

XII.

Über den Unterricht in der Zahlenlehre.

Noch sind wir bekanntlich nicht so weit gekommen, daß wir für die Pädagogik, Didaktik und Methodik allgemein anerkannte Prinzipien aufzustellen vermöchten. Den Beweis für diesen Satz liefert die pädagogische Litteratur. Es ist darum auch von uns hier, wo es sich von der Methodik eines einzelnen Unterrichtsgegenstandes handelt, nicht zu fordern, einen vollgültigen obersten Grundsatz für alle Erziehung und jedweden Unterricht namhaft zu machen. Aber in beschränkterem Kreise, für alle rationellen Gegenstände, zu welchen unbestritten der Unterricht in der Zahlenlehre gehört, glauben wir ein oberstes Prinzip aufstellen zu können. Wir entdecken es, wenn wir den Zustand des Kindes, aus dem ein Mann werden soll, mit der Beschaffenheit des vollendeten Mannes vergleichen. Der Unterschied beider muß uns das zu erreichende Ziel und das zu befolgende Prinzip nennen. Nun finden wir in dem Kinde die Empfänglichkeit (die Receptivität), in dem ausgebildeten Manne die Selbstthätigkeit (die Spontaneität) vorherrschen. Folglich soll jene zu dieser umgebildet werden, und unser Prinzip für die Methodik, wenigstens der rationellen Unterrichtsgegenstände heißt: Unterrichte so, daß überall die Selbstthätigkeit des Schülers möglichst ausgebildet werde! Gleich dem Kantischen obersten Grundsatz der Moral ist dasselbe ein formales Prinzip. Es stellt nicht nur die Norm oder die Richtschnur für jede entwickelnde Unterrichtsthätigkeit, sondern auch einen Maßstab für Beurteilung

jedes Buches und jedes Lehrers auf, welche dem Endziele formaler Bildung, der Selbstthätigkeit dienen sollen und wollen.

Das Gegentheil dieses Zieles ist die reine Empfänglichkeit oder das leidende Verhalten (die Passivität) des Schülers, und die diesem Extrem dienende Methode (wenn anders dieser Ehrenname hier noch anwendbar ist) heißt Mechanismus, der seine Zwecke durch Vor- und Nachsprechen, durch unverstandenes Regelwerk und damit verwandte, den Geist fesselnde Mittel erreicht. Ist daher jenes Prinzip richtig und wahr, und soll es in der That das Panier sein, unter dem sich alle Lehrer, die zur Entfesselung des jugendlichen Geistes beitragen wollen, versammeln sollen; so bedarf es nicht weiterhin noch eines besonderen Anlaufes zur Bekämpfung und endlichen Erlegung des alten Riesen, Mechanismus genannt, und er ist dann ein für alle Mal in der Überzeugung der Denkenden, wenn auch nicht eben so schnell in der Wirklichkeit, d. h. in der Praxis des Privat- und des öffentlichen Unterrichts erlegt und getötet.

Wie daher in allen rationellen Unterrichtsgegenständen (ja in allen ohne Ausnahme!) die Selbstthätigkeit und dadurch die der einstige Selbstständigkeit des Zöglings angestrebt werden soll, also auch durch den Unterricht in der Zahlenlehre zc. Darum dringen wir überall auf vollkommene Einsicht und Erkenntnis des Gegenstandes und betreten den Weg, welcher ausschließlich und allein zu diesem Ziele führen kann. Auf diesem Wege geht man überall von dem Einzelnen, Anschaulichen, Konkreten aus, um von ihm aus zu dem Allgemeinen und Abstrakten aufzusteigen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir zu einzelnen in dem Unterrichte in der Zahlenlehre über:

