ton desto höher wird, den jeder Theil einer Saite gibt, je mehr Theile aus ihr gemacht worden sind. Um wieviel er höher sei, zeigt die Subtraktion beider Brüche.

Diesem zu Folge ist $\frac{5}{2} = \frac{36}{36}$ und $\frac{7}{2} = \frac{35}{35}$. Diese zwei neuen Brüche $\frac{36}{36}$ und $\frac{35}{35}$ sind nun zwar als Brüche den alten $\frac{5}{2}$ und $\frac{7}{2}$ gleich, man würde aber doch sehr irren, wenn man glauben wollte, daß sie einen gleich hohen Ton gäben, als die alten. Sie geben jeder einen weit höhern Ton, weil die zugehörigen Theilungszahlen größer sind (§ 26 u. 36). Dieß hat indeß keinen Einfluß auf die Beantwortung der aufgestellten Frage, weil es sich hier gar nicht um die Höhe der beiden verglichenen Töne, sondern um die Abweichung von einander handelt, und da ist es denn gleichgültig, welcher Mittel man sich dazu bedienen will, wenn sie nur zum Ziele führen. Dieß letztere thun nur die gleichnamigen Brüche $\frac{36}{36}$ und $\frac{35}{35}$. Bei beiden ist der Nenner derselbe, der dadurch bezeichnete Ton also, nach welchem die Entfernung der beiden im Zähler stehenden (durch 36 und 35 vorgestellten) Töne bestimmt wird, derselbe; die beiden Töne, die der Zähler bezeichnet, dagegen ungleich hoch und zwar der durch eine größere Zahl bezeichnete höher, also der durch 36 bezeichnete Ton höher, als der durch 35 bezeichnete. Da nun $\frac{5}{2}$ oder jetzt $\frac{36}{36}$ den Ton $\bar{b}$ als reine kleine Terz des Grundtones 30 oder hier des $\bar{g}$ vorstellt, so gibt 35 einen Ton an, der in Wahrheit niedriger ist, als der durch 36 bezeichnete.

Daß aber dieser Unterschied der beiden durch 35 und 36 bezeichneten Töne als Terzen des Grundtones 30, der in diesem Falle $\bar{g}$ ist, nicht bloß in der Rechnung und auf dem Papiere, sondern in Wirklichkeit bestehe, sagt jedes musikalisch gebildete Ohr, als der einzige Schiedsrichter in akustischen Untersuchungen. Stimmt man die Saite des Monochords nach irgend einem Tone eines möglichst rein gestimmten Klaviers, z. B. in C, und vergleicht den Ton des Siebentels der Saite mit dem $\bar{b}$ des Klaviers, so ist dieses $\bar{b}$ entschieden höher als der Ton, den jeder der 7 Theile, der Saite auf dem Monochorde angibt; dieser letztere klingt ungefähr so, wie wenn ein Sänger, der den Ton nicht zu halten im Stande ist, detonirt und anstatt $\bar{b}$ etwas tiefer singt, dem man gern helfen möchte, den Ton in die Höhe zu treiben, wenn es ginge.

39. Es kommen auch Sekunden vor, und das Monochord weist deren in der Uebersicht (§ 18) mehr als eine Gattung nach.

Zur ersten gehört $\bar{d}$ als Sekunde von $\bar{c}$, und $\bar{d}$ als Sekunde von $\bar{c}$. $\bar{d}$ entsteht durch Theilung der Saite in 9, $\bar{c}$ durch Theilung in 8, $\bar{d}$ durch Theilung in 18 und $\bar{c}$ durch Theilung in 16 Theile; $\bar{d}$ als Sekunde von $\bar{c}$ wird sich also ausdrücken lassen durch $\frac{9}{8}$, und $\bar{d}$ als

Sekunde von $\bar{c}$ durch $\frac{1}{18}$, oder vollständig $\bar{d} = \frac{\bar{d}^9}{\bar{c}^3}$ und $\bar{e} = \frac{\bar{d}^{18}}{\bar{c}^{16}}$. Weil $\frac{1}{18}$ durch Verkleinern $\frac{2}{3}$ gibt, so läßt sich diese Art Sekunden überhaupt, d. h. wenn man keine bestimmte vor Augen hat, auch durch $\frac{2}{3}$ ausdrücken. Man nennt diese Art Sekunden in der Musik große ganze Töne.

40. Eine zweite Gattung Sekunden ist (nach § 18): $\bar{e}$ die Sekunde von $\bar{d}$, und $\bar{e}$ als Sekunde von $\bar{d}$.

Die Theilungszahlen sind: von $\bar{e}$ die 10, von $\bar{d}$ die 9, von $\bar{e}$ die 20 und von $\bar{d}$ die 18. $\bar{e}$ läßt sich demnach bezeichnen durch $\frac{\bar{e}^{10}}{\bar{d}^9}$ und $\bar{e}$ durch $\frac{\bar{e}^{20}}{\bar{d}^{18}}$, mithin diese Gattung von Sekunden überhaupt durch $\frac{1}{9}$, da sich $\frac{2}{3}$ auch auf $\frac{1}{9}$ bringen läßt.

41. Vergleicht man diese zweite Gattung Sekunden mit der vorigen, so zeigt sich mittelst des in § 38 gegebenen Verfahrens alsbald, daß die erste Art Sekunden einen höheren Ton gibt als die zweite.