1. Es giebt im wesentlichen nur ein Rechnen, nicht zweierlei der Art nach, etwa wie Kopf- und Tafelrechnen, sondern alles Rechnen ist der Art nach dasselbe. Es beruht auf einer verständigen Beurteilung der in einer Aufgabe enthaltenen Sach- und Zahlverhältnisse, woraus sich die Art der Abhängigkeit der gesuchten Zahlen von den gegebenen ergibt, und woraus erkannt wird, durch welche Operationen an und mit den gegebenen Zahlen die gesuchten gefunden werden. Ohne diese besonnene Beurteilung

ist gar kein bildendes Rechnen möglich. Sie macht die Hauptsache beim Rechnen aus, muß jeder anzustellenden Operation vorhergehen und diese als notwendiges Resultat erzeugen. Um die Art der Ausrechnung muß man sich daher zu Anfang gar nicht bekümmern, sondern nur nüchtern und ruhig die gegebenen Verhältnisse betrachten. Schlecht unterrichtete Schüler und Erwachsene fragen immer gleich mit Unruhe und Ängstlichkeit danach, wie man eine Aufgabe ausrechnet. Das findet sich aber ganz von selbst, sobald man eine Aufgabe versteht. Versteht man sie nicht, so liegt das entweder an der Nichtkenntnis der Sache oder an dem Mangel der Erkenntnis der Zahlenverhältnisse. Die Kenntnis der Sache ist meist historischen (empirischen), die Erkenntnis der Zahlenverhältnisse rationellen Ursprungs. Ist daher ein Schüler unfähig, eine Aufgabe aufzulösen, so muß der Lehrer untersuchen, worin dieses Unvermögen seinen Grund hat, ob in dem einen oder andern, oder in beiden, um die Hindernisse aus dem Wege zu schaffen. Die anschauliche Durchsichtigkeit der Aufgabe und Lösung derselben muß aber stets der Ausrechnung vorhergehen, weil sich jenes zu diesem wie Grund und Folge, Ursache und Wirkung verhält.

2. Das richtige Rechnen muß man daher abhängig machen vom richtigen Erkennen und vollkommener mündlicher Darstellung, nicht von Übereinstimmung des gefundenen Resultates mit dem angegebenen Fazit, nicht von dem Bestehen einer sogenannten Probe.

Dem Grundsatz: der Schüler darf nicht zum Ausrechnen zugelassen werden, bis er die Aufgabe durchschaut hat (einem nicht durch falschen Unterricht verleiteten Menschen fällt so was gar nicht ein; aber in Schulen kommt solches nur zu häufig vor), muß man den zweiten beifügen: Der Ausrechnung muß auch eine in jeder Beziehung genügende mündliche Darstellung vorhergehen. Wie will man sonst erfahren, daß der Schüler richtig gedacht hat, und auf welche andere Weise will man den Schüler nötigen, richtig zu denken? — Erst dann, wenn er die darin liegende Anforderung befriedigt hat, läßt man ihn

an die Ausrechnung gehen. Hat man in dieser Beziehung verbildete Schüler vor sich, die überall nach dem Fazit haschen, so läßt man sie, um sie aus dieser falschen Richtung herauszuziehen, viele Aufgaben beurteilen und lösen, ohne die Ausrechnung beizufügen. Dadurch ergreifen sie thatächlich das Wesen der Sache, welches nicht in der Ausrechnung, sondern in der rationellen Beurteilung liegt. In ihr ruht das Bildende des Zahlenunterrichts und das Vergnügen an der Beschäftigung mit demselben. — Was richtig gedacht ist, trägt die Gewißheit in sich selbst. Es bedarf dann keines äußeren Probierens, welches immer auf Mechanismus hinausläuft. Allenfalls ist es zur Bewahrheitung der Fehlerlosigkeit einer Ausrechnung zuweilen zuzulassen.

3. Fertigkeit in der Behandlung der Zahlen ist notwendig ein Ausgangspunkt bei dem Unterricht in der Zahlenlehre, aber man beschränke die Forderung derselben auf das gehörige Maß.

Treibt man in ursprünglich pestalozzischer Weise in der Schule fast nichts als Zahlen-, Formen- und Sprachlehre, d. h. vernachlässigt man in unverantwortlicher Weise andere, höchst wichtige Gegenstände des allgemeinen Schulunterrichts, so kann man ohne besondere Intelligenz und ohne ausgezeichnetes *donum didacticum* (wie die Alten sich ausdrückten = Lehrgabe) den Schülern eine oft bewunderte, aber eitle Fertigkeit aneignen. Aber wozu? Das Leben verlangt sie nicht, und von wem es sie verlangt, der wird sie durch Übung schon gewinnen, ist nur in der Schule ein solides Fundament gelegt; die allgemeine Menschenbildung verlangt sie auch nicht; darum nochmals: wozu? — Eine mäßige, mit den übrigen gerechten Anforderungen an wohl unterrichtete Schüler übereinstimmende Fertigkeit, mit steter Berücksichtigung des ganzen Standpunktes und des künftigen Berufes des Schülers ist durchweg hinreichend. In einer allgemeinen Volksschule soll man es in keinem Stücke auf ausgezeichnete, vereinzelt hervorstechende Leistungen anlegen. Denn solche lassen sich nur mit Hintanziehung anderer wichtigen Dinge oder mit gleich tadelnswerter Berücksichtigung einzelner einseitigen Talente erzielen. Das gewöhnliche Leben fordert von dem Menschen nicht die Lösung

ungewöhnlicher Aufgaben, nicht die Schlichtung sehr zusammengefügter, verwickelter Verhältnisse, nicht enorme Fertigkeiten. Die allgemeine Volksschule hat die allgemeinen, nicht die besonderen Bedürfnisse zu berücksichtigen, jenen aber in vollem Maße zu genügen.

4. Da es nur ein Rechnen, nämlich ein Rechnen mit Verstand giebt, so ist alles Rechnen Kopfrechnen oder Kopf= nicht Handarbeit. Von einem Gegensatz zwischen Kopf= und Tafel=, mündlichem und schriftlichem, Gedanken= und Zifferrechnen kann daher nicht die Rede sein. Diesen vermeintlichen, leider noch nicht ganz veralteten Gegensatz muß man erst im Bewußtsein ganz vernichten, ehe man das richtige Verhältnis aufzufassen im Stande ist.

Man rechnet überall mit Zahlen, d. h. Vorstellungen von Zahlen oder Mengen von Einheiten. Diese Zahlenvorstellungen sind von äußeren Zeichen ganz unabhängig, wenn man sie auch zu Anfang durch Äußeres veranschaulicht und sich späterhin, z. B. bei verwickelteren Rechnungen, der allgemeinen üblichen Zahlzeichen d. h. der Ziffern bedient. Das eigentliche Rechnen geschieht daher stets ohne die Vorstellung irgend eines Zeichens. Es besteht in der Erkenntnis der gegenseitigen Abhängigkeit der Zahlenvorstellungen und in der Vollziehung dieser Abhängigkeit oder in der Entwicklung der einen Zahl aus der andern. Solches Rechnen hat man willkürlich Kopfrechnen genannt, und von Tafelrechnen spricht man, wenn man sich der Ziffern bedient. Beides setzt jederzeit in derselben Weise den Gebrauch des Verstandes voraus; beides ist also in gleicher Art Kopfarbeit. Deshalb stelle man beides in dem Unterricht auch gar nicht einander gegenüber. Sonst gelangt man zu einem gar nicht in der Sache liegenden, also unwahren, in seinen Folgen nachteiligen Gegensatz. — Man untersucht überall die Zahlenverhältnisse, übt sich in der Erkennung und Anwendung derselben mit lauterem Verständnis und bedient sich entweder gar keiner, oder willkürlich gewählter, auch der herkömmlichen Zeichen in der einmal allgemein giltigen, darum zu lernenden Darstellungsweise.