Macht man nämlich wieder die beiden Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{9}$, durch welche sie vorgestellt werden, gleichnamig: so ist $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ und $\frac{1}{9} = \frac{2}{18}$. Der Zähler beider stellt die beiden Sekunden vor, deren Grundton der Nenner bezeichnet. Da nun zur Hervorbringung der ersten 81, der zweiten nur 80 Theile der Saite erfordert werden, und der Ton desto höher ist, in je mehr Theile die Saite getheilt wird: so stellt 81 einen höheren Ton vor als 80, und aus diesem Grunde heißt diese zweite Gattung Sekunden, die man durch $\frac{8}{12}$ oder $\frac{1}{9}$ bezeichnet, in der Musik der kleine ganze Ton.

42. Eine dritte Gattung von Sekunden ist die, welche der Ton $\bar{c}$ im Vergleiche zu $\bar{h}$ bildet, und der Bruch $\frac{1}{16}$, oder $\frac{\bar{c}^{16}}{\bar{h}^{15}}$ vorstellt.

Vergleicht man sie, mittelst des in § 38 angegebenen Verfahrens, mit dem kleinen ganzen Tone $\frac{1}{9}$, und macht beide Brüche zuvor gleichnamig, so daß $\frac{1}{16} = \frac{4}{64}$ und $\frac{1}{9} = \frac{8}{72}$, und beide Töne 48 und 50 von demselben Grundtone aus gerechnet werden: so ist der durch 48 vorgestellte Ton niedriger als der durch 50 ausgedrückte.

43. Vergleicht man alle drei Gattungen Sekunden mit einander, indem man die zugehörigen Brüche gleichnamig macht: so ist die erste von $\frac{2}{3} = \frac{40}{60}$, die zweite $\frac{1}{9} = \frac{40}{360}$, die dritte von $\frac{1}{16} = \frac{30}{480}$. Alle drei werden von demselben Grundtone 360 an gerechnet, die erste ist also die höchste, niedriger die zweite, und am niedrigsten ist die dritte, und zwar ist die dritte um ein bedeutendes, um 16 Theile niedriger als die zweite, während diese nur um 5 Theile niedriger ist als die

erste. Am besten unterscheidet das Ohr die dritte Gattung Sekunden im Vergleiche mit der ersten, und bekanntlich heißen Sekunden, wie $\frac{1}{2}$, in der musikalischen Sprache große halbe Töne.

44. Eine vierte Gattung Sekunden ist die durch $\frac{2}{4}$ ausgedrückte, oder $\overline{\overline{g}}$ im Vergleiche mit $\overline{g}$, oder $\overline{\overline{g}} = \frac{\overline{\overline{g}}^{25}}{\overline{\overline{g}}^{24}}$.

Mit der dritten Gattung $\frac{1}{2}$ verglichen, so ist nach geschehener Gleichnamigmachung $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ und $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, mithin die durch $\frac{1}{2}$ ausgedrückte Sekunde, d. h. der große halbe Ton, höher als die durch $\frac{2}{4}$ ausgedrückte, und dieserhalb heißen Sekunden, die durch $\frac{2}{4}$ ausgedrückt werden, kleine halbe Töne.

45. Außer den angeführten vier Gattungen Sekunden gibt es noch andere, die jedoch in der jetzigen Musik nicht gebräuchlich sind. Z. B. $\overline{c}$ gegen $\overline{b}$ durch $\frac{8}{7}$, $\overline{f}$ gegen $\overline{e}$ durch $\frac{11}{10}$, $\overline{g}$ gegen $\overline{f}$ durch $\frac{12}{11}$, dann durch $\frac{13}{12}$, $\frac{14}{13}$, $\frac{15}{14}$, $\frac{17}{16}$, $\frac{18}{17}$, $\frac{19}{18}$, $\frac{20}{19}$, $\frac{21}{20}$, $\frac{22}{21}$ und $\frac{23}{22}$ ausgedrückt (Vergl. § 18).

46. Wie sie von jeder der ersten vier Gattungen abweichen, wird auf ähnliche Weise, wie (§ 38 u. 43) gezeigt worden ist, untersucht. Die Hauptsache dabei ist stets die, daß man zur Vergleichung einen und denselben Ton annimmt.

Gesetzt, man wollte wissen, was der Ton, welchen das Cilistel der Saite gibt, für eine Sekunde von dem nächst tieferen Tone $\overline{e}$ macht, oder richtiger gesagt: welcher der ersten drei Gattungen von Sekunden, die im musikalischen Gebrauche sind, der Ton 11 als Sekunde von 10 am nächsten komme, weil die Tonzahlen $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{11}{10}$, als ungleiche Brüche ungleiche Töne, mithin ungleiche Sekunden geben, und somit nicht zu erwarten steht, daß $\frac{11}{10}$, als ein ebenfalls im Werthe verschiedener Bruch, einen den vorigen Tönen gleichen Ton geben sollte. Diese vier Brüche $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{11}{10}$ und $\frac{1}{2}$ gleichnamig gemacht: so ist $\frac{9}{8} = \frac{3060}{3200}$, $\frac{10}{9} = \frac{4000}{3600}$, $\frac{11}{10} = \frac{3260}{3000}$ u. $\frac{1}{2} = \frac{3240}{6480}$, d. h. diese vier Sekunden beziehen sich alle auf denselben Ton, der da sein mag, welcher es immer wolle, hier aber $\overline{e}$ ist und durch die Zahl 3600 vorgestellt wird. In Beziehung auf diesen Ton sind nun die Zähler die Sekunden desselben, und diejenige immer die höhere, welche durch eine größere Zahl vorgestellt wird (§ 38). Deshalb ist die durch 4050 vorgestellte Sekunde des Tones 3600 die höchste, tiefer als sie die von 4000, tiefer als diese wieder die von 3960, und am tiefsten die von 3840. Es fällt also der durch $\frac{11}{10} = \frac{3260}{3000}$ vorgestellte Ton der Höhe nach zwischen die beiden Töne $\frac{10}{9}$ und $\frac{1}{2}$, und ist dem Tone $\frac{10}{9}$ näher als dem Tone $\frac{1}{2}$. Da nun, wie später gezeigt werden wird, $\frac{1}{2}$ in dem vorliegenden Falle den Ton $\overline{f}$ als die Sekunde von $\overline{e}$ (den halben Ton von $\overline{e}$) angibt, so gibt $\frac{11}{10} = \frac{3260}{3000}$ einen Ton an, der zwar höher ist als $\overline{f}$, aber das $\overline{f}$ nicht erreicht, mithin einen in der jetzigen Musik nicht gebräuchlichen Ton.