5. Der Unterschied zwischen dem sogenannten

Kopf- und Tafelrechnen besteht also nicht darin, daß man bei jenem den Kopf, bei diesem nur Hand und Auge gebraucht, sondern

a. darin, daß man beim Kopfrechnen an gar keine Zeichen, also auch an keine Ziffer denkt, bei dem schriftlichen Rechnen dagegen die Zahlvorstellungen und die Operationen, die man mit ihnen vollzieht, sichtbar darstellt;

b. darin, daß man leichtere Aufgaben mit nicht allzugroßen Zahlen frisch und rasch weg, ohne Griffel und Feder, schwere dagegen mit großen Zahlen, die nicht leicht zu behalten sind, der größeren Sicherheit wegen schriftlich ausrechnet. (In der Beurteilung, d. h. in der Erkenntnis der Abhängigkeit einer Zahl von einer andern, kommt — wie schon bemerkt — gar kein Unterschied vor. Deshalb kann auch eine sogenannte Probe nie die Falschheit der Beurteilung, sondern nur sogenannte Rechnungsfehler herausbringen.) Dieselben Aufgaben, die daher von stärkeren Schülern ohne äußere Erleichterungs- und Hilfsmittel gelöst werden, werden von schwächeren ganz oder teilweise durch Mitgebrauch der Ziffern behandelt. Der Unterschied zwischen Kopf- und Tafelrechnen ist darum kein objektiver, sondern ein subjektiver;

c. darin, daß man sich beim Nichtgebrauch der Ziffern, d. h. beim Kopfrechnen, viel freier bewegt als beim Zifferrechnen.

Das Rechnen mit Ziffern geschieht, weil schriftlich, oft oder meist um anderer willen, welchen man vollzogene Rechnungen vorlegen will. Um des allgemeinen Verständnisses willen ist man darum über bestimmte Darstellungsweisen übereingekommen, von welchen man sich auch schon deswegen nicht zu entfernen hat, weil sie in der Regel in scharfsinniger Weise einen möglichst kurzen und leicht zu übersehenden Weg einschlagen. In dieser Beziehung herrscht hier die Gebundenheit. Beim Kopfrechnen herrscht dagegen viel mehr Freiheit, welche eigene Bewegung, Auswahl und Belieben zuläßt. Darum lieben geistig bewegliche Kinder so sehr das Kopfrechnen. Es gefällt ihnen, eine Aufgabe in mannigfaltiger Art, auf ihre Weise zu behandeln. Auch trägt diese Seite des Kopfrechnens viel zu seinem bildenden Einfluß bei. Denn dadurch wird es

möglich, eine Aufgabe von mancherlei Seiten zu betrachten. Der Scharfsinn kann sich an den Aufgaben üben. Wer ihn besitzt, spürt an denselben, besonders wenn sie verwickelt sind, die verborgenen Seiten, von welchen sie angreifbar sind, das versteckte Ende auf, mit dem sie an Bekanntes angereicht und entwickelt werden können. Darum strebe man ja an den Kopfrechenaufgaben durch möglichst mannigfaltige Lösungsweisen die Entfesselung und Befreiung des jugendlichen Geistes an. Wenn es daher auch in den meisten Fällen geraten ist, die Größen der Zahlen, mit welchen man operiert, nach den dekadischen Einheiten, die sie enthalten, zu betrachten, weil dadurch gewöhnlich leichte Lösungsweisen entstehen, so ist dies doch keineswegs immer der Fall, wie beim schriftlichen Rechnen; vielmehr führt häufig eine andere Zerlegungsweise leichter zum Ziele. Soll z. B. mit 125 multipliziert werden, so werde ich diese Zahl nicht in 1 Hunderter, 2 Zehner und 5 Einer zerlegen, sondern als $1\frac{1}{4}$ Hundert betrachten; und soll der 12. Teil von 150 genommen werden, so paßt die Zerlegung in 100 und 50 nicht, sondern in 96 und 54, oder in 144 und 6 u. s. w.

6. Nun stellen wir einige allgemeine Regeln, die sich beim Kopfrechnen bewähren, zusammen. Wir fangen mit negativen an:

a. Gehe beim Kopfrechnen ganz von den Vorstellungen beim Zifferrechnen ab, stelle dir die Zahlen nicht als Ziffern oder durch Ziffern dargestellt vor!

Es giebt zwar Menschen, die beim nichtschriftlichen Rechnen alle Zahlen in Ziffern vor sich sehen, die einzelnen Stellen nach ihrem dekadischen Wert behandeln, also in der Regel sehr viel einzelnes zu behalten haben, und dennoch mit Fertigkeit und Sicherheit rechnen, aber dies sind seltene Fälle, und es ist ein solches Rechnen kein eigentliches Kopfrechnen. Die eigentlichen Vorteile des Kopfrechnens gehen dadurch verloren. Schlecht geleitete Schüler, deren Zahlvorstellungen immer an Ziffern gebunden werden, rechnen auch im Kopfe mit Ziffern, und es hält dann außerordentlich schwer, solche falsche Gewöhnung wieder zu ver-

tilgen. Darum beuge man dieser verkehrten Richtung durch den ganzen Gang des Unterrichts sorgfältig vor!

b. Man übe den Schülern solche Operationen und Resultate, welche sehr häufig vorkommen, ganz fest ein!

Der Lehrer ist es ihnen schuldig, daß er ihnen das Lernen erleichtere. Nicht zum Spielen sind sie in der Schule, und es giebt keine bildende, sondern nur eine verflachende Spielmethode: aber alles hat sein Maß. Unsere Schüler müssen viel lernen, und sie sollen Schweres lernen; darum erleichtere man ihnen das, was jedem schwer wird! Dadurch entsteht die Lust am Unterricht. Unverzeihlich und wahrhaft unverantwortlich ist es daher, wenn man die armen Jungen, die einen großen Teil ihrer schönen Jugendzeit innerhalb der oft ganz nackten, traurigen Schulwände zubringen müssen, Dinge auswendig lernen läßt, ohne auf wiederholende Übungen zu denken, welche den Zweck haben, daß sie das mühsam und vielleicht unter Thränen gelernte nie wieder vergessen. Der wohlmeinende, den Fortschritt des Unterrichts und die Bedürfnisse des Lebens kennende Lehrer übt ihnen das, was sie auf den folgenden Stufen und im Leben brauchen, so fest ein, daß sie es nie wieder vergessen. Er macht es ihnen mundrecht, daß sie nach Belieben, gleichsam im Schlafe, damit nach Belieben schalten und walten können. Merken sie solche schöne Eigenschaften und so edle Bemühungen des Lehrers, dann schätzen und lieben sie seine Treue, seine Unermüdlichkeit, sein Dringen auf Genauigkeit, Festigkeit und Sicherheit. Die Materialien, aus welchen man ein Gebäude bauen soll, müssen zuvor behauen und zugerichtet sein, bequem zur Handhabung. Sonst verschwindet dem Baumeister der Plan des Ganzen aus den Gedanken. So erfordern die höheren Übungen die Fertigkeit in allen niederen. Wer z. B. mit größeren Zahlen im Kopfe multiplizieren soll, muß das kleine und große Einmaleins fertig auswendig wissen. Der niedere Gedankenlauf muß sich dieser großen Erleichterungsmittel bemächtigt haben, damit der höhere in seinen Schlüssen nicht gestört werde. — Diese Bemerkungen würdige man, wie im Zahlunterricht, so im Allgemeinen, nach ihrer ganzen Wichtigkeit.

c. Man suche eine Mehrheit von Operationen auf möglichst wenige, eine Reihe von Zahlen auf eine kleinere Anzahl, große auf kleine zurückzuführen!

Hat man z. B. eine Reihe Summanden zu behalten, so bringe man sie in eine Summe, weil es leichter ist, eine Zahl zu behalten, als mehrere. Hat man mit großen Zahlen zu operieren, so thue man dieses nicht immer unmittelbar, sondern suche dieselben in kleinere zu zerlegen und aus der großen Aufgabe mehrere kleine zu machen, um eine nach der andern aufzulösen, das Resultat sich im Gedächtnis zurechtzulegen, nachher mit dem zweiten zu verbinden u. s. w. Freilich kommt es auf die Natur der Aufgabe an, ob dadurch wirklich eine Erleichterung entsteht, oder das Gegenteil. Jedenfalls aber trachte man danach, daß man im Verlauf der Aufgabe, wo möglich, immer nur eine Zahl als Resultat des bisherigen Ganges zu behalten hat. Sonst entsteht leicht Verwirrung oder Verwechslung.

d. Man schließe die Reihenfolge der vorzunehmenden Operationen genau an den sprachlichen Ausdruck an und komme dem Gedächtnis durch mündliche Wiederholung der bereits gewonnenen Resultate zu Hilfe!