47. Die Theilung der Saite in 25 Theile gibt auch große und kleine Sexten.

Große Sexten, die stets um einen ganzen Ton höher sind, als die reinen Quinten, sind: $\bar{e}$ von g oder $\frac{\bar{e}}{g} = \frac{\bar{e}^5}{g^3}$, $\bar{e}$ von $\bar{g}$ oder $\frac{\bar{e}}{\bar{g}} = \frac{\bar{e}^{10}}{g^6}$, $\bar{h}$ von $\bar{d}$ oder $\frac{\bar{h}}{\bar{d}} = \frac{\bar{h}^{15}}{\bar{d}^9}$, $\bar{e}$ von $\bar{g}$ oder $\frac{\bar{e}}{\bar{g}} = \frac{\bar{e}^{20}}{\bar{g}^{12}}$, $\bar{g}$ von $\bar{h}$ oder $\frac{\bar{g}}{\bar{h}} = \frac{\bar{g}^{15}}{\bar{h}^{13}}$.

Es gibt also jeder der Brüche $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{15}{9}$, $\frac{20}{12}$, $\frac{25}{15}$ eine bestimmte große Sexte an, und es wird wieder erlaubt sein, da sie als Brüche einander gleich sind, die Sexte überhaupt, wenn von keiner bestimmten die Rede ist, durch den einfachsten der Brüche, d. h. durch $\frac{5}{3}$ zu bezeichnen. (Vergl. § 26 und 36 am Ende.)

48. Kleine Sexten, die nur einen halben Ton höher liegen, als die reine Quinte, sind (vergl. § 18) folgende: $\bar{c}$ von $\bar{e}$ oder $\frac{\bar{c}}{\bar{e}} = \frac{\bar{c}^8}{\bar{e}^5}$, $\bar{c}$ von $\bar{e}$ oder $\frac{\bar{c}}{\bar{e}} = \frac{\bar{c}^{16}}{\bar{e}^{10}}$, daher ist $\frac{8}{5}$ der Ausdruck für die kleine Sexte überhaupt, und insbesondere für die erste der kleinen Sexten, welche die Theilung der Saite nach den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. hervorbringt.

49. Auch zwei Septimen gibt die Theilung der Saite.

Die große Septime, die nur um einen halben Ton tiefer liegt, als die Oktave, ist nur einmal im Tone $\bar{h}^{15}$ im Vergleiche gegen $\bar{c}^8$ vorhanden, daher $\bar{h} = \frac{\bar{h}}{\bar{c}} = \frac{\bar{h}^{15}}{\bar{c}^8}$, und jede große Septime überhaupt, wie diese erste aus der Theilung hervorgehende, durch $\frac{15}{8}$ zu bezeichnen.

50. Kleine Septimen, die um einen ganzen Ton niedriger liegen, als die Oktave, kommen in der bisherigen Theilung nur zwei vor: $\bar{d}$ gegen $\bar{e}$ und $\bar{d}$ gegen $\bar{e}$ gehalten; jene ist demnach durch $\frac{\bar{d}}{\bar{e}} = \frac{\bar{d}^9}{\bar{e}^5}$, diese durch $\frac{\bar{d}}{\bar{e}} = \frac{\bar{d}^{18}}{\bar{e}^{10}}$, die kleine Septime überhaupt also durch den kleinsten der vorkommenden gleichen Brüche, d. h. durch $\frac{9}{5}$ zu bezeichnen.

51. Nach dem Bisherigen wird es nun nicht mehr schwer werden, auch für andere Tonstufen nach der verschiedenen Entfernung von einem gewissen Grundtone die zugehörigen Theilungszahlen zu finden.

So ist $\overline{\overline{d}}$ die None von $\overline{c}$, daher durch $\frac{\overline{\overline{d}}}{\overline{c}} = \frac{\overline{\overline{d}}^9}{\overline{c}^4}$, und von derselben Art auch $\overline{\overline{\overline{d}}}$ die None von $\overline{\overline{c}}$, daher durch $\frac{\overline{\overline{\overline{d}}}}{\overline{\overline{c}}} = \frac{\overline{\overline{\overline{d}}}^{18}}{\overline{\overline{c}}^8}$, oder schlechtlin die None durch $\frac{9}{4}$ zu bezeichnen.

Unter den Decimen ist (§ 18) $\overline{e}$ gegen c gehalten die erste, daher durch $\frac{5}{2}$ auszudrücken. Andere sind $\overline{\overline{e}}^{10}$ von $\overline{c}^4$, also $= \frac{\overline{\overline{e}}^{10}}{\overline{c}^4}$; $\overline{\overline{\overline{e}}}^{15}$ von $\overline{g}^6$, also $= \frac{\overline{\overline{\overline{e}}}^{15}}{\overline{g}^6}$, $\overline{\overline{\overline{\overline{e}}}}^{20}$ von $\overline{\overline{c}}^8$, also $= \frac{\overline{\overline{\overline{\overline{e}}}}^{20}}{\overline{\overline{c}}^8}$.