Soll man z. B. eine komplexe oder Kollektivzahl, etwa 5 Ztr. 58 Pfd. 7 Lot, mit einer Zahl, z. B. mit 8, multiplizieren, so beginnt man die Multiplikation mit den Zentnern, schreitet dann zu den Pfunden fort u., weil wir die Gewichte in dieser Ordnung, von den höheren zu den niederen Einheiten zu nennen gewöhnt sind. Und hätte man zu 5 Ztr. 58 Pfd. 7 Lot noch 10 Ztr. 12 Pfd. 2 Lot hinzuzufügen, so spreche man nicht 10 Ztr. zu 5 Ztr. = 15 Ztr., sondern: 10 Ztr. zu 5 Ztr. 58 Pfd. 7 Lot = 15 Ztr. 58 Pfd. 7 Lot; dazu noch 12 Pfd. giebt 15 Ztr. 70 Pfd. 7 Lot; dazu noch 2 Lot giebt 15 Ztr. 70 Pfd. 9 Lot. Der wiederholte Ausdruck hindert das Vergessen oder Verwechseln.

e. Man nenne jede Aufgabe nur einmal, betone aber die wichtigeren Wörter scharf und deutlich!

Wissen die Schüler, daß man eine Aufgabe mehr als einmal nennt, so ist ihre Aufmerksamkeit nicht gespannt genug, und es

ist keine Grenze mehr vorhanden, wo man aufhören soll. Denn nenne ich eine Aufgabe um eines Schülers willen zweimal, warum soll ich sie nicht um eines noch weniger aufmerksamen Schülers willen dreimal nennen u. s. w. Darum stehe die aufgestellte Regel fest (die natürlich, nach der Natur der Aufgaben, Ausnahmen zuläßt); aber nun spreche man auch alles Wichtige, die Zahlwörter besonders, mit scharfem Accente! Dadurch erleichtert man den Schülern die Sache außerordentlich und man gewöhnt sie dadurch von selbst zu charakteristischem Sprechen!

f. Man mache sie auf einzelne Kunstgriffe und sogenannte Vorteile, die sich im Fortschritt des Rechnens von selbst ergeben, aufmerksam!

Man wählt statt einer Zahl eine bequemere, runde und verbessert nachher den Fehler. 3. B., statt 98 zu addieren oder mit ihr zu multiplizieren, nimmt man $98 = 100 - 2$; statt 148 von 312 abzuziehen, zieht man 148 von 300 ab und fügt dem Reste 12 hinzu 2c. —

Man verwechsle bei der Multiplikation die Faktoren mit einander, wenn dadurch eine Erleichterung entsteht; 3. B. statt 52×19 Wochen setze man 19×52 Wochen $= 19 \times 1$ Jahr $= 19$ Jahre.

Auf solche Vorteile und Kunstgriffe kommen die Schüler von selbst. Auf ihrer Handhabung beruht zu großem Teile die Festigkeit im Kopfrechnen.

g. Man gewöhne die Schüler an Ruhe und Besonnenheit.

Schnelligkeit und Raschheit im Fragen und Antworten bezeichnen den eifrigen Lehrer und die ihm ähnlich gewordenen Schüler. Aber die Besonnenheit und die Ruhe des Geistes dürfen, zumal beim Kopfrechnen, nicht fehlen. Verhaspelt sich ein Schüler (dem sanguinischen begegnet dies am ersten), so lasse man ihn ruhig die Entwicklung wieder von vorn anfangen, und man setze seiner Unruhe feste männliche Haltung entgegen. Das wirkt wie magnetischer Einfluß.