Es bedarf wohl keiner großen Erörterung, daß sowohl für die Nonen und Decimen, als für andere Tonstufen von noch größerer Entfernung, die Theilungszahlen anders ausfallen werden, je nachdem große ganze, kleine ganze oder halbe Töne dabei gebraucht werden.

52. Die Vergleichung der Theilungs- oder Tonzahlen, die für die verschiedenen durch Theilung der leeren Saite entstehenden Töne gefunden worden sind, gewährt mehrere nicht uninteressante Resultate, die ich (im § 52, 53, 54 u. 55) folgen lasse *).

1) Die Theilungszahlen für die Oktaven (vergl. § 18 und 21) sind:

1 für C , 2 für c , 4 für $\overline{c}$, 8 für $\overline{\overline{c}}$, 16 für $\overline{\overline{\overline{c}}}$;
 3 für g , 6 für $\overline{g}$, 12 für $\overline{\overline{g}}$, 24 für $\overline{\overline{\overline{g}}}$;
 5 für $\overline{e}$, 10 für $\overline{\overline{e}}$, 20 für $\overline{\overline{\overline{e}}}$;
 7 für $\overline{\overline{b}}^{(-)}$, 14 für $\overline{\overline{\overline{b}}}^{(-)}$;

und sie steigen, wie man sieht, alle nach der geometrischen Progression, deren Quotient $= 2$, d. h. deren nächstfolgendes Glied das doppelte des vorhergehenden ist.

2) die Theilungszahlen für die Quinten sind (nach § 18 und 30):

$\frac{3}{2}$ für g , $\frac{6}{4}$ für $\overline{g}$, $\frac{9}{8}$ für $\overline{\overline{g}}$, $\frac{12}{16}$ für $\overline{\overline{\overline{g}}}$, $\frac{15}{10}$ für $\overline{h}$, $\frac{18}{12}$ für $\overline{\overline{h}}$, $(\frac{21}{14})$ für $\overline{\overline{\overline{h}}}^{(-)}$, $\frac{24}{16}$ für $\overline{\overline{\overline{\overline{h}}}}$.

Sie steigen alle, wenn man die eingeklammerte $\frac{21}{14}$, die in der Musik nicht gebraucht wird, dazunimmt, nach der arithmetischen Progression, deren Differenz im Zähler 3, im Nenner 2 ist. Die Differenz 3 ist zugleich diejenige Theilungszahl, welche unter den aus der Theilung der Saite nach den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. hervorgehenden Tönen die erste Quinte g gibt.

3) Die Theilungszahlen für die Quartan sind (§ 18 und 33):

$\frac{4}{3}$ für $\overline{c}$, $\frac{8}{6}$ für $\overline{\overline{c}}$, $\frac{12}{9}$ für $\overline{\overline{\overline{c}}}$, $\frac{16}{12}$ für $\overline{\overline{\overline{\overline{c}}}}$, $\frac{20}{15}$ für $\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{c}}}}}$, $\frac{24}{18}$ für $\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{c}}}}}}$.

*) Ich kam Abends den 2. Juli d. J. darauf, als ich, Behufs einer Vorlesung in der musikalischen Sektion der schlesischen vaterländischen Gesellschaft, die nöthigen Materialien ordnete.

Sie steigen wieder nach einer arithmetischen Progression, deren Differenz im Zähler 4, im Nenner 3 beträgt. Die Differenz 4 ist wieder zugleich diejenige Theilungszahl, welche die erste Quarte $\bar{c}$ auf der in 4 Theile getheilten Saite angibt. (Vergl. § 13 und 33.)

4) Die Theilungszahlen für die großen Terzen sind (§ 18 und 35):

$$\frac{4}{3} \text{ für } \bar{c}, \frac{10}{9} \text{ für } \bar{e}, \frac{16}{9} \text{ für } \bar{h}, \frac{20}{9} \text{ für } \bar{e}.$$

Sie steigen abermals nach einer arithmetischen Progression, deren Differenz im Zähler 5, im Nenner 4 ist. Auch ist die Differenz 5 wieder zugleich diejenige Theilungszahl, welche die erste große Terz $\bar{c}$ auf der in 5 Theile getheilten leeren Saite angibt. (Vergl. § 15 und 35.)

5) Die Theilungszahlen für die kleinen Terzen sind (§ 18 und 36):

$$\frac{6}{5} \text{ für } \bar{g}, \frac{12}{10} \text{ für } \bar{g}, \frac{18}{10} \text{ für } \bar{a}, \frac{24}{10} \text{ für } \bar{g}.$$

Deren Zunahme geschieht wieder nach einer arithmetischen Progression, deren Differenz im Zähler 6, im Nenner 5 ist. Die 6 ist auch hier wieder zugleich diejenige Theilungszahl, welche die erste kleine Terz $\bar{g}$ auf der in 6 Theile getheilten Saite angibt. (Vergl. §. 15 u. 36.)

53. Die Folge der Theilungszahlen für die übrigen Töne, namentlich $\frac{7}{4}$ und $\frac{11}{8}$ für die erniedrigte kleine Terz, $\frac{3}{2}$ und $\frac{18}{10}$ für die erste Art Sekunden (große ganze Töne), $\frac{10}{9}$ und $\frac{20}{9}$ für die zweite Art Sekunden (kleine ganze Töne), $\frac{16}{9}$ für den großen halben Ton, $\frac{25}{12}$ für den kleinen halben Ton, $\frac{8}{5}$ und $\frac{16}{10}$ für die kleine Sexte, $\frac{15}{8}$ für die große Septime, $\frac{9}{5}$ und $\frac{18}{10}$ für die kleine Septime, $\frac{7}{4}$ und $\frac{14}{8}$ für die None, läßt sich, wie es scheint, nach einer Progression, von welcher nur die ersten zwei Glieder gegeben sind, die eben so gut eine arithmetische als geometrische Progression beginnen können, für die bis auf 25 gleiche Theile fortgesetzte Theilung der leeren C-Saite, ohne Berücksichtigung anderer entscheidender Gründe, nicht angeben. Stellt man jedoch die sämtlichen bereits untersuchten Töne nach ihren verschiedenen Entfernungen von einander zu einer Tafel (I und II) zusammen, und vergleicht deren Aufeinanderfolge, wie sie durch die Theilung der Saite entstehen, mit einander: so ergeben sich für den Mathematiker höchst überraschende Resultate, die auch wohl den praktischen Musiker nicht ohne Interesse lassen dürften, und sich auf folgende zwei Punkte zurückführen lassen.

a) Die Theilungszahlen der Töne, die das nach den natürlichen Zahlen getheilte Monochord gibt, gehen entweder nach einer geometrischen oder arithmetischen Progression fort.

Die geometrische Progression findet nur bei den Theilungszahlen der Oktaven Statt, und ihr Quotient ist stets = 2, weil zur Hervorbringung der Oktave eines Tones die Saite immer in noch einmal so viele Theile getheilt sein muß.

Bei den Theilungszahlen der übrigen Töne von anderer Entfernung, als der einer Oktave, bemerkt man durchgehend, sowohl im Zähler als Nenner, eine arithmetische Progression,

und ist die Art der Folge ihrer Glieder höchst merkwürdig. Das erste Glied einer solchen Progression ist im Zähler für den Ton von einer bestimmten Entfernung allemal die erste Theilungszahl, d. h. diejenige, welche diesen Ton zu allererst gibt.

So wird g als die erste Quinte, die durch die Theilung der leeren Saite in drei gleiche Theile (§ 13) hervorgebracht wird, durch die Zahl 3 angegeben; mit dieser Theilungszahl 3 fängt nun die Progression der gesammten Theilungszahlen für die Quinten an.

c als Quarte von g entsteht durch eine Theilung der leeren Saite in vier gleiche Theile (§ 13); diese Theilungszahl 4 macht nun das erste Glied der arithmetischen Progression, die für die Quartan gilt, und in Tafel I und II aufgestellt zu finden ist.

e als die erste große Terz entsteht durch die Theilung der C -Saite in fünf gleiche Theile (§ 15); diese Theilungszahl 5 macht abermals das erste Glied der arithmetischen Progression aus, die für die großen Terzen gilt (§ 52 und Tafel I).

Für die übrigen Töne ergibt sich dasselbe Gesetz.

Der Nenner der Theilungszahl, welcher das erste Glied der Progression macht, richtet sich allemal nach der Entfernung, die der Grundton vom Zähler hat.

Ist von einer Quinte die Rede, so ist g im Vergleiche mit c die erste, ihre Theilungszahl ist $\frac{3}{2}$, daher 2 der Nenner des ersten Gliedes.

Bei den Quartan ist c als die Quarte von g durch $\frac{4}{3}$ ausgedrückt, daher 3 der Nenner des ersten Gliedes.

Bei den großen Terzen ist e als große Terz von c durch $\frac{5}{4}$ ausgedrückt, daher 4 der Nenner des ersten Gliedes.

Jedes nächstfolgende Glied dieser aus den Theilungszahlen bestehenden Progression wächst, sowohl im Zähler als im Nenner, stets um das erste Glied, d. h. also um die Theilungszahl der Saite, woraus von selbst folgt, daß in diesen Fällen mit dem ersten Gliede die ganze Progression bekannt ist.

Für die Quinten ist die erste Theilungszahl $= \frac{3}{2}$;

daher ist die Progression $= \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}$.

Für die Quartan ist die erste Theilungszahl $= \frac{4}{3}$;

daher ist die Progression $= \frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \frac{64}{27}, \frac{256}{81}, \frac{1024}{243}$.

Für die kleine Terz ist die erste Theilungszahl $= \frac{6}{5}$;

daher die Progression selbst $= \frac{6}{5}, \frac{36}{25}, \frac{216}{125}, \frac{1296}{625}$.

Für die große Sexte ist die erste Theilungszahl $= \frac{5}{3}$;

daher die Progression selbst $= \frac{5}{3}, \frac{125}{27}, \frac{15625}{2187}, \frac{1562500}{59049}$.

Vergl. Tafel I für diese und die übrigen Töne.

Anmerkung. Sollte sich Jemand mit diesen Theilungszahlen als ganzen nicht befreunden können, der nehme die in der Anmerkung zum § 22 aufgeführten Brüche dafür. Dadurch kommen lauter Doppelbrüche zum Vorscheine, die Sache selbst wird in ihrem Wesen weiter nicht geändert, mithin nicht viel, oder nichts dadurch gewonnen.

b) Die Töne selbst, welche den Theilungszahlen zugehören, folgen ebenfalls nach einer bestimmten, höchst überraschenden Ordnung, und diese ist bei den verschiedensten Entfernungen von einander dieselbe, daher leicht zu behalten.

Die Oktave des Grundtones C abgerechnet, so beobachtet man, daß die Töne, mögen sie Quinten, Quarten, große, kleine Terzen und dergleichen sein, stets in der Ordnung auf einander folgen, wie die Theilung der Saite nach den natürlichen Zahlen sie angibt, und wie sie im § 19 angegeben stehen.

Ist also $\bar{g}$ (Tafel II) die erste Quinte, so ist $\bar{g}$ die zweite, $\bar{a}$ die dritte, $\bar{g}$ die vierte, $\bar{h}$ die fünfte u. s. w., d. h. die Ordnung ist so, als wenn die leere Saite auf $\bar{g}$ gestimmt und dann in 2, 3, 4, 5, 6 und noch mehr gleiche Theile getheilt wäre, so daß zuerst die Oktave, dann die Quinte der Oktave, die Doppeloktave, die große Terz der Doppeloktave, die Quinte der Doppeloktave, und so nach der Reihe alle die Töne für den Grundton $\bar{g}$ zum Vorscheine kämen, wie sie in den §§ 13 bis 19 für den Grundton C gefunden, und in dem letzten § 19 summarisch angegeben worden sind.

Ist $\bar{c}$ die erste Quarte, so ist $\bar{c}$ die zweite, $\bar{g}$ die dritte, $\bar{c}$ die vierte, $\bar{e}$ die fünfte, $\bar{g}$ die sechste, also wieder in der in § 19 angegebenen Ordnung.

Für die übrigen Töne s. Tafel II.

54. Die Töne, welche durch eine Theilung der Saite nach den Primzahlen 7, 11, 13, 17, 19, 23 entstehen, passen nicht in das jetzt gebräuchliche Tonssystem, sind deshalb außer Gebrauche; auch gibt sie kein richtig gestimmtes Tasteninstrument an, nur schlechten Sängern und Anfängern im Spiel eines Bogeninstruments wird das Glück zu Theil, sie häufiger, als sie es wünschen mögen, zu produciren. Ueberhaupt hat in der Beziehung der Gesang vor der Instrumentalmusik das voraus, daß der Gesang alle nur möglichen Töne hervorzubringen fähig ist, die Instrumente dagegen nur eine bestimmte Anzahl derselben.

55. Mit dem Grundtone C oder dessen Oktaven werden nur Oktaven, Quinten $\frac{\bar{g}}{\bar{c}}$ und $\frac{\bar{g}}{\bar{c}}$; Quarten $\frac{\bar{c}}{\bar{g}}$, $\frac{\bar{c}}{\bar{g}}$ und $\frac{\bar{c}}{\bar{g}}$ (wenn man die tiefer liegenden dafür passiren läßt); große Terzen $\frac{\bar{e}}{\bar{c}}$, $\frac{\bar{e}}{\bar{c}}$ und $\frac{\bar{e}}{\bar{c}}$; Sekunden als große ganze Töne $\frac{\bar{d}}{\bar{c}}$ und $\frac{\bar{d}}{\bar{c}}$;

Sekunden als große halbe Töne $\frac{\overline{\overline{c}}}{\overline{h}}$ (wenn man die tiefer liegenden dafür passiren läßt, obgleich in dieser Abhandlung durchgehend nur die höher liegenden beachtet worden sind); kleine Terzen $\frac{\overline{\overline{c}}}{\overline{e}}$ und $\frac{\overline{\overline{c}}}{\overline{e}}$ (mit den tiefer liegenden); große Septimen $\frac{\overline{\overline{h}}}{\overline{c}}$; große Nonen $\frac{\overline{\overline{d}}}{\overline{c}}$ und $\frac{\overline{\overline{d}}}{\overline{c}}$; Decimen $\frac{\overline{\overline{e}}}{\overline{c}}$, $\frac{\overline{\overline{e}}}{\overline{c}}$ und $\frac{\overline{\overline{e}}}{\overline{c}}$, aber keine kleine Terzen, keine kleine Septimen und keine große Terzen gebildet, wovon der Grund in dem Schluß des § 18.

Nimmt man auch die gegen den Grundton oder dessen Oktaven tiefer liegenden Töne hinweg: so bleiben nur die Oktaven, Quinten, große Terzen, große Septimen, Nonen und Decimen übrig, welche letztere man als die Oktave der großen Terz allenfalls auslassen kann. Alsdann aber bemerkt man leicht (Tafel II Nr. 18), daß die übrig bleibenden Töne, nach der Ordnung, in lauter Terzen aufeinander folgen, die paarweise gleiche Tonweite haben.

56. Die bisherigen Untersuchungen wiesen die Töne nach, welche jeder aus der Theilung der Saite nach den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. hervorgehende Theil gibt, und wie sie in § 18 und 19 zu finden sind; sie zeigten, wie man diese Töne mittelst der Theilungszahlen der Saite und auch nach der Entfernung von einander (ob sie nämlich Quinten, Quartan u. s. w. sind) genau bezeichnen könne. Es liegen indeß zwischen diesen Tönen (§ 18), und zwar vorzugsweise im Baße, noch eine Menge in der Musik gebräuchliche Töne, die hier noch gar nicht erwähnt worden sind, und doch auch eine gewisse Länge der Saite erfordern, wenn sie hervorgebracht werden sollen, z. B. D E F G A H d e f g etc. Insbesondere läßt sich zunächst die Frage aufwerfen, was wohl für ein Ton zum Vorschein komme, wenn man von einer Saite die Hälfte, das Drittel, das Viertel, das Fünftel, Sechstel u. s. w. wegnimmt und den Rest, d. h. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ der Saite u. s. w. tönen läßt, und wie derselbe zu bezeichnen sein möchte?

Diese und andere gleich wichtige, zum Theil sehr schwierige Gegenstände, z. B. der Gebrauch des Monochords bei Saiten- und Blasinstrumenten (inclusive der Pfeifen), in wieweit die bei ihm geltenden Geseze die Entstehung der Flageolettöne nachzuweisen vermögen, und eine Menge anderer Erscheinungen zu erklären geeignet sind, die zwar einzeln zum Theil oder größtentheils bekannt, aber im Zusammenhange, so weit ich die Sache kenne, noch von Niemandem betrachtet worden sind, sollen den Inhalt einer spätern Abhandlung machen.

Den ersten Theil derselben oder die Reste der Saite betreffend, so kann man sich die Untersuchungen darüber erleichtern, oder doch zum wenigsten abkürzen, wenn man die

Interpolation allgemein, d. h. nach den Theilungszahlen $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ u. s. w. bloß für den Bereich Einer Oktave verfolgt und ausführt; ein Weg, den bis jetzt alle Theoretiker gegangen sind. Umfangsreich dagegen und schwieriger werden die Untersuchungen, wenn man die Interpolation vermittlest der besondern Theilungszahlen, d. h. die einen bestimmten Ton geben, vornimmt, und diese Untersuchung ist meines Wissens noch von keinem musikalischen Theoretiker angestellt worden.

Vor dem Gebrauche sind folgende Schreibfehler zu verbessern, die dem Korrektor entgangen sind:

Seite 10 von unten in der 10ten Zeile lies: „die erste Oktave des Tones ist“, statt „die erste Oktave des ersten Tones ist.“

Seite 16 von oben 6te Zeile lies: „Grundton“ statt „Gruntton“.

Seite 16 von unten 5te Zeile lies: $\frac{b5}{b5}$ statt $\frac{b14}{b14}$.

Seite 17 von unten 11te Zeile lies: „welche“ statt „welcher“.

Seite 18 von oben 18te Zeile lies: $\overline{c}$ statt $\overline{c}$.

Seite 20 von unten 4te Zeile lies: $\overline{c}$ statt c.

Seite 23 von unten 7te Zeile muß nach dem Worte „Grundtone“ die Zahl „45“ eingeschaltet werden.

Seite 24 von unten 4te Zeile lies: $\frac{1}{9}$ statt $\frac{1}{9}$.

Tafel I.

Uebersicht der Töne,

wie sie nach ihrer verschiedenen Entfernung von einander durch die Theilung der Saite nach den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. zum Vorschein kommen und ausgedrückt werden.

1) Oktaven.

$$c = \frac{c^2}{c^1}; \quad \bar{c} = \frac{c^4}{c^2}; \quad \bar{\bar{c}} = \frac{c^8}{c^4}; \quad \bar{\bar{\bar{c}}} = \frac{c^{16}}{c^8}.$$

2) Quinten.

$$g = \frac{g^3}{c^2}; \quad \bar{g} = \frac{g^6}{c^4}; \quad \bar{\bar{d}} = \frac{d^9}{g^6}; \quad \bar{\bar{g}} = \frac{g^{12}}{c^8}; \quad \bar{\bar{\bar{h}}} = \frac{h^{15}}{e^{10}}; \quad \bar{\bar{\bar{d}}} = \frac{d^{18}}{g^{12}};$$

$$\bar{\bar{\bar{f}}} = \frac{f^{21}}{b^{14}}; \quad \bar{\bar{\bar{g}}} = \frac{g^{24}}{c^{16}}.$$

3) Quartan.

$$\bar{c} = \frac{c^4}{g^3}; \quad \bar{\bar{c}} = \frac{c^8}{g^6}; \quad \bar{\bar{g}} = \frac{g^{12}}{d^9}; \quad \bar{\bar{\bar{c}}} = \frac{c^{16}}{g^{12}}; \quad \bar{\bar{\bar{e}}} = \frac{e^{20}}{h^{15}}; \quad \bar{\bar{\bar{g}}} = \frac{g^{24}}{d^{18}}.$$

4) Große Terzen.

$$\bar{e} = \frac{e^5}{c^4}; \quad \bar{\bar{e}} = \frac{e^{10}}{c^8}; \quad \bar{\bar{h}} = \frac{h^{15}}{g^{12}}; \quad \bar{\bar{\bar{e}}} = \frac{e^{20}}{c^{16}}; \quad \bar{\bar{\bar{g}}} = \frac{g^{25}}{e^{20}}.$$

5) Kleine Terzen.

$$\bar{g} = \frac{g^6}{e^5}; \quad \bar{\bar{g}} = \frac{g^{12}}{e^{10}}; \quad \bar{\bar{d}} = \frac{d^{18}}{h^{15}}; \quad \bar{\bar{\bar{g}}} = \frac{g^{24}}{e^{20}}.$$

6) Erniedrigte kleine Terzen.

$$\bar{\bar{b}} = \frac{b^7}{g^6}; \quad \bar{\bar{\bar{b}}} = \frac{b^{14}}{g^{12}}; \quad \bar{\bar{\bar{f}}} = \frac{f^{21}}{d^{18}}.$$

7) Sekunden in der Größe eines großen ganzen Tones.

$$\bar{\bar{d}} = \frac{d^9}{c^8}; \quad \bar{\bar{\bar{d}}} = \frac{d^{18}}{c^{16}}.$$

8) Sekunden in der Größe eines kleinen ganzen Tones.

$$\overline{\overline{e}} = \frac{\overline{\overline{e}}^{10}}{\overline{\overline{d}}^9}; \quad \overline{\overline{e}} = \frac{\overline{\overline{e}}^{20}}{\overline{\overline{d}}^{18}}.$$

9) Sekunden in der Größe eines großen halben Tones.

$$\overline{\overline{e}} = \frac{\overline{\overline{c}}^{16}}{\overline{\overline{h}}^{15}}.$$

10) Sekunden in der Größe eines kleinen halben Tones.

$$\overline{\overline{gis}} = \frac{\overline{\overline{g}}^{25}}{\overline{\overline{g}}^{24}}.$$

11) Ungebräuchliche Sekunden.

Die durch folgende Brüche ausgedrückt:

$$\frac{8}{7}, \frac{11}{10}, \frac{12}{11}, \frac{13}{12}, \frac{14}{13}, \frac{15}{14}, \frac{17}{16}, \frac{18}{17}, \frac{19}{18}, \frac{20}{19}, \frac{21}{20}, \frac{22}{21}, \frac{23}{22}, \frac{24}{23}.$$

12) Große Sexten.

$$\overline{\overline{e}} = \frac{\overline{\overline{e}}^5}{\overline{\overline{g}}^3}; \quad \overline{\overline{e}} = \frac{\overline{\overline{e}}^{10}}{\overline{\overline{g}}^6}; \quad \overline{\overline{h}} = \frac{\overline{\overline{h}}^{15}}{\overline{\overline{d}}^9}; \quad \overline{\overline{e}} = \frac{\overline{\overline{e}}^{20}}{\overline{\overline{g}}^{12}}; \quad \overline{\overline{gis}} = \frac{\overline{\overline{gis}}^{25}}{\overline{\overline{h}}^{15}}.$$

13) Kleine Sexten.

$$\overline{\overline{e}} = \frac{\overline{\overline{c}}^8}{\overline{\overline{e}}^5}; \quad \overline{\overline{c}} = \frac{\overline{\overline{c}}^{16}}{\overline{\overline{e}}^{10}}; \quad \overline{\overline{g}} = \frac{\overline{\overline{g}}^{24}}{\overline{\overline{h}}^{15}}.$$

14) Große Septimen.

$$\overline{\overline{h}} = \frac{\overline{\overline{h}}^{15}}{\overline{\overline{c}}^8}.$$

15) Kleine Septimen.

$$\overline{\overline{d}} = \frac{\overline{\overline{d}}^9}{\overline{\overline{e}}^5}; \quad \overline{\overline{d}} = \frac{\overline{\overline{d}}^{18}}{\overline{\overline{e}}^{10}}.$$

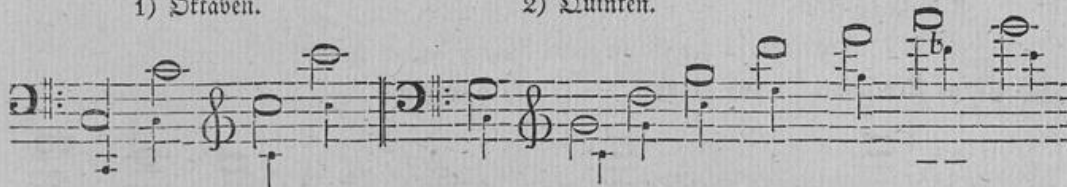
Wiederholte Bemerkung: Der Nenner gibt überall den Grundton an, auf welchen der im Zähler stehende Ton zu beziehen ist.

T a f e l II.

Dieselben Töne in Noten ausgedrückt, wobei die kleinen den Grundton der darüberstehenden halben Note angeben.

1) Oktaven.

2) Quinten.



3) Quarten.



4) Große Terzen.

5) Kleine Terzen.

6) Erniedrigte kleine Terzen.

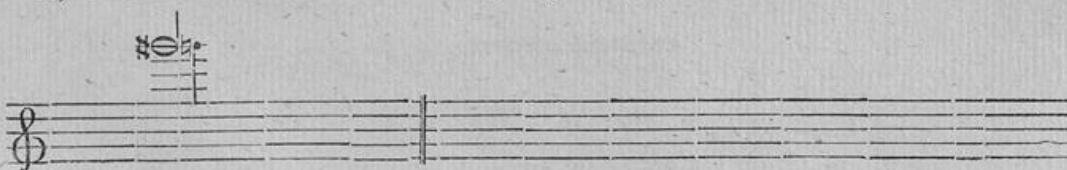


7) Sekunden als große ganze Töne. 8) Sekunden als kleine ganze Töne. 9) Sek. als große halbe Töne.



10) Sekunden als kleine halbe Töne.

11) Ungebräuchliche Sekunden.



12) Große Sexten.

13) Kleine Sexten.

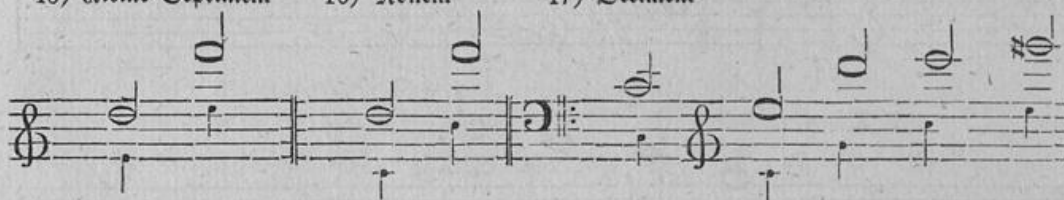
14) Große Sept.



15) Kleine Septimen.

16) Nonen.

17) Decimen.



18)

Die Terzen sind:



